Kurzscript zur Funktionentheorie im SS 2014

Sebastian Goette

KAPITEL 1

Holomorphe und Analytische Funktionen

1.a. Analytische Funktionen

1.1. Wiederholung. Setze $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Für $z = (x, y)$ und $w = (u, v) \in \mathbb{C}$ seien

$$z + w = (x + u, y + v) , \qquad z \cdot w = (xu - yv, xv + yu) ,$$
$$0 = (0, 0) , \qquad 1 = (1, 0) , \qquad i = (0, 1) ,$$
$$\bar{z} = (x, -y) , \qquad \operatorname{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2} , \qquad \operatorname{Im}(z) = y = \frac{(\bar{z} - z)i}{2} .$$

Fortan schreibe

$$z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) .$$

Die *komplexe Konjugation* $z \mapsto \bar{z}$ ist ein Automorphismus, das heißt, es gilt

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} , \qquad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} , \qquad \bar{1} = 1 .$$

Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge

$$\mathbb{R} = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im} z = 0 \,\right\} = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \bar{z} = z \,\right\} .$$

Es folgt $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ und $z\bar{z} \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und wir definieren den *komplexen Absolutbetrag* durch

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot\,, 0, 1)$ ein Körper mit

$$-z = (-x, -y) , \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + z^2}\right) ,$$

und $\mathbb{R}$ ist ein Teilkörper. Aus der Sicht des Körpers $\mathbb{R}$ lassen sich i und $-i$ nicht unterscheiden.

Wir können $\mathbb{C}$ auch „graphisch“ als *Gaußsche Zahlenebene* darstellen. Dazu betrachten wir die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Punkten $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 0)$ wie oben. Elemente von $\mathbb{C}$ sind Vektoren. Die Addition in $\mathbb{C}$ ist Vektoraddition. Die Multiplikation lässt sich in Polarkoordinaten beschreiben: man multipliziert die Längen (*Absolutbeträge*) der Faktoren, und addiert die Winkel zur x-Achse (*Argumente*).

Die komplexen Zahlen tragen die Euklidische Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Die zugehörige Topologie stimmt mit der üblichen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ überein. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist genau dann offen, wenn sie als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ offen ist. Eine Folge $(z_n)_n$ komplexer Zahlen konvergiert in $\mathbb{C}$ genau dann gegen z, wenn die entsprechende Punktfolge in $\mathbb{R}^2$ gegen den Punkt z konvergiert.

Für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist „zusammenhängend“ gleichbedeutend mit „wegzusammenhängend“.

1.2. Definition. Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt ein *Gebiet,* wenn sie offen und zusammenhängend ist.

1.3. Wiederholung. Eine *komplexe Potenzreihe* in z ist eine Reihe der Form

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie hat den *Konvergenzradius*

$$\rho = \Bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Bigr)^{-1} \in [0,\infty] \; .$$

Dann konvergiert $R(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ absolut und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Wir nennen $R(z)$ *konvergent,* falls $\rho > 0$, falls es also $z \neq 0$ gibt, für die $R(z)$ konvergiert, und ansonsten *divergent.* Wenn $R(z)$ konvergent ist, heißt die Kreisscheibe

$$B_\rho(0) = \bigl\{\, z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < \rho \,\bigr\}$$

der *Konvergenzkreis* von $R(z)$.

1.4. Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f (*komplex*) *analytisch* im Punkt $z_0 \in \Omega$, wenn es eine konvergente Potenzreihe $R(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und eine Umgebung U von z_0 in $\Omega \cap B_\rho(z_0) \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(z) = R(z - z_0) \qquad \text{für alle } z \in U \; .$$

Wir sagen auch, dass die Funktion f auf U um den Punkt z_0 herum durch die Potenzreihe R *dargestellt* wird. Wir nennen f (*komplex*) *analytisch* auf Ω, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex analytisch ist.

1.5. Beispiel. Die *komplexe Exponentialfunktion* wird durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

gegeben. Ihr Konvergenzradius ist $\rho = \infty$. Mit Hilfe der Binomischen Formeln und des Umordnungssatzes für absolut konvergente Reihen zeigt man wie in der reellen Analysis, dass

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \; .$$

Für rein imaginäres $z = iy$ gilt

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y \; .$$

Hieraus ergibt sich eine Darstellung der komplexen Exponentialfunktion als

$$\exp(x + iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y \; .$$

1.6. Satz (Identitäts- für Potenzreihen). *Es sei $R(z)$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzkreis $B_\rho(0)$. Wenn es eine Folge $(z_n)_n$ in $B_\rho(0) \setminus \{0\}$ gibt, die gegen 0 konvergiert, so dass $R(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $R(z) = 0$, das heißt, alle Koeffizienten von $R(z)$ verschwinden.*

1.7. *Proposition (Operationen mit Potenzreihen). *Es seien $R(z) = \sum a_n z^n$, $S(z) = \sum b_n z^n$ zwei konvergente Potenzreihen mit Konvergenzradien ρ, $\sigma > 0$.*

(1) Summe: *Es seien p, $q \in \mathbb{C}$, dann hat die Potenzreihe*

$$(pR + qS)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (pa_n + qb_n) z^n$$

Konvergenzradius $\geq \min(\rho, \sigma)$, und auf ihrem Konvergenzkreis gilt

$$(pR + qS)(z) = pR(z) + qS(z) \; .$$

(2) Cauchy-Produkt: *Die Potenzreihe*

$$(R\cdot S)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n$$

hat Konvergenzradius $\geq \min(\rho,\sigma)$*, und auf ihrem Konvergenzkreis gilt*

$$(R\cdot S)(z)=R(z)\cdot S(z)\ .$$

(3) Einsetzen (Faà di Brunos Formel): *Es gelte* $b_0=0$*. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$(R\circ S)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Bigg(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\\ 1i_1+\dots+ki_k=n}}\frac{k!}{i_1!\cdots i_k!}b_1^{i_1}\cdots b_k^{i_k}\Bigg)z^n\ ,$$

und auf ihrem Konvergenzkreis gilt

$$(R\circ S)(z)=R(S(z))\ .$$

1.b. Komplexe Differenzierbarkeit

In der folgenden Proposition identifizieren wir wieder $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$.

1.8. Proposition und Definition (Linear- und Antilinearteil). *Eine* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung*

$$M_2(\mathbb{R})\ni A\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

heißt $\mathbb{C}$-antilinear, *wenn* $A(zw)=\bar z\,A(w)$ *für alle* z, $w\in\mathbb{C}$ *gilt. Jede* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung* $A\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *lässt sich in eindeutiger Weise zerlegen als*

$$A=A'+A''\qquad\text{mit}\qquad A'(z)=a'\cdot z\qquad\text{und}\qquad A''(z)=a''\cdot\bar z$$

mit a', $a''\in\mathbb{C}$*, so dass* A' *eine* $\mathbb{C}$*-lineare und* A'' *eine* $\mathbb{C}$*-antilineare Abbildung ist. Dann heißt* A' *der* Linearteil *und* A'' *der* Antilinearteil *von* A*. Insbesondere ist* A *genau dann* $\mathbb{C}$*-linear, wenn* $A''=0$.

1.9. Wiederholung. Reelle Differenzierbarkeit für Funktionen in einer und in mehreren Veränderlichen (partiell, total, stetig partiell).

C^2-Funktionen und der Satz von Schwarz.

1.10. Definition. Es sei $\Omega\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0\in\Omega$ ein Punkt. Dann heißt f *komplex differenzierbar* (*holomorph*) in z_0 mit *Ableitung* $f'(z_0)\in\mathbb{C}$, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(z_0)=\lim_{\Omega\ni z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\quad\in\mathbb{C}\ .$$

Wenn f an jeder Stelle $z_0\in\Omega$ komplex differenzierbar ist, heißt f *holomorphe Funktion.*

Diese Definition entspricht der eindimensionalen Differentiation aus Analysis I.

1.11. Definition. Es sei Ω ein Gebiet und $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ eine reell partiell differenzierbare Funktion. Seien $u=\operatorname{Re}f$ und $v=\operatorname{Im}\colon\Omega\to\mathbb{R}$ Real- und Imaginärteil von f. Definiere die *Wirtinger-Ableitungen*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}&=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Wenn f an der Stelle p reell total differenzierbar ist mit Ableitung $df|_p$, dann entspricht $\frac{\partial f}{\partial z}$ dem Linearteil und $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ dem Antilinearteil von $df|_p$.

1.12. Beispiel. Betrachte z, $\bar z$ als Funktionen in z. Dann gilt

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1\ , \qquad \frac{\partial z}{\partial \bar z} = 0\ , \qquad \frac{\partial \bar z}{\partial z} = 0\ , \qquad \frac{\partial \bar z}{\partial \bar z} = 1\ .$$

1.13. Lemma. *Es sei Ω ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$, und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist komplex differenzierbar bei z_0;*
(2) *Es gibt eine Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$, die bei z_0 stetig ist, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\varphi(z)\ ;$$

(3) *f ist reell total differenzierbar bei z_0 mit $\mathbb{C}$-linearer Ableitung;*
(4) *f ist reell total differenzierbar bei z_0, und es gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|_{z_0} = 0\ ;$$

(5) *f ist reell total differenzierbar bei z_0, und für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gelten die* Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z_0} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z_0} \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z_0} = -\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z_0}\ .$$

Wenn f bei z_0 komplex differenzierbar ist, ist f bei z_0 insbesondere auch stetig.

1.14. Beispiel. Die komplexe Exponentialfunktion aus Beispiel 1.5 ist holomorph.

1.15. Proposition. *Es gelten die folgenden Differentiationsregeln.*

(1) Linearität. *Linearkombinationen holomorpher Funktionen f, g sind wieder holomorph: für a, $b \in \mathbb{C}$ gilt*

$$(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z)\ .$$

(2) Kettenregel. *Die Verkettung zweier holomorpher Funktionen f, g ist wieder holomorph, mit*

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)\ .$$

(3) Produktregel. *Das Produkt zweier holomorpher Funktionen f, g ist wieder holomorph, mit*

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)\ .$$

1.16. Satz (Ableitung von Potenzreihen). *Es sei $R(z)$ eine konvergente komplexe Potenzreihe. Dann ist die von R dargestellte Funktion innerhalb des Konvergenzkreises holomorph, und die komplexe Ableitung wird durch die gliedweise abgeleitete Potenzreihe dargestellt.*

Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ um $z_0 \in \Omega$ durch die Potenzreihe $R(z) = \sum_n a_n z^n$ dargestellt, dann gilt insbesondere

$$f(z_0) = 0\ , \qquad f'(z_0) = a_1\ , \qquad f^{(n)}(z_0) = n!\,a_n\ .$$

1.c. Das komplexe Kurvenintegral

1.17. Wiederholung. Eine *stückweise C^1-Kurve* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung γ, für die $n \in \mathbb{N}$ und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ existieren, so dass

$$\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\colon [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

für alle $i = 1, \dots, n$ stetig differenzierbar ist (einschließlich der jeweiligen Randpunkte). Für $t \notin \{t_0, \dots, t_n\}$ sei $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}$ der *Geschwindigkeitsvektor.* Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *geschlossen,* wenn

$$\gamma(b) = \gamma(a)\ .$$

1.18. Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve. Definiere das *komplexe Kurvenintegral*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,dt \in \mathbb{C}\;.$$

Dabei werden Real- und Imaginärteil des Integranden einzeln integriert, und wir ignorieren die endlich vielen Stellen, an denen $\dot\gamma(t)$ nicht definiert ist. Für unsere Zwecke reicht das Riemann-Integral aus der Analysis I. Es seien also $f = u + iv$ und $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \big(u(\gamma(t)) \cdot \dot x(t) - v(\gamma(t)) \cdot \dot y(t)\big)\,dt + i \int_a^b \big(u(\gamma(t)) \cdot \dot y(t) + v(\gamma(t)) \cdot \dot x(t)\big)\,dt\;.$$

Mithin steht „z" im Kurvenintegral für $\gamma(t)$, und das *Tangentenelement* „dz" für

$$d\gamma(t) = \dot\gamma(t)\,dt = (\dot x(t) + i\dot y(t))\,dt\;.$$

1.19. Bemerkung. Der Realteil des komplexen Kurvenintegrals entspricht dem Kurvenintegral aus der Analysis über $\bar f$, aufgefasst als Vektorfeld

$$\bar f(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z) \\ -\operatorname{Im} f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z) \\ -v(z) \end{pmatrix}\;,$$

siehe Skripten [**7**, Kap. 8, Def. 1.6], [**10**, Def. 17.10], [**4**, Kap. 5, (2)]. Der Imaginärteil des komplexen Kurvenintegrals entspricht dem „normalen Kurvenintegral" des obigen Vektorfeldes aus dem Satz von Gauß, siehe zum Beispiel [**4**, Def. 6.3].

