Topologie & Algebraische Topologie — SS 23

Sebastian Goette

Inhaltsverzeichnis

Einführung 1

Kapitel 1. Kapitel 1 — Grundbegriffe 3
1.a. Metrische Räume 3
1.b. Topologische Räume 4
1.c. Trennungseigenschaften 8
1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften 12
1.e. Filter und Konvergenz 14
1.f. Unterräume und Produkte 17
1.g. Kompaktheit 22
1.h. Produkte kompakter Räume 25
1.i. Quotienten und Verklebung 29
1.j. Zusammenhang 34
1.k. Funktionenräume und die kompakt-offene Topologie 36
1.l. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten 39
1.m. Übungen zu Kapitel 1 44

Kapitel 2. Fundamentalgruppe und Überlagerungen 53
2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz 53
2.b. Die Fundamentalgruppe 56
2.c. Die Fundamentalgruppe der S^1 60
2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen 63
2.e. Überlagerungen 70
2.f. Die universelle Überlagerung 75
2.g. CW-Komplexe 78
2.h. Übungen zu Kapitel 2 84

Kapitel 3. Homotopiegruppen 87
3.a. Höhere Homotopiegruppen 87
3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares 92
3.c. Faserungen 97
3.d. Der Ausschneidungssatz 102
3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf 106
3.f. Kofaserungen und Quotienten 111
3.g. Konstruktionen mit gut punktierten Räumen 114
3.h. Stabile Homotopiegruppen 118
3.i. Gerahmter Bordismus 123
3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären 130
3.k. Übungen zu Kapitel 3 134

Kapitel 4. Elementare Homotopietheorie 141

4.a. Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten 141
4.b. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume 146
4.c. Das Exponentialgesetz 150
4.d. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead 157
4.e. Modellkategorien 166
4.f. Faser- und Kofaser-Sequenzen 170
4.g. Übungen zu Kapitel 4 176

Kapitel 5. Homologie 183
5.a. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome 183
5.b. Zelluläre Homologie 190
5.c. Homologiefunktoren und Spektren 201
5.d. Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum 206
5.e. Moore-Räume und ein universelles Koffizienten-Theorem 212
5.f. Produkträume und die Künneth-Formel 218
5.g. Übungen zu Kapitel 5 224

Kapitel 6. Kohomologie 231
6.a. Axiome für Kohomologiefunktoren 231
6.b. Der abgeleitete inverse Limes 233
6.c. Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem 236
6.d. Produkte 242
6.e. Spektren und Kohomologiefunktoren 248
6.f. Vektor- und Prinzipalbündel 251
6.g. Klassifikation von Prinzipalbündeln 256
6.h. Topologische K-Theorie 260
6.i. Bordismus 266
6.j. Natürliche Transformationen zwischen Kohomologiefunktoren 275
6.k. Multiplikative Kohomologiefunktoren 277
6.l. Übungen zu Kapitel 6 281

Kapitel 7. Dualität 285
7.a. Spanier-Whitehead-Dualität 285
7.b. Orientierungen und Thom-Isomorphismen 290
7.c. Poincaré-Dualität 294

Literatur 301

Stichwortverzeichnis 303

Einführung

Bevor wir mit dem eigentlichen Stoff der Vorlesung beginnen, möchte ich Ihnen ein paar Beispiele geben, zum einen Aussagen, die sich in der Sprache der Topologie formulieren lassen, zum anderen Aussagen aus anderen Gebieten der Mathematik, die sich aber topologisch beweisen lassen. Nicht alle diese Beispiele werden in der Vorlesung tatsächlich auftreten, weil sie zum Teil etwas mehr Hintergrundwissen brauchen — sei es topologisch, sei es aus einem anderen Gebiet der Mathematik — als wir in dieser Vorlesung lernen können.

0.1. Beispiel. Sei

$$B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| < 1 \right\}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe, und sei

$$D^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| \leq 1 \right\}$$

ihr Abschluss.

Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt:

0.2. Satz (Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Das heißt, es existiert $x_0 \in D^n$ mit

$$f(x_0) = x_0 \,.$$

Hierbei bedeutet stetig das gleiche wie in der Analysis.

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Fixpunktsatz von Banach:

0.3. Satz (Banach). *Sei X ein vollständiger normierter Vektorraum, und sei $F\colon X \to X$ eine Abbildung zu der ein $\lambda < 1$ existiert, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \, \|x - y\| \qquad (*)$$

für alle x, $y \in X$. Dann hat F einen eindeutigen Fixpunkt.

Wir vergleichen die Sätze von Banach und Brouwer.

(1) Der Satz von Banach ist insofern allgemeiner, als das er für mehr Räume funktioniert, denn der Satz von Brouwer gilt nur für gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Er ist schärfer, denn er liefert einen *eindeutigen* Fixpunkt. Außerdem liefert der Beweis ein Verfahren zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts.