1.20. Proposition. *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ ein stückweiser C^1-Diffeomorphismus. Dann hat $\dot\varphi$ konstantes Vorzeichen, und es gilt*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \operatorname{sign}\dot\varphi \int_\gamma f(z)\,dz\;.$$

1.21. Folgerung (aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann gilt*

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(t))\big|_{t=a}^{b}\;.$$

1.22. Bemerkung. Wir möchten uns das Kurvenintegral gern als „Umkehroperation" zum komplexen Differenzieren vorstellen. Am liebsten würden wir eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ vorgeben und einen Punkt $p \in \Omega$ wählen. Zu $q \in \Omega$ sei $\gamma_q\colon [a,b] \to \Omega$ ein Weg von $p = \gamma_q(a)$ nach $q = \gamma_q(b)$. Dann würden wir also hoffen, dass

$$F(q) = \int_{\gamma_q} f(z)\,dz \tag{*}$$

eine „komplexe Stammfunktion" von f ist, in dem Sinne, dass F holomorph ist mit $F'(z) = f(z)$. Nach Folgerung 1.21 würde das unter anderem implizieren, dass das obige Integral (*) nicht von der Wahl des Weges γ_q von p nach q abhängt. Das gilt aber nicht für beliebige Funktionen f, wie die nächsten Abschnitte zeigen werden.

1.d. Der Cauchy-Integralsatz

1.23. Definition. Eine *stückweise C^1-Homotopie* zwischen zwei stückweise C^1-Kurven γ_0 und $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ von $p = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ nach $q = \gamma_0(b) = \gamma_1(a)$ ist eine Abbildung $h\colon [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, für die n, $m \in \mathbb{N}$ und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ und $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ existieren, so dass

$$h|_{[t_{i-1},t_i]\times[s_{j-1},s_j]}\colon [t_{i-1},t_i] \times [s_{j-1},s_j] \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

stetig partiell differenzierbar ist (einschließlich des jeweiligen Randes) für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $j = 1, \dots, m$, und so dass

$$\begin{aligned} &h(t,0) = \gamma_0(t) &&\text{und} && h(t,1) = \gamma_1(t) && \text{für alle } t \in [a,b]\ , \\ &h(a,s) = p &&\text{und} && h(b,s) = q && \text{für alle } s \in [0,1]\ . \end{aligned}$$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zwei stückweise C^1-Kurven γ_0 und $\gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ heißen (*stückweise C^1-*) *homotop in* Ω, wenn eine stückweise C^1-Homotopie $h\colon [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ zwischen ihnen gibt. Eine geschlossene stückweise C^1-Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ heißt (*stückweise C^1-*) *nullhomotop in* Ω, wenn sie zur konstanten Kurve $t \mapsto \gamma(a) = \gamma(b)$ in Ω homotop ist.

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend,* wenn jede geschlossene (stückweise C^1-) Kurve nullhomotop in Ω ist.

1.24. Satz (Cauchyscher Integralsatz). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve, die in Ω nullhomotop ist. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\ .$$

Beweisskizze. Es reicht zu zeigen: sei $h\colon R = [a,b]\times[c,d] \to \Omega$ eine C^1-Abbildung, und es sei $h(\partial R)$ die stückweise C^1-Randkurve des Bildes von R, dann gilt

$$\int_{h(\partial R)} f(z)\,dz = 0\ .$$

Wir nehmen an, das sei nicht der Fall. Dann zerlegen wir $[a,b]\times[c,d]$ als Vereinigung immer kleinerer Rechtecke und finden $\varepsilon > 0$ und eine Folge von ineinander enthaltenen abgeschlossenen Rechtecken R_n mit Seitenlängen $\le 2^{-n}\delta$, so dass

$$\left|\int_{h(\partial R_n)} f(z)\,dz\right| \ge 2^{-2n}\varepsilon\ .$$

Nach dem Satz über die Intervallschachtelung existiert $(s_0,t_0) \in [a,b]\times[c,d]$ so dass $\bigcap_n R_n = \{(s_0,t_0)\}$.

Nahe $z_0 = h(s_0,t_0)$ schreibe f gemäß Lemma 1.13 als

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0) + r(z-z_0)\ ,$$

wobei $r(w) = \varphi(w) - f'(z_0) = o(|w|)$. Da $f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0)$ als Differential einer holomorphen Funktion geschrieben werden kann, und da die Länge von $h(\partial R_n)$ von der Ordnung $O(2^{-n})$ ist, ergibt sich mit Folgerung 1.21 der Widerspruch

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{2n}\int_{h(\partial R_n)} f(z)\,dz\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2^{2n}\int_{h(\partial R_n)} r(z-z_0)\,dz\right) \le \lim_{n\to\infty}\Big(2^{2n}\cdot O\big(2^{-n}\big)\cdot o\big(2^{-n}\delta\big)\Big) = 0\ .$$

□

1.25. Folgerung. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Für in Ω homotope stückweise C^1-Kurven γ_0, $\gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ gilt*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \;.$$

Der Cauchysche Integralsatz ist verwandt mit den Integralsätzen von Stokes und Gauß [**4**, Kapitel 6], [**8**, Kapitel 10], [**10**, Kapitel 27], wie die folgende Verallgemeinerung zeigt.

1.26. *Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ reell total differenzierbar, und $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ sei stetig. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve, die eine Fläche $A \subset \Omega$ in positiver Richtung umläuft. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2i \int_A \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,dA(z) \;.$$

In der Tat ist der Realteil der Wirtinger-Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ gerade die halbe Divergenz des Vektorfeldes $\bar f$ aus Bemerkung 1.19. Der Imaginärteil von $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ stimmt bis auf das Vorzeichen mit der halben zweidimensionalen Rotation von $\bar f$ überein; diese entspricht der äußeren Ableitung der zugehörigen Pfaffschen Form $u\,dx - v\,dy$.

1.e. Die Potenzreihen-Darstellung

Die folgenden Resultate zeigen deutlich den Unterschied zwischen reeller und komplexer Analysis.

1.27. Satz (Cauchysche Integralformel). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_{z_0}(r)}$ ganz in Ω liegt. Für $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$, $\gamma(t) = z_0 + e^{2\pi i t} r$ und alle $z \in B_{z_0}(r)$ gilt dann*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \;.$$

1.28. Folgerung (Mittelwertsatz). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ wie oben, dann gilt*

$$f(z_0) = \int_0^1 f\bigl(z_0 + re^{2\pi i t}\bigr)\,dt \;.$$

1.29. Beispiel. Wir berechnen die Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi)\,d\varphi = 2\pi \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi)\,d\varphi = 0 \;,$$

indem wir den Mittelwertsatz 1.28 auf die Funktion $f(z) = e^z$ mit $z_0 = 0$ und $r = 1$ anwenden. Wenn wir stattdessen den Cauchy-Integralsatz 1.24 anwenden, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos(\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \sin(\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = 0 \;.$$

1.30. Satz (Potenzreihendarstellung). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \Omega$. Dann lässt sich f um z_0 in eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

entwickeln, dabei seien r und γ wie oben. Für den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe gilt

$$\rho \ge \sup\bigl\{\, r > 0 \bigm| B_r(z_0) \subset \Omega \,\bigr\} \;.$$

1.31. Folgerung. *Holomorphe Funktionen sind analytisch und insbesondere C^∞.*

Ab sofort müssen wir zwischen „holomorph“ und „analytisch“ also nicht mehr unterscheiden. Holomorphe Funktionen erfüllen eine sogenannte *elliptische Differentialgleichung,* nämlich die Cauchy-Riemann-Gleichung aus Lemma 1.13. Die obige Folgerung ist ein Spezialfall eines wichtigen Resultats der Analysis, wonach Lösungen elliptischer Differentialgleichungen (bei denen Koeffizienten und rechte Seite C^∞-Funktionen sind) beliebig oft differenzierbar sind.

Mit Proposition 1.15 und Folgerung 1.31 können wir Proposition 1.7 etwas leichter beweisen.

In Bemerkung 1.22 haben wir die Stammfunktion F einer Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ als holomorphe Funktion mit $F' = f$ eingeführt.

1.32. Folgerung. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann hat eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann eine komplexe Stammfunktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, wenn f holomorph ist.*

1.33. Folgerung (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn es eine Teilmenge $A \subset \Omega$ gibt mit $f|_A = 0$ und A einen Häufungspunkt in Ω hat, dann folgt bereits $f = 0$ auf ganz Ω.*

Der Identitätssatz ermöglicht es manchmal, die holomorphe Fortsetzung einer reellen Funktion zu finden und aus dem Reellen bekannte Eigenschaften ins Komplexe zu übertragen.

1.34. Beispiel. Die reelle Sinus-Funktion lässt sich eindeutig auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen, und es gilt

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \;,$$
$$\sin(z + 2\pi) = \sin(\pi - z) = \sin(z) = -\sin(-z)$$

für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Der Identitätssatz schränkt aber auch die Möglichkeiten, holomorphe Funktionen zu konstruieren, stark ein.

1.35. Beispiel. Im Folgenden sei Ω ein Gebiet mit $0 \in \Omega$.

(1) Es gibt keine holomorphe Funktion f auf $\Omega \setminus \{0\}$, so dass

$$f(x) = |x| \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \cap \Omega \;.$$

(2) Es gibt keine holomorphe Funktion f auf Ω, so dass

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \cap \Omega \text{ mit } \operatorname{Re} x > 0, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \cap \Omega \text{ mit } \operatorname{Re} x \le 0, \end{cases}$$

obwohl die auf $\mathbb{R} \cap \Omega$ angegebene reellwertige Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

Insbesondere gibt es keine holomorphen Abschneidefunktionen und keine holomorphen Partitionen der Eins.

1.36. Satz (Morera). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, so dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta \subset \Omega$. Dann ist f holomorph.

Dieser Satz wird später noch wichtig. Hier folgt erst einmal eine einfache Anwendung.

1.37. Folgerung (Schwarzsches Spiegelungsprinzip). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet, das heißt, für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z \in \Omega$ genau dann, wenn $\bar{z} \in \Omega$. Setze*

$$\Omega_+ = \left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \operatorname{Im} z > 0 \right\} , \qquad \Omega_0 = \left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \operatorname{Im} z = 0 \right\} , \qquad \Omega_- = \left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \operatorname{Im} z < 0 \right\} .$$

Es sei $f\colon \Omega_+ \cup \Omega_0 \to \mathbb{C}$ stetig, so dass $f|_{\Omega_+}$ holomorph und $f|_{\Omega_0}$ reellwertig ist. Dann existiert eine holomorphe Fortsetzung $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})} \qquad \text{für alle } z \in \Omega_- .$$

1.38. Beispiel. Es sei $\Omega = \mathbb{C}$, dann erfüllt $\sin|_{\Omega_+ \cup \Omega_0}$ die Voraussetzungen des Schwarzschen Spiegelungsprinzips. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z < 0$ gilt daher

$$\sin(z) = \overline{\sin(\bar{z})} .$$

Nach dem Identitätssatz gilt diese Gleichung dann für alle $z \in \mathbb{C}$.

1.39. Satz (Abelscher Grenzwert-). *Es sei $R(z)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty)$, und es sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = \rho$, so dass $R(w)$ konvergiert. Für ein beliebiges $C > 1$ betrachte*

$$\Omega_C = \left\{ z \in B_\rho(0) \,\middle|\, |w - z| < C\,(\rho - |z|) \right\} .$$

Dann ist $R(w)$ der Grenzwert der durch $R(z)$ auf Ω_C dargestellten Funktion im Randpunkt w.

Sei $(z_n) \in \Omega_C$ eine Folge, die gegen w konvergiert. Dann bleibt zwischen den Geraden durch z_n und w und der Tangenten an den Kreis um 0 durch w ein gewisser minimaler positiver Winkel. Daher sagt man auch, $R(w)$ sei *nicht tangentialer Grenzwert* von $R(z)|_{B_\rho(0)}$.

1.40. Bemerkung. Wir bezeichnen den *Kreis* um z_0 vom Radius r mit

$$S_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_0| = r \right\} .$$

Es sei $g\colon S_r(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig, und $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$ sei eine Parametrisierung von $S_r(z_0)$. Dann können wir wie in der Integralformel 1.27 eine holomorphe Funktion $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ definieren durch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Jetzt kann man die Frage stellen, ob es ein Gebiet Ω mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und eine holomorphe Fortsetzung von f auf Ω gibt, so dass $f|_{S_r(z_0)} = g$ gilt. Aus dem Integralsatz 1.24 folgt dann sofort

$$\int_\gamma (z - z_0)^k g(z)\, dz = \int_\gamma (z - z_0)^k f(z)\, dz = 0 \tag{*}$$

für alle $k \geq 0$. Nicht so einfach ist die folgende Umkehrung einzusehen: wenn g eine C^2-Funktion ist und die obigen Bedingungen (*) gelten, dann besitzt g zumindest eine stetige Fortsetzung auf $\overline{B_r(z_0)}$, die auf $B_r(z_0)$ holomorph ist. Die Bedingung (*) beschreibt also mögliche *Randwerte* holomorpher Funktionen auf $B_r(z_0)$.

KAPITEL 2

Abbildungseigenschaften Holomorpher Funktionen

Wenn im Folgenden nichts anderes gesagt wird, ist Ω stets ein Gebiet, und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stets eine holomorphe Funktion.

2.a. Nullstellen und Isolierte Singularitäten

2.1. Definition. Für $w \in \Omega$ werde f in einer Umgebung von w dargestellt durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n \ .$$

Dann ist die *Ordnung* $\operatorname{ord}_w(f)$ von f an der Stelle w die kleinste Zahl n, so dass $a_n \neq 0$. Falls $\operatorname{ord}_w(f) \neq 0$, heißt w auch eine *Nullstelle* der Ordnung $\operatorname{ord}_w(f)$ von f.

2.2. Beispiel.

(1) Die Sinus-Funktion aus Beispiel 1.34 hat Nullstellen genau an den Stellen $k\pi \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und diese Nullstellen haben Ordnung 1.
(2) Die Cosinus-Funktion erfüllt $\cos(z) = \sin\bigl(z + \frac{\pi}{2}\bigr)$, daher hat sie Nullstellen genau an den Stellen $\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr)\pi \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und diese Nullstellen haben wiederum Ordnung 1.

Im Folgenden bezeichnen wir die *punktierte Kreisscheibe* um z_0 vom Radius $r > 0$ mit

$$B_r^*(z_0) = B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \ .$$

2.3. Definition. Es sei $w \in \Omega$, und $f\colon \Omega \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph, dann heißt w eine *isolierte Singularität* von f.

(1) Wenn sich f zu einer holomorphen Funktion auf ganz Ω fortsetzen lässt, dann heißt die Singularität w *hebbar,* und wir definieren die Ordnung $\operatorname{ord}_w(f)$ als die Ordnung dieser Fortsetzung bei w.
(2) Wenn es $m \geq 1$ und Zahlen $a_{-1}, \dots, a_{-m} \in \mathbb{C}$ mit $a_{-m} \neq 0$ gibt, so dass die Funktion

$$f(z) - \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z-w)^n}$$

bei w eine hebbare Singularität hat, dann heißt w eine *Polstelle* von f der *Ordnung* m mit *Hauptteil* $\sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z-w)^{-n}$. In diesem Fall setzen wir $\operatorname{ord}_w(f) = -m$.
(3) Wenn für alle $r > 0$ mit $B_r(w) \subset \Omega$ das Bild von $f|_{B_r^*(w)}$ in $\mathbb{C}$ dicht liegt, heißt w eine *wesentliche Singularität* von f, und wir setzen $\operatorname{ord}_w(f) = -\infty$.

Die Fortsetzung in (1) ist eindeutig, da holomorphe Funktionen insbesondere stetig sind — hierfür brauchen wir den Identitätssatz 1.33 nicht.

Man beachte außerdem, dass die Polstellen-Ordnung in (2) gerade durch $-\operatorname{ord}_w$ gegeben wird.

2.4. Beispiel.

(1) Die Tangens-Funktion $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ hat Nullstellen der Ordnung 1 genau an den Stellen $k\pi \in \mathbb{C}$ und Polstellen der Ordnung 1 genau an den Stellen $\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr)\pi \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Der Hauptteil ist jeweils $-\frac{1}{z-(k+\frac{1}{2})\pi}$.

(2) Die Funktion $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Singularität an der Stelle 0. Mit Hilfe der expliziten Darstellung in Beispiel 1.5 überprüft man, dass für beliebig kleine $r > 0$ die Abbildung $f|_{B_r^*(0)}$ alle Werte in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ annimmt.

(3) Die Funktion $g(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ hat dann ebenfalls eine wesentliche Singularität an der Stelle 0, obwohl sie dort im Reellen beliebig oft differenzierbar ist. Man kann hier allerdings Verdacht schöpfen, da die Taylorreihe von $g|_{\mathbb{R}}$ um 0 verschwindet, und somit nicht die Funktion $g|_{\mathbb{R}}$ darstellt.

2.5. Satz (Riemannscher Hebbarkeits-). *Es sei $f\colon \Omega \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gelte*

$$\lim_{z\to w} (z - w)\, f(z) = 0 \ .$$

Dann ist w eine hebbare Singularität von f.

2.6. Beispiel. Sei $r > 0$. Es gibt keine holomorphe Funktion f auf $B_r^*(0)$, so dass $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in (0, r)$.

2.7. Bemerkung. Die Ordnung einer Funktion $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ an einer Stelle $z_0 \in \Omega$ lässt sich auch charakterisieren als größte Zahl $k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$g(z) = f(z)\,(z - z_0)^{-k}$$

bei z_0 eine hebbare Singularität hat.

2.8. Satz (Casorati-Weierstraß). *Es sei $w \in \Omega$ und $f\colon \Omega \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:*

(1) *die Singularität w ist hebbar;*
(2) *die Singularität w ist eine Polstelle;*
(3) *die Singularität w ist wesentlich.*

Der Satz von Casorati-Weierstraß lässt sich noch verschärfen.

2.9. *Satz (Picard, „großer“). *Sei z_0 eine wesentliche Singularität von $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, und sei $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset \Omega$. Dann nimmt $f|_{B_r^*(z_0)}$ alle Werte in $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.*

2.b. Das Maximumprinzip und der Satz von Liouville

2.10. Satz (Maximumprinzip). *Wenn ein $z_0 \in \Omega$ existiert, so dass*

$$|f(z_0)| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \ ,$$

dann ist f bereits konstant.

2.11. Beispiel. Der reelle Cosinus hat bei 0 ein lokales Maximum. Für $z = iy$ gilt aber $\cos(iy) = \cosh(y)$, so dass wir entlang der imaginären Achse ein lokales Minimum sehen. Insgesamt hat der komplexe Cosinus also kein Extremum bei 0.

2.12. Folgerung (Schwarz-Lemma). *Es sei $f\colon B_r(0) \to B_r(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt*

$$|f(z)| \le |z| \qquad \text{für alle } z \in B_r(0), \text{ und} \tag{1}$$

$$\left|f'(0)\right| \le 1 \ . \tag{2}$$

Wenn in (1) Gleichheit gilt für ein $z \in B_r(0) \setminus \{0\}$ oder wenn in (2) Gleichheit gilt, dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so dass $f(z) = \lambda z$.

2.13. Definition. Es seien $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{C}$ Gebiete. Eine Abbildung $f\colon \Omega_0 \to \Omega_1$ heißt *biholomorph,* wenn f holomorph und bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenfalls holomorph ist.

Aus dem Satz 2.23 über die Blätterzahl unten ergibt sich, dass wir die Holomorphie der Umkehrabbildung nicht fordern müssen — sie ergibt sich automatisch aus den anderen Voraussetzungen.

2.14. Beispiel. Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) ,$$

definieren wir die *Möbiustransformation* M_A durch

$$M_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

für alle z, für die der Nenner nicht 0 wird (mehr dazu in den Übungen).

Es sei $A \in U(1,1)$, das heißt, es gilt

$$|a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad a\bar{b} - c\bar{d} = 0 ,$$

dann gilt $M_A(z) \in B_1(0)$ für alle $z \in B_1(0)$. Die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

liegt ebenfalls in $U(1,1)$, und $M_{A^{-1}}$ ist die Umkehrabbildung von M_A. Insbesondere ist die Möbiustransformation $M_A\colon B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph.

2.15. Folgerung (aus dem Schwarz-Lemma). *Es sei $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph, dann ist f eine Möbiustransformation; genauer: es existiert $A \in U(1,1)$, so dass $f = M_A$.*

2.16. Satz (Liouville). *Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn $|f|$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist, dann ist f konstant.*

2.17. Satz (Fundamental- der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine komplexe Nullstelle.*

2.18. Bemerkung. Mittels Polynomdivision folgt sofort, dass jedes normierte komplexe Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, siehe [**3**, Folg. 5.22]. Jedes normierte reelle Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren und quadratische Faktoren vom Typ $X^2 + aX + b$ mit Diskriminante $a^2 - 4b < 0$. Beide Faktorisierungen sind bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

2.c. Das lokale Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Verhalten holomorpher Funktionen in einer Umgebung eines Punktes $z_0 \in \Omega$. Wir beginnen mit einer einfachen Folgerung aus dem Umkehrsatz der reellen Analysis [**7**, Kap. 9, Satz 1.2], [**10**, Theorem 16.15].

2.19. Satz (Umkehrsatz). *Es sei $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und eine Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von $f(z_0)$, so dass $f|_U\colon U \to V$ biholomorph ist.*

2.20. Beispiel. Wie im Reellen ist auch hier die Umkehrabbildung im Allgemeinen nur lokal definierbar.

1. Die Umkehrfunktion der Funktion $z \mapsto z^2$ ist die Quadratwurzel. In Beispiel 2.6 haben wir gesehen, dass die Quadratwurzel nicht auf ganz $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert werden kann.
2. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der Logarithmus. In den Übungen haben wir gesehen, dass der Logarithmus nicht auf ganz $\mathbb{C}^*$ definiert werden kann.

2.21. Proposition. (1) *Es sei $f(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$, so dass $f(z) = e^{g(z)}$.*

(2) *Es sei $z_0 \in \Omega$ eine Nullstelle der Ordnung k von f. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit $g'(z_0) \neq 0$, so dass $f(z) = g(z)^k$ für alle $z \in U$.*

2.22. Beispiel. Die Funktion $z \mapsto 1 - \cos z$ hat eine Nullstelle der Ordnung 2 bei 0. In der Tat gilt

$$1 - \cos z = \left(\sqrt{2}\,\sin\frac{z}{2}\right)^2 .$$

Achtung: da $1 - \cos z$ gerade in z ist, existiert auch eine holomorphe Funktion g auf $\mathbb{C}$, so dass

$$1 - \cos z = g(z^2) \qquad \text{mit} \qquad g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{(2n)!} .$$

2.23. Satz (Blätterzahl). *Es sei $f(z_0) = w_0$, und die Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$ habe bei z_0 eine Nullstelle der Ordnung k. Dann gibt es zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass jedes $w \in B^*_\delta(w_0)$ genau k Urbilder in $B_\varepsilon(z_0)$ hat.*

Im Beweis zeigen wir, dass eine umkehrbare Funktion g existiert, so dass $f(z) = w_0 + g(z)^k$ nahe z_0 gilt. Aus dieser Überlegung folgt sofort, dass wir in Definition 2.13 die Holomorphie der Umkehrabbildung nicht zu fordern brauchen.

2.24. Satz (Offene Abbildung; Gebietstreue). *Nichtkonstante holomorphe Funktionen bilden offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ ab. Insbesondere bilden sie Gebiete auf Gebiete ab.*

KAPITEL 3

Der Residuensatz

In diesem Kapitel wollen wir komplexe Kurvenintegrale weiter untersuchen. Wir wollen verstehen, wie ihre Werte von den zugrundeliegenden Kurven und vom globalen Verhalten des Integranden abhängen. Nach wie vor sei Ω ein Gebiet.

3.a. Umlaufzahl und Homologie

Unter eine „Kette“ wollen wir uns ein geometrisches Objekt vorstellen, über das man wie in Definition 1.18 integrieren kann. Nach Proposition 1.20 kommt es bei einer Kurve nicht auf die genaue Parametrisierung an, sondern nur auf die Richtung der Kurve. Wir wollen also eine rückwärts durchlaufene Kurve mit dem negativen der ursprünglichen Kurve identifizieren. Ein Kurvenstück, das n-fach durchlaufen wird, wollen wir mit dem n-fachen der ursprünglichen Kurve identifizieren. Außerdem wollen wir erlauben, dass das Definitionsintervall einer Kurve in Teilintervalle aufgespalten wird, und die gesamte Kurve mit der Summe der Teilkurven gleichsetzen. Das führt unten auf den Begriff der „Kette“.

Einer geschlossenen Kurve entspricht eine geschlossene Kette, oder auch ein „Zykel“ In diesem Fall verschwindet das Kurvenintegral über Ableitungen holomorpher Funktionen nach der Folgerung 1.21 aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Diese Eigenschaften des Kurvenintegrals haben wir bereits im Beweis des Cauchy-Integralsatzes 1.24 verwendet.

Es sei M eine Menge. Eine *formale Linearkombination* von Elementen aus M ist eine endliche Summe der Form

$$\sum_{m\in M} a_m \cdot m \qquad \text{mit } a_m \in \mathbb{Z} \text{ für alle } m \in M, \text{ so dass } a_m = 0 \text{ für fast alle } m \in M\ .$$

Formale Linearkombinationen bilden ein $\mathbb{Z}$-Modul oder auch eine abelsche Gruppe: man kann sie addieren und das negative bestimmen, dabei gelten Kommutativ- und Assoziativgesetz, und 0 ist neutrales Element. Außerdem kann man ein Element mit einer ganzen Zahl multiplizieren, indem man es entsprechend of addiert, siehe [**3**, Abs. 2.2].

3.1. Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(1) Zwei formale Linearkombinationen stückweiser C^1-Kurven in Ω heißen (*als Ketten*) *äquivalent,* wenn ihre Differenz eine Summe von Ausdrücken der Form

$$n\cdot\gamma - n \operatorname{sign}\dot\varphi \cdot (\gamma\circ\varphi) \qquad \text{beziehungsweise} \qquad n\cdot\gamma - n\cdot\gamma|_{[a,c]} - n\cdot\gamma|_{[c,b]} \tag{\dagger}$$

ist. Hierbei sei $\gamma\colon [a,b]\to\Omega$ jeweils eine stückweise C^1-Kurve, $n\in\mathbb{Z}$, $\varphi\colon [r,s]\to[a,b]$ ein Diffeomorphismus, und $c\in[a,b]$. Eine Äquivalenzklasse solcher Linearkombinationen heißt (*ganzzahlige* 1-) *Kette* in Ω. Die Menge aller ganzzahligen 1-Ketten in Ω bezeichnen wir mit $C(\Omega)$.