(2) Der Satz von Brouwer ist insofern allgemeiner, als er mehr Abbildungen zulässt. Wir könnten nämlich den Satz von Brouwer auch für Abbildungen $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ formulieren, so dass $F(D^n) \subset D^n$. Aus dem Banachschen Satz folgt ja unter anderem, dass der Einheitskreis um den Fixpunkt in sich abgebildet wird. Auf der anderen Seite kann eine Abbildung den Einheitskreis in sich abbilden, ohne dass sie die Lipschitz-Bedingung (*) erfüllt. Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sagt uns allerdings nicht, wie wir den Fixpunkt auffinden können.

Die Sätze sind also verschieden. Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein „metrischer“ Satz, während der Brouwersche Fixpunktsatz ein „topologischer“ Satz ist.

0.4. Beispiel. Unter der n-dimensionale Einheitssphäre verstehen wir die Menge

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x| = 1 \right\} .$$

Ein Einheitsvektorfeld auf der S^n ist eine stetige Abbildung $V\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$|V(x)| = 1 \quad \text{und} \quad V(x) \perp x \; .$$

0.5. Satz (vom Igel). *Sei n gerade, dann existiert kein stetiges Einheitsvektorfeld auf S^n.*

Mit anderen Worten: ein gerade-dimensionaler Igel ohne Glatzpunkt lässt sich nicht kämmen (Igel lassen sich sowieso nicht kämmen — sie stellen ihre Stacheln auf, wenn man's versucht).

Auf der anderen Seite existiert solch ein Vektorfeld immer, wenn n ungerade ist. In diesem Fall identifizieren wir $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und setzen einfach $V(x) = ix$.

0.6. Beispiel. Das folgende Beispiel ist mit dem zweiten verwandt, auch wenn man das nicht auf den ersten Blick erkennen kann. Sei A eine Algebra über $\mathbb{R}$, d.h., A ist ein reeller Vektorraum, und es existiert eine $\mathbb{R}$-bilineare Multiplikationsabbildung $*\colon A \times A \to A$. Diese muss weder assoziativ noch kommutativ sein.

Wir nennen A eine *Divisionsalgebra,* wenn zu jedem $a \in A \setminus \{0\}$ ein $a' \in A$ existiert, so dass

$$a' * (a * b) = (b * a) * a' = b$$

für alle $b \in A$ gilt.

0.7. Satz (Kervaire, Milnor). *Die einzigen endlich-dimensionalen Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (die Quaternionen) und $\mathbb{C}$a (die Oktaven).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung sicherlich nicht beweisen. Genau wie beim Fundamentalsatz der Algebra handelt es sich hier um einen rein algebraischen Satz, der sich aber nur mit analytischen / topologischen Methoden beweisen lässt. Die Liste der algebraischen Resultate, die mit topologischen Methoden bewiesen werden, wird immer länger.

KAPITEL 1

Kapitel 1 — Grundbegriffe

Wir lernen in diesem Kapitel den Begriff des topologischen Raumes und der stetigen Abbildungen kennen. Außerdem definieren wir noch zahlreiche Eigenschaften von topologischen Räumen und Abbildungen, und beweisen ein paar kleine Sätze, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Einiges sollte aus Analysis bekannt sein — zumindest im metrischen Fall.

1.a. Metrische Räume

Wir erinnern uns kurz an die Definition von metrischen Räumen und stetigen Abbildungen im Sinne der Analysis. Wenn wir von einer Definition „im Sinne der Analysis“ sprechen, meinen wir damit eine Beschreibung, die Worte wie „für alle $\varepsilon > 0$ existiert ...“ enthält .

1.1. Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty]$, die

(1) *positiv* ist, das heißt, $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
(2) *symmetrisch* ist, das heißt, $d(x, y) = d(y, x)$, und
(3) die *Dreiecksungleichung* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ erfüllt,

jeweils für alle x, y, $z \in X$.

1.2. Beispiel. Es folgen einige einfache Beispiele von Metriken.

(1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, jeweils mit $d(x, y) = |y - x|$.
(2) Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist metrisch mit $d(x, y) = \|y - x\|$.
(3) Jede Menge M trägt eine Metrik
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$
(4) Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist wieder ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik $d|_Y = d|_{Y \times Y}$.