(2) Der Rand ∂c einer Kette

$$c = n_1\cdot\gamma_1 + \dots + n_k\cdot\gamma_k$$

mit $\gamma_i\colon [a_i,b_i]\to\Omega$ ist definiert als die formale Linearkombination

$$c = n_1\bigl([\gamma_1(b_1)] - [\gamma_1(a_1)]\bigr) + \dots + n_k\bigl([\gamma_k(b_k)] - [\gamma_k(a_k)]\bigr)$$

von Punkten aus Ω. Eine Kette heißt *geschlossen* oder kurz *Zykel,* wenn ihr Rand verschwindet. Die Menge aller (*ganzzahligen* 1-) Zykel in Ω bezeichnen wir mit $Z(\Omega)$.

Sowohl die Ketten $C(\Omega)$ als auch die Zykel $Z(\Omega)$ bilden abelsche Gruppen, siehe oben.
Hier sind sicher einige Erklärungen und Beispiele nötig.

3.2. Beispiel. (1) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine geschlossene Kurve, dann ist $[\gamma]$ eine geschlossene Kette, denn

$$\partial[\gamma] = [\gamma(b)] - [\gamma(a)] = [\gamma(a)] - [\gamma(a)] = 0 .$$

Übrigens beschreiben die eckigen Klammern hier keine Äquivalenzklassen, sondern dienen der Unterscheidung zwischen $n[z]$ und $[nz]$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \Omega$.

(2) Betrachte die Kurven γ_1, γ_2, $\gamma_3\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit

$$\gamma_1(t) = e^{2\pi i t} , \qquad \gamma_2(t) = -e^{2\pi i t} \qquad \text{und} \qquad \gamma_3(t) = -e^{-2\pi i t} .$$

Dann gilt $[\gamma_1] = [\gamma_2] = -[\gamma_3] \in C(\Omega)$.

3.3. Bemerkung. Sei $c \in C(\Omega)$ eine Kette.

(1) Der Rand ∂c hängt nicht davon ab, durch welche Linearkombination die Kette c repräsentiert wird.
(2) Äquivalent sind:
  (a) die Kette c ist geschlossen;
  (b) es gibt eine formale Linearkombination geschlossener Kurven, die c repräsentiert;
  (c) es gibt eine geschlossene Kurve γ, so dass $c = [\gamma]$.

3.4. Definition. Es sei $c = n_1[\gamma_1] + \cdots + n_k[\gamma_k] \in C(\Omega)$ eine Kette und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine nicht notwendig holomorphe Funktion, dann definieren wir

$$\int_c f(z)\,dz = n_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + n_k \int_{\gamma_k} f(z) .$$

3.5. Bemerkung. Die Definitionen 3.1 und 3.4 orientieren sich stark an den Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals.

(1) Das Integral in Definition 3.4 ändert sich nicht, wenn man eine der Kurven wie in Proposition 1.20 umparametrisiert oder eine der Kurven in zwei Teile aufspaltet wie in (†). Daher ist das Integral wohldefiniert.
(2) Es sei $b = n_1[z_1] + \cdots + n_k[z_k]$ eine formale Linearkombination von Punkten $z_1, \ldots, z_k \in \Omega$ wie in Definition 3.1 (2). Dann setzen wir

$$f(b) = n_1\, f(z_1) + \cdots + n_k\, f(z_k) \in \mathbb{C} .$$

Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt nach Folgerung 1.21, dass

$$\int_c f'(z)\,dz = f(\partial c) .$$

Für geschlossene Ketten gilt insbesondere $\int_c f'(z)\,dz = 0$.

Das werden wir hier aber nicht beweisen.

3.6. Definition. Es sei $c \in Z(\Omega)$ ein Zykel und $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dann definieren wir die *Umlaufzahl* von c als

$$n_w(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z-w} .$$

Wir nennen eine Kette c *nullhomolog* in Ω, wenn $n_w(c) = 0$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Zwei Ketten heißen *homolog,* wenn ihre Differenz nullhomolog ist. Die Menge aller zu einem gegebenen Zykel c

homologen Zykel bilden eine *Homologieklasse* in Ω, und die Menge aller Homologieklassen von Zykeln heißt die (ganzzahlige erste) *Homologie* $H(\Omega)$ von Ω.

3.7. Beispiel. Es sei $\Omega = B_2^*(0)$, $k \in \mathbb{Z}$, und $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = e^{2\pi i k t} .$$

Dann „umläuft“ der Zykel $[\gamma]$ den Punkt $0 \notin \Omega$ genau k-mal im mathematischen Drehsinn, und tatsächlich gilt

$$n_0([\gamma]) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)\,dt}{\gamma(t)-0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i k\, e^{2\pi i k t}\,dt}{e^{2\pi i k t}} = k .$$

Auf der anderen Seite umläuft γ den Punkt $2 \notin \Omega$ nicht, da er „außerhalb“ des Kreises $S_1(0)$ liegt, und tatsächlich gilt

$$n_2([\gamma]) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-2} = 0$$

nach dem Cauchy-Integralsatz 1.24, da $f(z) = \frac{1}{z-2}$ auf ganz $B_2(0)$ holomorph und γ in $B_2(0)$ nullhomotop ist.

3.8. Proposition. *Sei Ω ein Gebiet und $c \in Z(\Omega)$ ein Zykel.*

(1) *Die Umlaufzahl ist stets ganzzahlig.*
(2) *Die Umlaufzahl $n_w(c)$ ist lokalkonstant in w, das heißt, für alle $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von w_0, so dass $n_w(c) = n_{w_0}(c)$ für alle $w \in U \setminus \Omega$.*
(3) *Wenn c eine Linearkombination in Ω nullhomotoper Kurven ist, dann gilt $n_w(c) = 0$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.*

Für den Beweis benötigen wir einiges an reeller Analysis, unter anderem den Hauptsatz [**6**, Kap. 5, Satz 2.2], [**10**, Thm. 8.27] für (1) und die stetige Abhängigkeit des (eindimensionalen) Integrals vom Integranden [**7**, Kap. 7, Satz 4.1], [**10**, Thm. 8.19] für (2).

3.9. Beispiel. (1) Betrachte die Kurven γ_1, $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit

$$\gamma_1(t) = e^{2\pi i t} \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(t) = 2e^{2\pi i t} .$$

Dann sind die Ketten $[\gamma_1]$ und $[\gamma_2]$ zwar nicht gleich, aber homolog.

(2) Nach Proposition 3.8 (3) ist $[\gamma]$ nullhomolog in Ω, wenn γ eine geschlossene nullhomotope Kurve ist. In $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ gibt es geschlossene, nicht nullhomotope Kurven γ, so dass $[\gamma]$ nullhomolog ist.

3.10. Bemerkung. Anschaulich gesprochen misst die Umlaufzahl, ob ein Zykel um ein „Loch“ in Ω (eine beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ wie $\{0\}$ im Beispiel 3.7) herumläuft oder nicht. Denn nach Proposition 3.8 (2) muss w in einer beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ liegen, falls $n_w([\gamma]) \neq 0$ — ansonsten könnten wir w stetig weit genug von γ wegbewegen, ohne $n_w([\gamma])$ zu verändern, und dann $n_w([\gamma]) = 0$ zeigen.

Die erste ganzzahlige Homologie $H(\Omega)$ ist ein Quotient von $Z(\Omega)$ und selbst wieder eine abelsche Gruppe. Sie ist umso größer, je mehr Löcher Ω hat. In einer Vorlesung „Algebraische Topologie“ erfahren Sie mehr über dieses Konzept.

3.b. Der Cauchy-Integralsatz in der Umlaufzahlversion

Wir beweisen eine etwas allgemeinere Version des Cauchy-Integralsatzes 1.24.

3.11. Satz (Cauchyscher Integralsatz, Umlaufzahlversion). *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph. Sei* $c \in Z(\Omega)$ *ein nullhomologer Zykel in* Ω*, Dann gilt*

$$\int_c f(z)\,dz = 0\;.$$

Dieser Satz folgt aus der Homotopieversion 1.24 des Cauchy-Integralsatzes zusammen mit dem folgenden technischen Lemma.

3.12. Lemma (Artin). *Es sei* c *ein Zykel in* Ω*. Dann sind äquivalent:*

(1) *Der Zykel* c *ist nullhomolog.*
(2) *Der Zykel* c *lässt sich als Linearkombination nullhomotoper Kurven darstellen.*
(3) *Der Zykel* c *lässt sich durch eine nullhomotope Kurve darstellen.*

Dieses Lemma erinnert an Bemerkung 3.3 (2). Der Schritt (1) $\Rightarrow$ (2) ist hier aber wesentlich schwerer.

3.13. Bemerkung. In der algebraischen Topologie würde man einen Zykel nullhomolog nennen, wenn er sich als Linearkombination hullhomotoper Kurven schreiben lässt. Somit stellt Artin's Lemma einen Zusammenhang zwischen Definition 3.6 und der üblichen topologischen Definition her.

Übrigens hat Satz 3.11 eine einfache Umkehrung. Sei $c \in Z(\Omega)$ ein Zykel, so dass $\int_c f(z)\,d = 0$ für alle holomorphen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, dann ist c nullhomolog. Denn unter den holomorphen Funktionen auf Ω sind insbesondere die Integranden $\frac{1}{z-w}$ aus Definition 3.6 für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Somit misst die Homologie $H(\Omega)$ auch, wieviele Zykel es in Ω gibt, über die das Kurvenintegrale einer holomorphen Funktion unterschiedliche Werte annehmen kann.

Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $S_r(z)$ den durch die Kurve

$$[0,1] \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad t \mapsto z + r\,e^{2\pi i t}$$

repräsentierten Zykel. Wir benutzen das Symbol $S_r(z)$ also sowohl für die Menge der Punkte auf dem bezeichneten Kreis als auch für einen Zykel. Sofern als Menge $S_r(z) \subset \Omega$ für ein Gebiet Ω gilt, folgt natürlich $S_r(z) \in Z(\Omega)$.

3.14. Folgerung. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* $z_1, \dots, z_k \in \Omega$*, und* $r > 0$ *so klein, dass die abgeschlossenen Bälle* $\overline{B_r(z_j)}$ *für* $j \in 1, \dots, k$ *paarweise disjunkt und in* Ω *enthalten sind. Sei* $c \in Z(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$ *ein Zykel, der in* Ω *nullhomolog ist, dann ist* c *in* $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$ *homolog zum Zykel*

$$n_{z_1}(c)\,S_r(z_1) + \dots + n_{z_k}(c)\,S_r(z_k)\;.$$

Analog seien $z_1, \dots, z_k \in \Omega$ wie oben und $r_1, \dots, r_k > 0$ so klein, dass die abgeschlossenen Bälle $\overline{B_{r_j}(z_j)}$ für $j \in 1, \dots, k$ paarweise disjunkt sind. Dann finden wir $\varepsilon > 0$, so dass auch $\overline{B_{r_j+\varepsilon}(z_j)}$ für $j \in 1, \dots, k$ noch paarweise disjunkt sind. Dann ist jeder Zykel $c \in Z\bigl(\Omega \setminus (\overline{B_{r_1}(z_1)} \cup \dots \cup \overline{B_{r_j}(z_j)})\bigr)$ homolog zu

$$n_{z_1}(c)\,S_{r_1+\varepsilon}(z_1) + \dots + n_{z_k}(c)\,S_{r_k+\varepsilon}(z_k)\;.$$

3.c. Laurentreihen und das Residuum

In Definition 2.3 (2) haben wir bereits Potenzreihen mit zusätzlichen Termen mit negativem Exponenten kennengelernt, und in Beispiel 2.4 (2), (3) haben wir Potenzreihen in $\frac{1}{z}$ statt in z betrachtet. Das führt uns auf die folgende Definition. Vorher führen wir noch den *Kreisring* $A_{r,R}(w) \subset \mathbb{C}$ mit den Radien $0 \le r < R \le \infty$ ein, mit

$$A_{r,R}(w) = \bigl\{\, z \in \mathbb{C} \bigm| r < |z - w| < R \,\bigr\}\;.$$

3.15. Proposition und Definition. *Eine* (komplexe) Laurentreihe *ist ein Ausdruck der Form*

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^n\ .$$

Die Summe über $n < 0$ heißt ihr Hauptteil, *die Summe über $n \geq 0$ ihr* Nebenteil.

Es seien

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad \textit{und} \qquad R = \Bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Bigr)^{-1} \in [0,\infty]\ .$$

Dann konvergiert die Reihe $L(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $r < |z| < R$ und divergiert für alle z mit $|z| < r$ oder $|z| > R$. Für z mit $|z| = r$ oder $|z| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Wir nennen r den inneren *und R* äußeren Konvergenzradius *von $L(z)$. Falls $r < R$, nennen wir die Laurentreihe* konvergent *und $A_{r,R}(0)$ ihren* Konvergenzring*, ansonsten* divergent.

Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ wird um $z_0 \in \mathbb{C}$ durch die Laurentreihe $L(z)$ auf der Menge $U \subset \Omega \cap A_{r,R}(z_0)$ dargestellt, *wenn $f(z) = L(z - z_0)$ für alle $z \in U$. In diesem Fall ist f auf U holomorph, und f' wird durch die gliedweise abgeleitete Laurentreihe dargestellt.*

3.16. Beispiel. Die Laurententwicklung einer Funktion hängt nicht nur vom Entwicklungspunkt ab, sondern auch vom betrachteten Kreisring.

(1) Es sei $w \in \mathbb{C}^*$. Aus der Summenformel für die geometrische Reihe folgt

$$\frac{1}{z-w} = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} & \text{falls } |z| < |w|, \text{ und} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}} & \text{falls } |z| > |w|. \end{cases}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = |w|$ erhalten wir keine Reihendarstellung.

Für $|z| < |w|$ verschwindet der Hauptteil, das heißt, wir erhalten eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho = |w|$, siehe auch Satz 1.30. Somit gilt $r = 0$ und $R = \rho = |w|$.

Für $|z| > |w|$ verschwindet der Nebenteil, somit ist der äußere Konvergenzradius $R = \infty$. Für den inneren Konvergenzradius überprüfen wir, dass tatsächlich

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w|^{n+1}} = |w|\ .$$

(2) Es seien $w_0,\ w_1 \in \mathbb{C}^*$ mit $|w_0| < |w_1|$. Indem wir die obigen Darstellungen für $\frac{1}{z-w_0}$ und $\frac{1}{z-w_1}$ subtrahieren, erhalten wir drei Laurentreihen für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z-w_0} - \frac{1}{z-w_1} = \frac{w_0 - w_1}{(z-w_0)(z-w_1)}$$

auf den Gebieten $A_{0,|w_0|}(0)$, $A_{|w_0|,|w_1|}(0)$ und $A_{|w_1|,\infty}(0)$. Auf dem mittleren Gebiet sind alle Koeffizienten der Laurentreihe von Null verschieden. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = |w_0|$ oder $|z| = |w_1|$ erhalten wir keine Reihenentwicklung.

3.17. Satz (Laurent-Entwicklung). *Es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq s < S \leq \infty$, so dass $A_{s,S}(z_0) \subset \Omega$. Es sei $s < \rho < S$, dann wird f auf $A_{s,S}(z_0)$ dargestellt durch eine eindeutige Laurentreihe mit den Koeffizienten*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho(z)} (\zeta - z_0)^{-1-n} f(\zeta)\, d\zeta$$

für alle n. Für die Konvergenzradien r und R dieser Reihe gilt

$$r \leq \inf\bigl\{\, \rho \in (0,S) \bigm| A_{\rho,S}(z_0) \subset \Omega \,\bigr\}\ ,$$
$$R \geq \sup\bigl\{\, \rho \in (s,\infty) \bigm| A_{s,\rho}(z_0) \subset \Omega \,\bigr\}\ .$$

3.18. Bemerkung. Es sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ auf $A_{0,R}(z_0)$ dargestellt durch eine Laurentreihe mit innerem Konvergenzradius $r = 0$. Nach dem Satz 2.8 von Casorati-Weierstraß können wir den Typ der Singularität bei z_0 ablesen.

(1) Es gilt $a_n = 0$ für alle $n < 0$. Dann ist die Singularität bei z_0 hebbar. Falls außerdem $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$ und $a_k \neq 0$ gilt, liegt eine Nullstelle der Ordnung $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = k$ vor.
(2) Es gibt ein $k > 0$, so dass $a_n = 0$ für alle $n < -k$ und $a_{-k} \neq 0$. In diesem Fall hat f einen Pol der Ordnung k bei z_0. Also gilt $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -k$.
(3) Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq -k$, so dass $a_n \neq 0$. Da Laurententwicklungen eindeutig sind, kann f bei z_0 weder einen Pol noch eine hebbare Singularität haben. Also ist z_0 eine wesentliche Singularität von f.

Aber Achtung: hierzu muss der innere Konvergenzradius $r = 0$ sein, ansonsten kann (3) gelten, ohne dass eine wesentliche Singularität vorliegt, siehe Beispiel 3.16.

Die folgende Proposition enthält drei äquivalente Definitionen des Residuums einer Funktion auf einem Kreisring. Die Sonderrolle des Koeffizienten a_{-1} rührt daher, dass die Funktion $z \mapsto z^n$ auf $\mathbb{C}^*$ nur für $n = -1$ keine Stammfunktion besitzt.

3.19. Proposition und Definition. *Es sei $f\colon A_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dargestellt durch die Laurentreihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n .$$

Dann hängt das Residuum

$$\operatorname{Res}_{z_0,\rho}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta = a_{-1}$$

von f bei z_0 nicht von $\rho \in (r,R)$ ab. Die Funktion $f(z) - \frac{a}{z-z_0}$ besitzt genau dann eine Stammfunktion auf $A_{r,R}(z_0)$, wenn $a = \operatorname{Res}_{z_0,\rho}(f)$. Falls $r = 0$, schreiben wir kurz $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \operatorname{Res}_{z_0,\rho}(f)$ *für $\rho \in (0,R)$.*

3.20. Beispiel. In Beispiel 3.16 (2) gilt

$$\operatorname{Res}_{0,\rho}(f) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < |w_0|, \\ 1 & \text{für } |w_0| < \rho < |w_1|, \text{ und} \\ 0 & \text{für } |w_1| < \rho. \end{cases}$$

Tatsächlich finden wir eine Stammfunktion der Form $F(z) = \log \frac{z-w_0}{z-w_1} + C$ auf einem Gebiet Ω, das aus $\mathbb{C}$ durch Weglassen der Verbindungsstrecke von w_0 nach w_1 entsteht. Dabei sei log definiert auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, siehe Definition 3.29 unten, denn $\frac{z-w_0}{z-w_1}$ ist genau dann eine negative reelle Zahl, wenn z auf der Geraden zwischen w_0 und w_1 liegt.

3.21. Proposition. *Es sei $z_0 \in \Omega$ eine isolierte Singularität von $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$.*

(1) *Wenn f bei z_0 einen Pol der Ordnung $\leq k$ hat, dann gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!}\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big|_{z=z_0}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big) .$$

(2) *Wenn $f = \frac{g}{h}$, wobei g bei z_0 holomorph sei und h bei z_0 eine einfache Nullstelle habe, dann gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} .$$

3.d. Der Residuensatz und erste Anwendungen

In Abschnitt 3.b haben wir den Chauchy-Integralsatz verallgemeinert. Der Residuensatz ist eine entsprechende Verallgemeinerung der Cauchy-Integralformel 1.27.

3.22. Satz (Residuensatz). *Es sei $\omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es seien $z_1, \dots, z_k \in \Omega$ paarweise verschieden. Sei $f \colon \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $c \in Z\big(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}\big)$ ein Zykel, der in Ω nullhomolog ist. Dann gilt*

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} n_{z_j}(c) \cdot \operatorname{Res}_{z_j}(f) .$$

Falls f nur auf $\Omega \setminus A$ für eine größere abgeschlossene Teilmenge $A \subset \Omega$ definiert ist, können wir den Residuensatz auch auf diese Situation verallgemeinern. Sei beispielsweise A in einer disjunkten Vereinigung von Bällen der Form $\overline{B_{r_1}(z_1)} \cup \dots \cup \overline{B_{r_k}(z_k)}$ enthalten und $\gamma \colon [a, b] \to \Omega \setminus \big(\overline{B_{r_1}(z_1)} \cup \dots \cup \overline{B_{r_k}(z_k)}\big)$ geschlossen, dann gilt für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, dass

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} n_{z_j}(\gamma) \cdot \operatorname{Res}_{z_j, r_j+\varepsilon}(f) .$$

Der Residuensatz wird häufig benutzt, um reelle bestimmte Integrale explizit auszurechnen. Dabei verstehen wir unter einem *rationalen Ausdruck* $R(X_1, \dots, X_k)$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ in den Größen X_1, $\dots$, X_k einen Ausdruck, der nur aus X_1, $\dots$, X_k und reellen beziehungsweise komplexen Zahlen und nur durch Anwenden der vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) gebildet wurde. Ein *Polynom* $P(X_1, \dots, X_k)$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ in den Größen X_1, $\dots$, X_k ist ein rationaler Ausdruck, in dem die Division nicht benutzt wurde. Jeder rationale Ausdruck lässt sich durch geeignetes Erweitern als Quotient zweier Polynome in den gleichen Größen darstellen. Der Hauptnachteil der folgenden Rechenverfahren besteht darin, dass es nicht immer leicht ist, die Nullstellen der jeweiligen Polynome im Nenner zu bestimmen.

3.23. Folgerung. *Es sei $R(\cos x, \sin x)$ ein rationaler Ausdruck in $\cos x$ und $\sin x$, der für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Dann hat $z \mapsto R\big(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\big)$ keine Pole auf $S_1(0)$ und nur endlich viele in $B_1(0)$, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx &= \frac{1}{i} \int_{S_1(0)} R\bigg(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\bigg) \frac{dz}{z} \\ &= 2\pi \sum_{z_0 \in B_1(0)} \operatorname{Res}_{z_0}\bigg(\frac{1}{z} R\bigg(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\bigg)\bigg) .\end{aligned}$$

3.24. Beispiel. Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{1}{i} \int_{S_1(0)} \frac{dz}{az + (z^2+1)/2} .$$

Der Nenner hat Nullstellen bei $z = -a \pm \sqrt{a^2-1}$, von denen $z_0 = \sqrt{a^2-1} - a$ im Einheitskreis liegt. Mit Proposition 3.21 (2) folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = 2\pi \operatorname{Res}_{z_0} \frac{1}{az + (z^2+1)/2} = \frac{2\pi}{a + (\sqrt{a^2-1} - a)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} .$$

Im Folgenden bezeichne $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die *Riemannsche Zahlenkugel.* Es sei $K \setminus \mathbb{C}$ kompakt mit $K \subset \overline{B_R(0)}$ und $f \colon \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sagen wir, dass f eine Null-, Polstelle der Ordnung k, hebbare oder wesentliche Singularität *bei* ∞ hat, wenn die auf $B_{\frac{1}{R}}(0)$ definierte Funktion $w \mapsto f\big(\frac{1}{w}\big)$ entsprechend eine Null-, Polstelle der Ordnung k, hebbare beziehungsweise wesentliche Singularität bei $w = 0$ hat, siehe Definitionen 2.1 und 2.3.

Außerdem bezeichne $\mathbb{H} = \big\{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Im} z > 0 \,\big\}$ den *oberen Halbraum.*

3.25. Folgerung. *Es sei $R(z)$ ein rationaler Ausdruck in z, der keine Singularitäten hat für alle $z \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle der Ordnung ≥ 2 bei ∞. Dann hat $f(z)$ nur endlich viele Singularitäten in $\mathbb{H}$, und es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_{z_0} R(z) \;.$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung lassen sich diese Integrale bereits mit Mitteln der reellen Analysis ausrechnen. Mitunter ist der Umweg über den Residuensatz aber einfacher.

3.26. Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Entlang der reellen Achse ist der Arcustangens eine Stammfunktion, somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \big(\operatorname{arc\,tan}(R) - \operatorname{arc\,tan}(-R)\big) = \pi \;.$$

Die Funktion $f(z)$ hat einen Pol in $\mathbb{H}$, und zwar an der Stelle i. Mit Proposition 3.21 (2) und Folgerung 3.25 erhalten wir ebenfalls

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \;\operatorname{Res}_i \frac{1}{1+z^2} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \;.$$

Für die nächste Folgerung ist es wichtig, mit dem Riemann-Integral zu arbeiten, da die entsprechenden Lebesgue-Integrale unter Umständen divergieren. Außerdem brauchen wir hier definitiv einen reellen rationalen Ausdruck, damit wir im Laufe der Rechnung den Imaginär- beziehungsweise den Realteil nehmen können.