Weitere Beispiele folgen in den Übungen 1.114 und 1.116.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der ε-Ball um x ist die Menge
$$B_\varepsilon(x) = \{\, x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon \,\} .$$

1.3. Definition. Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ heißt *stetig am Punkt* $x \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass
$$F\big(B_\delta(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(F(x)\big) .$$
F heißt *stetig,* wenn F an allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Das ist genau die Definition, die Sie aus Analysis kennen. Wir erinnern uns an eine weitere Definition. Im folgenden bezeichne $\mathcal{P}X$ die Potenzmenge von X. Da wir es in der Topologie häufig mit Mengen von Mengen — wie der Potenzmenge — zu tun haben, verwenden wir für solche Mengen kalligraphische Buchstaben, um sie zum Beispiel von Punktmengen zu unterscheiden.

1.4. Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen in* X, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Die Gesamtheit aller offenen Mengen $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}X$ heißt die *metrische Topologie* auf X zur Metrik d. Sei $x \in X$, dann heißt eine beliebige Teilmenge $V \subset X$ eine *Umgebung von* x, wenn es eine offene Menge U gibt mit $x \in U \subset V$.

1.5. Bemerkung. Die Offenheit einer Menge U hängt ab vom umgebenden Raum X und der gewählten Metrik d. So ist etwa die Menge $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$ offen in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{R}$. Aus der Analysis wiessen Sie aber auch, dass unterschiedliche Metriken den gleichen Konvergenzbegriff und somit die gleiche Topologie induzieren können.

1.6. Bemerkung. Zu Definition 1.4 äquivalent ist die folgende Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(a_i)_i$ in A, die in (X, d) im Sinne der Analysis konvergiert, der Grenzwert $\lim_{i\to\infty} a_i$ in A liegt. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn $X \setminus U$ abgeschlossen ist.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Stetigkeit auch definieren kann, wenn man nicht die Metrik kennt, sondern nur ihre offenen Mengen. Auch das sollte aus der Analysis bekannt sein.

1.7. Satz. *Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offenen Teilmengen von Y in X wiederum offen sind.*

Beweis. Wir nehmen an, dass F stetig ist im Sinne von Definition 1.3. Sei $V \subset Y$ offen, und sei $x \in F^{-1}(V) \subset X$ beliebig. Da V offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(F(x)) \subset V$. Aufgrund der Stetigkeit von F existiert ein $\delta > 0$, so dass $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)) \subset V$ gilt, insbesondere folgt $B_\delta(x) \subset F^{-1}(V)$. Da x beliebig war, ist also $F^{-1}(V)$ offen in X.

Wir nehmen jetzt an, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da der Ball $B_\varepsilon(F(x))$ in Y offen ist, ist auch $U = F^{-1}\big(B_\varepsilon(F(x))\big)$ offen in X, und natürlich liegt x in U. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ gilt. Es folgt $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$. Da x und ε beliebig waren, ist F also stetig im Sinne von Definition 1.3. □

1.b. Topologische Räume

Wir erinnern uns an die Definition topologischer Räume und stetiger Abbildungen aus der Analysis. Zur Motivation betrachten wir die entsprechenden Definitionen für metrische Räume aus dem letzten Abschnitt.

1.8. Bemerkung. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $\mathcal{O}_d$ die von d definierte Topologie auf X.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und X selbst sind nach Definition 1.4 offen, gehören also zu $\mathcal{O}_d$.
(2) seien $U_1, \ldots, U_k$ offen, und sei $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Da die U_i offen sind, existieren $\varepsilon_i > 0$, so dass $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, dann ist $\varepsilon > 0$, und es gilt $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Da x beliebig war, ist $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ also wieder offen.
(3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d$ eine beliebig grosse Ansammlung offener Mengen. Sei
$$x \in \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \,,$$
dann existiert also ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$. Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$. Da x beliebig war, ist $\bigcup \mathcal{U}$ also wieder offen.

Wir benutzen diese drei Beobachtungen über $\mathcal{O}_d$, um den allgemeinen Begriff einer Topologie zu definieren.

1.9. Definition. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{O}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und X selbst liegen in $\mathcal{O}$.
(2) Seien $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$, dann liegt auch $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$.
(3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, dann liegt auch $\bigcup \mathcal{U}$ in $\mathcal{O}$.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

1.10. Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann definiert $\mathcal{O}_d$ nach Bemerkung 1.8 eine Topologie auf X. Umgekehrt heißt eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X *metrisierbar,* wenn es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$. Die meisten topologischen Räume, denen wir später begegnen, werden metrisierbar sein. Dennoch gibt es interessante und wichtige topologische Räume, die nicht metrisierbar sind.

1.11. Beispiel. Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren zwei "triviale" Topologien auf X.

(1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$, dann ist jede Teilmenge von X offen bezüglich $\mathcal{O}_\delta$. Wir nennen $\mathcal{O}_\delta$ die *diskrete Topologie* auf X. Die diskrete Topologie wird von der Metrik aus Beispiel 1.2 (3) induziert.
(2) Das andere Extrem ist $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}X$. Diese Topologie heißt *Klumpentopologie* (*indiskrete Topologie*). Diese Topologie ist nur metrisierbar, wenn X höchstens einen Punkt enthält, wie wir später sehen werden.