3.27. Folgerung. *Es sei $R(z)$ ein rationaler Ausdruck über $\mathbb{R}$ in z, der höchstens einfache Pole hat für alle $z \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle der Ordnung ≥ 1 bei ∞. Dann hat $f(z)$ nur endlich viele Singularitäten in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$.*

(1) *Wenn die reellen Polstellen von f alle in $\pi\mathbb{Z}$ liegen, gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\sin x\,dx = 2\pi \sum_{z_0 \in \mathbb{H}} \operatorname{Re}\Big(\operatorname{Res}_{z_0}\big(R(z)e^{iz}\big)\Big) + \pi \sum_{z_0 \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}\Big(\operatorname{Res}_{z_0}\big(R(z)e^{iz}\big)\Big) \;.$$

(2) *Wenn die reellen Polstellen von f alle in $\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$ liegen, gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\cos x\,dx = -2\pi \sum_{z_0 \in \mathbb{H}} \operatorname{Im}\Big(\operatorname{Res}_{z_0}\big(R(z)e^{iz}\big)\Big) - \pi \sum_{z_0 \in \mathbb{R}} \operatorname{Im}\Big(\operatorname{Res}_{z_0}\big(R(z)e^{iz}\big)\Big) \;.$$

3.28. Beispiel. Wir berechnen mit der obigen Folgerung und Proposition 3.21, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\operatorname{Re}\bigg(\operatorname{Res}_0 \frac{e^{iz}}{z}\bigg) = \frac{\pi}{2} \;.$$

3.29. Definition. Der *Hauptwert des Logarithmus* ist die auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definierte Stammfunktion der Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$, die an der Stelle 1 den Wert 0 hat, somit

$$\begin{gathered}\operatorname{Log}\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{C} \;, \\ \operatorname{Log}(z) = \log|z| + i \arg z \qquad \text{mit} \qquad \arg z \in (-\pi, \pi) \;.\end{gathered}$$

3.30. Folgerung. *Es sei $\lambda \in (0,1)$, und es sei $R(x)$ ein rationaler Ausdruck in x, der für alle reellen $x \geq 0$ wohldefiniert ist, mit einer Nullstelle der Ordnung ≥ 1 bei ∞. Dann gilt*

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\, R(x)\, dx = -\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} \sum_{z_0 \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]} \operatorname{Res}_{z_0}\Big(e^{(\lambda-1)\operatorname{Log} z}\, R(-z)\Big) .$$

3.31. Beispiel. Für $\lambda \in (0,2)$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{(1+x)^2}\, dx = \frac{\pi(1-\lambda)}{\sin(\lambda\pi)} .$$

Um allgemeinere Anwendungsmöglichkeiten für den Residuensatz erkennen zu können, ist es wichtiger, die Begründungen der obigen Formeln zu verstehen, als die Formeln selbst zu lernen. Beispielsweise brauchen wir nur, dass es im jeweiligen Gebiet in $\mathbb{C}$ nur endlich viele isolierte Singularitäten gibt, diese dürfen jedoch auch wesentlich sein. Daher können wir an manchen Stellen auch allgemeinere als nur rationale Ausdrücke zulassen.

3.e. Das Null- und Polstellen zählende Integral

Als nächste Anwendung des Residuensatzes wollen wir Kurvenintegrale benutzen, um Null- und Polstellen zu zählen.

3.32. Definition. Es sei Ω ein Gebiet. Eine Funktion f heißt *holomorph auf Ω bis auf isolierte Singularitäten,* wenn es eine diskrete Teilmenge $A \subset \Omega$ gibt, so dass f auf $\Omega \setminus A$ holomorph ist. Wir nennen f *meromorph auf Ω,* wenn f an allen Stellen $z_0 \in A$ höchstens Pole besitzt. In diesem Fall fassen wir f als Abbildung $f\colon \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ auf mit $f(w) = \infty \iff \operatorname{ord}_w(f) < 0$. Eine Abbildung $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ heißt meromorph, wenn die Funktionen $z \mapsto f(z)$ und $w \mapsto f\big(\frac{1}{w}\big)$ auf $\mathbb{C}$ meromorph sind.

Eine Funktion ist also meromorph, wenn sie höchstens isolierte Singularitäten und keine wesentlichen Singularitäten besitzt. Man beachte, dass die Zuordnung $f(w) = \infty$ nach dem Satz 2.8 von Casorati-Weierstraß nur sinnvoll ist, wenn f bei w einen Pol hat. Wir sagen kurz, dass f *bei w meromorph* ist, wenn das in einer kleinen Umgebung von w gilt.

3.33. Bemerkung. Es sei Ω ein Gebiet oder $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$. Dann bilden die meromorphen Funktionen auf Ω einen Körper, den wir mit $\mathfrak{M}(\Omega)$ bezeichnen wollen.

Sei f bei w meromorph und habe eine Darstellung

$$f(z) = (z-w)^{\operatorname{ord}_w(f)} g(z)$$

mit $g(w) \in \mathbb{C}^*$. Wir betrachten die sogenannte *logarithmische Ableitung*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\operatorname{ord}_w(f)}{z-w} + \frac{g'(z)}{g(z)} ,$$

dann gilt offensichtlich $\operatorname{Res}_w \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_w(f)$.

3.34. Satz (vom Null- und Polstellen zählenden Integral). *Es sei Ω ein Gebiet, $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$ meromorph, und c ein nullhomologer Zykel in Ω, der die Null- und Polstellen von f nicht trifft. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{z \in \Omega} n_z(c) \cdot \operatorname{ord}_z(f) .$$

3.35. Bemerkung (Argumentprinzip). Das Null- und Polstellenintegral hat auch eine geometrische Interpretation. Dazu betrachten wir die Kurve $f \circ \gamma$ in $\mathbb{C}^*$ und berechnen

$$n_0(f \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \; .$$

3.36. Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $c \in Z(\mathbb{C})$ ein Zykel. Wir sagen, dass c den *Rand* $\partial\Omega$ von Ω darstellt oder auch Ω *berandet,* wenn es eine Darstellung $c = n_1[\gamma_1] + \cdots + n_k[\gamma_k]$ gibt mit $\gamma_j(t) \in \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ für alle j und alle t im Definitionsbereich von γ_j, und wenn

$$n_w(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 1 & \text{für alle } w \in \Omega, \text{ und} \\ 0 & \text{für alle } w \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

3.37. Beispiel. Es sei $0 < r < R$.

(1) Der Zykel $S_r(z_0)$ berandet $B_r(z_0)$.
(2) Der Zykel $S_R(z_0) - S_r(z_0)$ berandet $A_{r,R}(z_0)$.
(3) Manche Zykel beranden kein Gebiet, zum Beispiel $2\, S_1(z_0)$, $S_1(0)+S_1(3)$ oder die Figur „8“.
(4) Wenn Ω nicht beschränkt ist oder sich der Rand $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ nicht durch eine stückweise glatte Kurve darstellen lässt, dann gibt es keinen Zykel, der Ω berandet.

3.38. Bemerkung. Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, und c ein Zykel, der Ω berandet. Dann ist c als Zykel nach unser Definition 3.1 nicht eindeutig durch $\partial\Omega$ bestimmt — man kann die Kurven, die c beschreiben, monoton und glatt, aber nicht differenzierbar umkehrbar umparametrisieren. Das Kurvenintegral längs c ändert sich dadurch aber nicht, wie man am Beweis von Proposition 1.20 erkennen kann. Für eine Funktion f, die auf Ω bis auf isolierte Singularitäten holomorph und am Rand stetig ist, können wir das Kurvenintegral definieren und mit dem Residuensatz ausrechnen:

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = \int_c f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in \Omega} \operatorname{Res}_z(f) \; .$$

3.39. Bemerkung. Wir sagen, dass f den Wert w an der Stelle z von der Ordnung k annimmt, wenn $\operatorname{ord}_z(f-w) = k$ gilt, vergleiche Satz 2.23 von der Blätterzahl. Wir definieren

$$N(f,\Omega,w) = \sum_{z \in f^{-1}(w)} \operatorname{ord}_z(f-w) \qquad \text{und} \qquad N(f,\Omega,\infty) = \sum_{z \in f^{-1}(\infty)} \big(-\operatorname{ord}_z(f)\big) \; ,$$

und sagen, dass f in Ω den Wert w genau $N(f,\Omega,w)$-mal annimmt. Es beschreibe $[\gamma]$ den Rand von Ω. Dann gilt nach Satz 3.34 und wie in Bemerkung 3.35 also gerade

$$N(f,\Omega,w) - N(f,\Omega,\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\, dz = n_w(f \circ \gamma) \; .$$

3.40. Folgerung. *Es sei $f \in \mathfrak{M}(\hat{\mathbb{C}})$ nicht konstant, dann nimmt f alle Werte $w \in \hat{\mathbb{C}}$ gleich oft an.*

Hieraus ergibt sich sofort ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes 2.17 der Algebra.

3.41. Folgerung (Satz von Rouché). *Es seien f und g in einer Umgebung von $\bar{\Omega}$ holomorph, und es sei c ein Zykel, der Ω berandet. Wenn $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$, dann haben f und $f+g$ gleich viele Nullstellen in Ω.*

3.f. Holomorpher Funktionalkalkül

In diesem Abschnitt benutzen wir den Residuensatz, um holomorphe Funktionen auf Operatoren anzuwenden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf Matrizen.

3.42. Definition. Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$, dann bezeichne $\operatorname{spec}(A) \subset \mathbb{C}$ die Menge der Eigenwerte von A. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}(A)$ definieren wir die *Resolvente* von A als

$$R(A, z) = (zE_n - A)^{-1} \in M_n(\mathbb{C}) .$$

In der Funktionalanalysis geht man umgekehrt vor: eine Zahl z gehört genau dann zum Spektrum $\operatorname{spec}(A)$, wenn $z \operatorname{id} - A$ nicht invertierbar ist.

Sei jetzt $f\colon B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Wenn $\operatorname{spec}(A) \subset B_R(0)$, dann definieren wir

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n .$$

Nach dem Satz über die Jordan-Normalform reicht es, einen einzelnen Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ zu betrachten. In den Übungen haben wir Konvergenz überprüft und gesehen, dass

$$f\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & \ddots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & & & & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{pmatrix} .$$

Wenn $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist mit $\operatorname{spec} A \subset \Omega$, können wir genausogut f um λ herum in eine Potenzreihe entwickeln und erhalten die gleiche Formel.

3.43. Folgerung (aus dem Residuensatz 3.22). *Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $\operatorname{spec}(A) \subset \Omega$ und c ein Zykel in $\Omega \setminus \operatorname{spec}(A)$, der in Ω nullhomolog ist, so dass $n_\lambda(c) = 1$ für alle $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$. Dann gilt*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_c R(A, z)\, f(z)\, dz .$$

Wir können also die Matrix $f(A)$ auch mit *holomorphem Funktionalkalkül,* — das heißt, durch die rechte Seite der obigen Gleichung — definieren.

3.44. Beispiel. Wir stellen Funktionen $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ dar als Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Der „Laplace-Operator“ $\Delta(f) = -f''$ auf diesen Funktionen hat das Spektrum $\operatorname{spec}(\{\, n^2 \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ mit Eigenfunktionen $f_n(\varphi) = e^{in\varphi}$ zum Eigenwert n^2 für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir können Δ also als unendlich große Diagonalmatrix mit Einträgen darstellen. Wenn wir die Exponentialreihe auf $-t\Delta$ für $t > 0$ anwenden, konvergiert sie auf jedem endlichen diagonalen $k \times k$-Block, und als Ergebnis erhalten wir eine unendlich große Diagonalmatrix mit Einträgen e^{-tn^2}. Da aber jedes Taylorpolynom der Exponentialreihe für $n \to \infty$ unbeschränkt ist, erhalten wir keine gleichmäßige Konvergenz.

Dieses Problem können wir auch analytisch verstehen. Der Laplace-Operator macht aus k-fach differenzierbaren Funktionen $(k-2)$-fach differenzierbare Funktionen, „verschlechtert“ also die Funktion. In einer Potenzreihe stehen also Terme, die die Differenzierbarkeit der Funktionen beliebig verschlechtern. Das macht es schwierig, Eigenschaften des Operators $\exp(-t\Delta)$ zu verstehen. In der Physik beschreibt die Funktion $\exp(-t\Delta)f$ übrigens die Wärme auf dem Kreis zur Zeit t, wenn zur Zeit 0 die Anfangswärmeverteilung f vorlag. Insbesondere erwarten wir, dass die Funktion $\exp(-t\Delta)f$ „glatter“ ist als die Funktion f und für $t \to \infty$ gegen eine konstante Funktion konvergiert.

Wir betrachten jetzt eine Familie von rechteckigen Kontouren γ_n für $n \geq 1$ mit den Ecken $-1 \pm i$ und $n^2 + 1 \pm i$. Da γ_n von allen Eigenwerten von Δ mindestens den Abstand 1 hat, ist die Operatornorm von $R(\Delta, z)$ durch 1 beschränkt. Da $\left|e^{-tz}\right| = e^{-t \operatorname{Re} z}$, erhalten wir gleichmäßige Konvergenz in

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} R(\Delta, z)\, e^{-tz}\, dz = \exp(-t\Delta)\ .$$

Dieses Verhalten ist typisch für elliptische Differentialoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Das Integral über γ_n berechnet übrigens die Einschränkung des Operators $\exp(-t\Delta)$ auf die Summe der Eigenräume zu den Eigenwerten $0, \ldots, n^2$. Man kann also den holomorphen Funktionalkalkül auch benutzen, um Operatoren auf Summen ausgewählter Eigenräume einzuschränken — mit Potenzreihen wäre das nicht so leicht möglich.

Im Gegensatz zum Operator selbst macht die Resolvente aus einer k-fach differenzierbaren Funktion eine $(k+2)$-fach differenzierbare Funktion, „verbessert“ die Funktion also. Da die Kontour γ_n geschlossen ist, liefert partielle Integration im Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_n} R(\Delta, z)\, e^{-tz}\, dz = -\frac{1}{t} \int_{\gamma_n} R(\Delta, z)^2\, e^{-tz}\, dz = \cdots = \frac{k!}{(-t)^k} \int_{\gamma_n} R(\Delta, z)^{k+1}\, e^{-tz}\, dz\ .$$

Diese Überlegung zeigt, dass der Operator $\exp(-t\Delta)$ die Differenzierbarkeit beliebig verbessert, und zwar umso mehr, je größer t ist.

Der Hauptunterschied zwischen Potenzreihendarstellung und holomorphem Funktionalkalkül ist Folgender. Beim Potenzreihenansatz betrachten wir von Anfang an alle Eigenräume, wodurch die einzelnen Summanden der Potenzreihe nicht beschränkt werden können. Wenn wir Eigenraum für Eigenraum die Potenzreihe betrachten könnten, erhielten wir aber Konvergenz gegen e^{-tn^2} auf dem Eigenraum zum Eigenwert n^2. Beim holomorphen Funktionalkalkül betrachten wir von vornherein die volle Funktion e^{-tz} auf einzelnen Eigenräumen und nehmen dann der Reihe nach immer mehr Eigenräume hinzu. Da e^{-tn^2} für große n immer kleiner wird, erhalten wir gleichmäßige Konvergenz und können sogar manche Eigenschaften des Grenzoperators $\exp(-t\Delta)$ nachweisen.

KAPITEL 4

Der Riemannsche Abbildungssatz

Wenn es eine biholomorphe Abbildung $F\colon \Omega \to U \subset \mathbb{C}$ zwischen zwei Gebieten gibt, dann haben diese Gebiete aus der Sicht der Funktionentheorie die gleichen Eigenschaften. Wir wollen zeigen, dass alle einfach zusammenhängenden Gebiete in $\mathbb{C}$ zueinander biholomorph sind, mit Ausnahme von $\mathbb{C}$ selbst.

4.a. Der Riemannsche Abbildungssatz als Maximierungsproblem

4.1. Satz (Riemannscher Abbildungssatz). *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ lässt sich biholomorph auf $B_1(0)$ abbilden.*

Man sieht leicht, dass Bilder einfach zusammenhängender Gebiete unter biholomorphen Abbildungen wieder einfach zusammenhängend sind.

4.2. Bemerkung. Es gibt keine biholomorphe Abbildung $\mathbb{C} \to B_1(0)$, denn nach dem Satz 2.16 von Liouville ist jede holomorphe Abbildung $\mathbb{C} \to B_1(0)$ konstant.

4.3. Folgerung (aus Folgerung 2.15 zum Schwarz-Lemma). *Es sei $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $w \in S_1(0)$. Dann existiert genau eine biholomorphe Abbildung $f\colon \Omega \to B_1(0)$ mit*

$$f(z_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f'(z_0) = w\,\bigl|f'(z_0)\bigr| \;.$$

4.4. Bemerkung. Die folgende Aussage werden wir mehrfach benutzen: Sei f eine Funktion ohne Nullstellen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω. Dann besitzt f einen Logarithmus und eine Quadratwurzel auf ganz Ω.

4.5. Proposition. *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ lässt sich biholomorph auf eine Teilmenge von $B_1(0)$ abbilden, die den Nullpunkt enthält.*

4.6. Beispiel. Wir betrachten $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Auf Ω ist durch $z \mapsto \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$ eine Wurzel mit Werten in $(0,\infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definiert. Folglich erhalten wir eine bihomolorphe Abbildung

$$f\colon \Omega \to B_1(0) \qquad \text{mit} \qquad f(z) = \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}\;.$$

4.7. Proposition. *Es sei $\Omega \subsetneqq B_1(0)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine injektive Funktion $f\colon \Omega \to B_1(0)$ mit $f(0) = 0$ und $|f'(0)| > 1$.*

Beachte: falls $\Omega = B_1(0)$, widerspricht das dem Schwarz-Lemma 2.12. Für den Beweis benutzen wir insbesondere auch Folgerung 2.15.

4.8. Folgerung. *Es sei $\Omega \subsetneqq B_1(0)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und für eine biholomorphe Abbildung $F\colon \Omega \to \operatorname{im} F \subset B_1(0)$ gelte $F(0) = 0$ und $|F'(0)| \geq |f'(0)|$ für alle biholomorphen $f\colon \Omega \to \operatorname{im} f \subset B_1(0)$ mit $f(0) = 0$. Dann ist F surjektiv auf $B_1(0)$, also biholomorph.*

Für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes 4.1 reicht es also, eine holomorphe Abbildung $f\colon \Omega \to B_1(0)$ mit $f(0)$ zu finden, für die $|f'(0)|$ das Supremum annimmt.

4.b. Folgen holomorpher Funktionen

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir eine im Sinne von Folgerung 4.8 maximale Funktion finden. Dazu müssen wir für eine Folge holomorpher Funktionen zeigen, dass sie eine Grenzfunktion besitzt, und dann Eigenschaften der Grenzfunktion verstehen. Im Hinblick auf das nächste Kapitel gehen wir etwas allgemeiner vor, als wir es hier brauchen.

Es seien $\Omega_n \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f_n \colon \Omega_n \to \mathbb{C}$ holomorph für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen analysieren, unter welchen Bedingungen eine Grenzfunktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ existiert, die wieder holomorph ist. Damit wir überhaupt Grenzwerte bilden und vernünftig analysieren können, setzen wir

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \text{es gibt } r > 0 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } B_r(z) \subset \Omega_n \text{ für alle } n \geq n_0 \right\} .$$

Damit ist Ω insbesondere offen. Außerdem gibt dann auch für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ ein n_0, so dass $K \subset \Omega_n$ für alle $n \geq n_0$.

Wir wollen für den Rest dieses Abschnitts auch annehmen, dass Ω zusammenhängend ist, andernfalls gehen wir zu einer zusammenhängenden Teilmenge über.

4.9. Definition. Eine Folge $f_n \colon \Omega_n \to \mathbb{C}$ von Funktionen *konvergiert kompakt* gegen eine Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, wenn für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ die Folge $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert.

4.10. Satz (Konvergenz-, Weierstraß). *Eine Folge $f_n \colon \Omega_n \to \mathbb{C}$ holomorpher Funktionen konvergiere kompakt gegen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$. Dann ist auch f holomorph. Außerdem konvergieren auch die Ableitungen f_n' kompakt gegen f'.*

Somit konvergieren induktiv auch alle höheren Ableitungen kompakt. Dieser Satz verallgemeinert also die bekannten Sätze über Potenz- und Laurentreihen. Außerdem kann man die „Blätterzahl“ der Grenzfunktion abschätzen.

4.11. Satz (Hurwitz). *Eine Folge $f_n \colon \Omega_n \to \mathbb{C}$ holomorpher Funktionen konvergiere kompakt gegen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$. Falls $N(f_n, \Omega_n, w) \leq k$ für alle $n \geq n_0$, dann ist f entweder konstant, oder es gilt $N(f, \Omega, w) \leq k$.*

4.12. Proposition. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subset \Omega$ ein Kompaktum, sowie C, $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle holomorphen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $|f| \leq C$ auf ganz Ω und alle z, $w \in K$ gilt:*

$$|z - w| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(w)| < \varepsilon .$$

Im Sinne der Analysis würde man sagen: jede auf Ω beschränkte Menge holomorpher Funktionen ist auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ gleichgradig stetig.

4.13. Definition. Eine Folge $f_n \colon \Omega_n \to \mathbb{C}$ von Funktionen heißt *lokal gleichmäßig beschränkt,* wenn es zu jedem $z \in \Omega$ wie oben eine Umgebung $U \subset \Omega$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine Konstante C gibt, so dass $|f_n(w)| \leq C$ für alle $n \geq n_0$ und alle $w \in U$.

4.14. Satz (Montel). *Es sei $f_n \colon \Omega_n \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen und Ω wie oben. Dann existiert eine auf Ω kompakt konvergente Teilfolge.*

Mit diesen Überlegungen können wir den Riemannschen Abbildungssatzes 4.1 beweisen.

KAPITEL 5

Konstruktion Holomorpher und Meromorpher Funktion

Wir haben jetzt viele Werkzeuge, um holomorphe Funktionen zu behandeln, kennen aber nur Beispiele, die auf wohlbekannte Funktionen aus der Analysis zurückgehen. Das soll sich jetzt ändern. Dabei lernen wir anhand von Beispielen auch wichtige Techniken kennen.

5.a. Der Satz von Mittag-Leffler

In diesem Abschnitt geben wir uns Hauptteile isolierter Singularitäten vor, und versuchen dann, eine dazu passende Funktion zu finden.

5.1. Definition. Es seien $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ Funktionen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *konvergiert normal* auf Ω, wenn es zu jedem $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und eine konvergente Reihe $C = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$ reeller Zahlen gibt, so dass $|f_n(z)| < C_n$ für alle $z \in U$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

5.2. Folgerung (aus dem Satz 4.10 von Weierstraß). *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine normal konvergente Reihe holomorpher Funktionen auf Ω. Dann konvergiert die Folge der Partialsummen $\sum_{n=0}^{N} f_n$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, und die Ableitungen von f ergeben sich aus den Reihen der Ableitungen der f_n.*

Ein klassisches Beispiel sind natürlich Potenzreihen, siehe Abschnitt 1.a.

5.3. Beispiel. Auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ gilt die *Partialbruchzerlegung*

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - \pi n)^2} \;.$$

Auswerten an der Stelle $z = \frac{\pi}{2}$ liefert

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Weitere ähnliche Identitäten erhalten Sie in den Übungen durch Ableiten.

5.4. Satz (Mittag-Leffler). *Es sei $A \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Menge von Punkten. Für alle $a \in A$ sei $f_a \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f_a(0) = 0$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$, so dass für alle $a \in A$ die Funktion*

$$z \mapsto f(z) - f_a\left(\frac{1}{z - a}\right)$$

bei a eine hebbare Singularität hat.

Mit anderen Worten existiert eine Funktion f, die genau an den Stellen $a \in A$ Singularitäten hat. Sei

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

die Potenzreihenentwicklung von f_a bei 0, dann ist $b_0 = 0$, und f hat bei $z = a$ den Hauptteil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} \;.$$

In Wirklichkeit kann man anstelle von $\mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet Ω wählen. Dadurch wird der Beweis aber deutlich schwerer.

5.5. Beispiel. Die folgenden Reihen konvergieren normal.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-\pi n} + \frac{1}{\pi n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2} = f(z) \;.$$

Ableiten liefert (bis auf das Vorzeichen) die Reihe aus Beispiel 5.3. Da überdies die dargestellte Funktion f ungerade ist, also $f(-z) = -f(z)$ gilt, erhalten wir oben die Partialbruchzerlegung des Cotangens $f(z) = \cot z$.

5.b. Die Γ-Funktion

Die Γ-Funktion interpoliert die Fakultät, siehe [**2**, Kapitel IV.1].

5.6. Definition. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ definieren wir die Γ-Funktion durch

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt \;.$$

5.7. Satz. *Die* Γ*-Funktion besitzt eine eindeutig meromorphe Fortsetzung auf ganz* $\mathbb{C}$ *mit einfachen Polen an den Stellen* $-n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*. Für alle* $z \notin -\mathbb{N}_0$ *gilt die* Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \;.$$

Für alle $0 \neq n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Der Hauptteil des Pols bei $-n$ lässt sich demnach berechnen als $\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$. Der Satz 5.4 von Mittag-Leffler liefert hier allerdings nicht die gesamte Γ-Funktion.

5.8. Folgerung (Zerlegung nach Prym). *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt \;.$$

5.9. Satz (Charakterisierung nach Wielandt). *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet mit* $[1,2) \times \mathbb{R} \subset \Omega$*. Es sei* $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion, die auf* $[1,2) \times \mathbb{R}$ *beschränkt ist, so dass*

$$f(z+1) = z\, f(z) \qquad \text{für alle } z \in \Omega \text{ mit } z+1 \in \Omega \;.$$

Dann gilt $f = f(1)\,\Gamma$ *auf ganz* Ω.

5.10. Satz (Ergänzungs-, Euler). *Für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \;.$$

5.11. Bemerkung. Aus dem obigen Satz folgt insbesondere $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$. Üblicherweise zeigt man das, indem man eine unnormierte Gauß-Verteilung auf $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten integriert, siehe [**4**, Beispiel 4.5 sowie Abschnitt 5]:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \bigg(\int_0^{\infty} e^{-t}\, \frac{dt}{\sqrt{t}}\bigg)^2 = \bigg(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, 2dx\bigg)^2 = \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\bigg)^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = \pi \;.$$

5.c. Der Produktsatz von Weierstraß

Wir betrachten unendliche Produkte und suchen Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen.

5.12. Beispiel. Es gilt

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) .$$

Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ liefert

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6}\right) \cdots .$$

5.13. Proposition. *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Falls $1 + z_n \neq 0$ für alle n, konvergiert die Folge*

$$\left(\prod_{n=1}^{N} (1 + z_n)\right)_N \tag{1}$$

der Partialprodukte genau dann gegen eine Zahl $z \in \mathbb{C}^*$, wenn die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + z_n) . \tag{2}$$

Die Reihe (2) *konvergiert genau dann absolut, wenn die folgende Reihe absolut konvergiert:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n . \tag{3}$$

5.14. Definition. Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann *konvergiert* das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$$

genau dann *absolut,* wenn die folgende Reihe absolut konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

5.15. Bemerkung. Dieser Begriff ist etwas gewöhnungsbedürftig.

(1) Das Produkt aus Beispiel 5.12 konvergiert für alle z absolut, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{\pi^2 n^2}$$

für alle z absolut konvergiert.

(2) Ein absolut konvergentes Produkt konvergiert genau dann gegen 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

(3) Das folgende Produkt konvergiert nicht absolut in unserem Sinne, obwohl (in Wirklichkeit: weil) die Folge der Partialprodukte gegen 0 konvergiert:

$$0 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{n}{n+1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) ,$$

und wir wissen, dass die harmonische Reihe divergiert.

5.16. Definition. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen. Dann *konvergiert* das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$$

normal, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

normal konvergiert.

5.17. Folgerung. *Es sei $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ ein normal konvergentes Produkt holomorpher Funktionen auf Ω. Dann konvergiert die Folge*

$$\left(\prod_{n=1}^{N}(1+f_n)\right)_N$$

kompakt gegen eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega\to\mathbb{C}$. Es gilt $f(z)=0$ genau dann, wenn $1+f_n(z)=0$ für ein n, und

$$f' = f\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'}{1+f_n}\;.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)\;.$$

5.18. Satz (Produkt-, Weierstraß). *Es sei $A\subset\mathbb{C}$ eine diskrete Menge von Punkten. Für alle $a\in A$ sei $n_a\in\mathbb{N}$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, die genau an den Punkten $a\in A$ Nullstellen hat mit $\operatorname{ord}_a f=n_a$.*

5.19. Definition. Eine *ganze Funktion* ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

5.20. Folgerung. *Jede meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist Quotient zweier ganzer Funktionen.*

5.21. Folgerung (Anschmiegungssatz, Mittag-Leffler). *Es sei $A\subset\mathbb{C}$ diskret. Für alle $a\in A$ sei $f_a\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ holomorph mit höchstens einem Pol der Ordnung $n_a\geq 0$ an der Stelle 0. Dann existiert eine Funktion $f\colon\mathbb{C}\setminus A\to\mathbb{C}$, so dass für alle $a\in A$ eine holomorphe Funktion g_a auf einer Umgebung U_a von a existiert mit*

$$f(z)=f_a\left(\frac{1}{z-a}\right)+(z-a)^{n_a+1}g_a(z)\qquad\text{für alle } z\in U_a\;.$$

5.22. Satz (Produktentwicklung, Gauß). *Es sei*

$$\gamma=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right)=0,5772\dots$$

die Euler-Mascheroni-Konstante, dann gilt

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-z}}{n!}\,z(z+1)\cdots(z+n)\;.$$

5.23. Folgerung. *Die Gamma-Funktion hat keine Nullstellen.*

5.24. Folgerung. *Es gilt $\Gamma'(1)=-\gamma$.*

5.25. Bemerkung. Mit Satz 5.10 erhalten wir eine neue Herleitung der Produktdarstellung des Sinus aus Beispiel 5.12.

5.d. Die Riemannsche ζ-Funktion

Die ζ-Funktion spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie. Wir folgen [**1**, Kapitel 5.4].

5.26. Definition. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ definieren wir die *Riemannsche zeta-Funktion* durch

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \ .$$

Die Werte $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ und $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ kennen wir aus den Übungen. Weitere ζ-Werte berechnen wir später.

5.27. Satz (Eulerprodukt). *Es sei $\mathfrak{P} \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$, dass*

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathfrak{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}} \ .$$

Insbesondere gilt $\zeta(z) \neq 0$ für alle z mit $\operatorname{Re} z > 1$.

Die Mellin-Transformation liefert eine Integraldarstellung.

5.28. Proposition. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt*

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, dt \ .$$

Es sei $r > 0$ klein. Im Folgenden bezeichne C_r die Kontour in $\mathbb{C}$, bestehend aus zwei Halbgeraden parallel zur positiven reellen Achse mit Imaginärteil $\pm r$ und einem passenden Halbkreis um 0 vom Radius r. Dabei trage der Halbkreis die positive Orientierung. Für alle $t \in C_r$ definieren wir

$$(-t)^w = e^{w \operatorname{Log}(-t)} \ .$$

5.29. Satz. *Es gibt eine eindeutige holomorphe Fortsetzung der Riemannschen zeta-Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, so dass für $z \notin \mathbb{N}$ gilt*

$$\zeta(z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{(-t)^{z-1}}{e^t - 1} \, dt \ .$$

Bei $z = 1$ liegt ein Pol der Ordnung 1 mit Residuum 1 vor.

5.30. Definition. Die *Bernoulli-Zahlen* $B_k \in \mathbb{Q}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, sind definiert durch die Potenzreihen-Entwicklung

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \, z^k \ .$$

Hier gibt es verschiedene Konventionen. Wir folgen [**2**, III, §2]; [**1**, 5.4.2] verwendet eine andere Notation. Bernoulli-Zahlen spielen eine große Rolle in einigen Gebieten der Mathematik, unter anderem in Zahlentheorie und Topologie. Es gilt $B_k = 0$ für alle ungeraden $k \neq 1$, siehe Übungen.

5.31. Beispiel. Die ersten Bernoulli-Zahlen sind

$$B_0 = 1 \ , \quad B_1 = -\frac{1}{2} \ , \quad B_2 = \frac{1}{6} \ , \quad B_3 = 0 \ , \quad B_4 = -\frac{1}{30} \ , \quad B_5 = 0 \ , \quad B_6 = \frac{1}{42} \ \dots$$

Entgegen dem ersten Anschein konvergiert die Folge B_{2n} nicht gegen 0, sondern gegen ∞ — das liegt an den Polen der Funktion $\frac{z}{e^z-1}$ bei $2\pi i n$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

5.32. Folgerung. *Es gilt $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ gilt $\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$ und $\zeta(-2n) = 0$.*

5.33. Beispiel. Mit den Werten aus Beispiel 5.31 erhalten wir

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}\;, \qquad \zeta(-3) = \frac{1}{120}\;, \qquad \zeta(-5) = -\frac{1}{252}\;\dots$$

5.34. Satz (Funktionalgleichung). *Die Riemannsche ζ-Funktion erfüllt die* Funktionalgleichung

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z)\zeta(1-z)\;,$$

oder äquivalent

$$\pi^{\frac{z-1}{2}}\,\Gamma\Big(\frac{1-z}{2}\Big)\,\zeta(1-z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\,\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\,\zeta(z)\;.$$

5.35. Beispiel. Aus der Funktionalgleichung erhält man sofort einen Zusammenhang zwischen den Werten $\zeta(1-2n)$ aus Beispiel 5.33 und den Werten für $\zeta(2n)$ aus den Übungen:

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n}\pi^{-2n} \sin\frac{\pi - 2\pi n}{2} \Gamma(2n)\zeta(2n) = 2^{1-2n}\pi^{-2n}(-1)^n(2n-1)!\zeta(2n)\;,$$

mithin

$$\zeta(2n) = (-1)^n (2\pi)^{2n}\,\frac{\zeta(1-2n)}{2(2n-1)!} = -(-1)^n(2\pi)^{2n}\frac{B_{2n}}{2(2n)!}$$

und damit insbesondere

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\;, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\;, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\;\dots$$

An den ungeraden natürlichen Zahlen $n > 1$ lässt sich $\zeta(n)$ nicht leicht ausrechnen. Vermutet wird, dass diese Werte alle irrational sind, und auch keine rationalen Vielfachen von π^n.

5.36. Folgerung. *Die Riemannsche ζ-Funktion hat einfache Nullstellen an allen negativen geraden ganzen Zahlen. Alle anderen Nullstellen der ζ-Funktion liegen im Vertikalstreifen $[0,1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, und mit $z \in [0,1] \times \mathbb{R}$ sind auch $\bar z$, $1-z$ und $1-\bar z$ Nullstellen.*

Die Nullstellen bei $-2n$ heißen auch *triviale Nullstellen* der ζ-Funktion. Die nichttrivialen Nullstellen liegen in Wirklichkeit sogar im offenen Streifen $(0,1) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Für die Anzahl $N(T)$ der nicht-trivialen Nullstellen mit Imaginärteil in $[0,T]$ lässt sich mit Satz 3.34 zeigen, dass

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)\;.$$

5.37. Bemerkung. Die *Riemannsche ξ-Funktion*

$$\xi(z) = \frac{z(1-z)}{2}\,\pi^{-\frac{z}{2}}\,\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\,\zeta(z)$$

ist ganz und erfüllt $\xi(z) = \xi(1-z)$. Sie hat im Vertikalstreifen $[0,1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ die gleichen Nullstellen wie die ζ-Funktion und sonst keine.

Die Bedeutung der Riemannschen ζ-Funktion ergibt sich aus einem Zusammenhang mit der Verteilung der Primzahlen innerhalb der natürlichen Zahlen.

5.38. Definition. Wir definieren die Funktionen $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, die *Mangoldt-Funktion* $\Lambda\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und die *zweite Tschebyscheff-Funktion* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \#\{\, p \in \mathfrak{P} \bigm| p \le x \,\}\;,\\
\Lambda(n) &= \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^k \text{ mit } 0 \ne k \in \mathbb{N},\ p \in \mathfrak{P}\;,\\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}\\
\psi(x) &= \sum_{n \le x} \Lambda(n)\;.
\end{aligned}$$

5.39. Proposition. *Für $0 < q < 1$ gilt*

$$\psi(x) \le \pi(x) \log x \le \frac{\psi(x)}{q} + x^q \log x \;, \tag{1}$$

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-z} \;. \tag{2}$$

Dieses sind die ersten Schritte eines Beweises des folgenden Primzahlsatzes.

5.40. Satz (Hadamard, de la Vallée-Poussin). *Für $x \to \infty$ gilt*

$$\psi(x) = x + o(x) \;. \tag{1}$$

Äquivalent dazu gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1 \;. \tag{2}$$

Dieser Satz lässt sich verbessern, beispielsweise indem man eine bessere Restgliedabschätzung in (1) angibt. In diesem Zusammenhang spielen die Nullstellen der ζ-Funktion eine wichtige Rolle.

5.41. Satz (Riemann). *Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x > 1$ gilt*

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho\in\zeta^{-1}(0)} \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi \;.$$

Der Beitrag der trivialen Nullstellen lässt sich für $x > 1$ mit der Logarithmus-Reihe ausrechnen:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-2k}}{-2k} = -\frac{1}{2} \log\bigl(1 - x^{-2}\bigr) \;.$$

5.42. Vermutung (Riemannsche Vermutung). *Für alle nichttrivialen Nullstellen z der Riemannschen ζ-Funktion gilt* $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

Man weiß, dass unendlich viele nicht-triviale Nullstellen Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Asymptotisch gilt das für mindestens $\frac{2}{5}$ aller nicht-trivialen Nullstellen. Numerisch bestätigt ist, dass die ersten 10 Billionen Nullstellen Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Aber das ist natürlich kein Beweis der Riemannschen Vermutung.

5.43. Satz (v. Koch, Schoenfeld). *Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zu*

$$\left|\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}\right| < \frac{\sqrt{x}\, \log x}{8\pi} \qquad \text{für } x \ge 2657 \;, \tag{1}$$

$$|\psi(x) - x| < \frac{\sqrt{x}\, (\log x)^2}{8\pi} \qquad \text{für } x \ge 73{,}2 \;. \tag{2}$$

Littlewood hat bewiesen, dass der Ausdruck $\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ in (1) unendlich oft das Vorzeichen wechselt. Nach Lehmann tritt der erste Vorzeichenwechsel an einer Stelle x zwischen $1{,}53 \cdot 10^{1165}$ und $1{,}65 \cdot 10^{1165}$ auf. Dass diese Zahl sehr groß ist, zeigt, dass man in der analytischen Zahlentheorie nicht einfach von numerischer Evidenz auf einen allgemeinen Sachverhalt schließen darf.

Literatur

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis,* third ed., McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1,* Springer, Berlin, 1993.

[3] S. Goette, *Lineare Algebra I-II,* `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/LA.pdf`

[4] S. Goette, *Mehrfachintegrale,* `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/MFI.pdf`

[5] K. Jänich, *Funktionentheorie. Eine Einführung,* 6. Aufl., Springer, Heidelberg, 2004.

[6] E. Kuwert, *Analysis I,* `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/AnalysisI.pdf`

[7] E. Kuwert, *Analysis II,* `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/skript.pdf`

[8] E. Kuwert, *Analysis III,* `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/skriptAnaIII.pdf`

[9] S. Lang, *Complex Analysis,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

[10] P. Pfaffelhuber, *Analysis I-III,* `http://www.stochastik.uni-freiburg.de/Vorlesungen/vvWS2013/VorAna-III/Skript/AnalysisIII_skript.pdf`

[11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1987.

Stichwortverzeichnis