1.12. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen* bezüglich $\mathcal{O}$, falls $U \in \mathcal{O}$. Sei $x \in X$ und $V \subset X$ mit $x \in V$, dann heißt V eine *Umgebung* von x bezüglich $\mathcal{O}$, falls es eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $x \in U \subset V$ gilt. Sei $A \subset X$, dann heißt A *abgeschlossen* bezüglich $\mathcal{O}$, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.13. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Das *Innere* $\mathring{Y}$ von Y in X ist die größte offene Teilmenge von X, die ganz in Y enthalten ist. Der *Abschluss* $\overline{Y}$ von Y in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die Y enthält. Der *Rand* von Y in X ist die Menge $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$.

1.14. Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir wollen uns überlegen, dass es die oben definierten Teilmengen wirklich gibt. Es gilt

$$\mathring{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U \qquad \text{und} \qquad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \setminus A \in \mathcal{O} \\ A \supset Y}} A \,.$$

Die erste Menge ist offen nach Definition 1.9 (3). Für die zweite zeigt man analog, dass das Komplement offen ist. Ausserdem ist

$$\overline{X \setminus Y} = X \setminus \mathring{Y} \,, \qquad (X \setminus Y)^\circ = X \setminus \overline{Y} \,, \quad \text{und} \quad \partial(X \setminus Y) = \partial Y \,.$$

1.15. Beispiel. Das Innere und der Abschluss einer Menge hängen vom umgebenden Raum und seiner Topologie ab. Sei $V = [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{in } \mathbb{Q}: \quad & \mathring{V} = V \,, & \overline{V} = V \,, & & \partial V = \emptyset \,, \\ \text{und in } \mathbb{R}: \quad & \mathring{V} = \emptyset \,, & \overline{V} = [-\pi, \pi] \,, & & \partial V = [-\pi, \pi] \,. \end{aligned}$$

Falls es klar ist, von welcher Topologie $\mathcal{O}$ auf welchem Raum X wir reden, lassen wir den Zusatz „bezüglich $\mathcal{O}$" oder „in X" in der Regel weg. Wir haben in Satz 1.7 ein „topologisches" Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennengelernt. Wir erheben dieses Kriterium zur Definition.

1.16. Definition. Es sei $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann heißt F

(1) *stetig am Punkt* $x \in X$ genau dann, wenn für alle Umgebungen $V \subset Y$ von $F(x)$ das Urbild $F^{-1}(V)$ wieder eine Umgebung von x ist, und
(2) *stetig* genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, wenn also $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Y$.

Es bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y.

Wenn eine stetige Abbildung $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ bijektiv ist und $F^{-1}\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ebenfalls stetig ist, heißt F ein *Homöomorphismus.*

1.17. Beispiel. (1) Nach Satz 1.7 sind Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann im topologischen Sinne stetig, wenn sie im metrischen Sinne stetig sind.
(2) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und sei y_0 ein Punkt in Y. Die konstante Abbildung $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $F(x) = y_0$ für alle $x \in X$ (kurz: $F \equiv y_0$) ist immer stetig, denn für jede offene Menge $U \subset Y$ gilt

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \notin U, \text{ und} \\ X \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \in U. \end{cases}$$

1.18. Bemerkung. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume.
(1) Die Identität $\mathrm{id}_X\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ auf X mit $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$ ist immer stetig, denn für alle $U \in \mathcal{O}_X$ gilt

$$\mathrm{id}_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_X \ .$$

(2) Seien $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $G\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen, dann ist auch $G \circ F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig. Sei nämlich $U \subset Z$ offen in Z, dann ist $G^{-1}(U)$ offen in Y, und somit ist $F^{-1}\big(G^{-1}(U)\big)$ offen in X. Da also $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}\big(G^{-1}(U)\big) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Z$, ist $G \circ F$ stetig.

Mit einer *Klasse* bezeichnen wir eine beliebige Ansammlung von Mengen. Manche Klassen sind Mengen, alle anderen nennt man *echte Klassen.* Ein Beispiel für eine echte Klasse ist die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da Elemente von Klassen selbst bloß Mengen und keine echten Klassen sind, erhalten wir hier kein Paradoxon.

1.19. Definition. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus
(1) einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,
(2) zu je zwei Objekten X, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen*,
(3) je einem ausgezeichneten Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ für jedes Objekt $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, und
(4) zu je drei Objekten X, Y, $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ einer *Verkettung*

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \qquad \text{mit} \qquad (f, g) \mapsto g \circ f \ ,$$

so dass die folgenden zwei Axiome gelten.
Identität. Seien X, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, dann gilt

$$f = f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f \ .$$

Assoziativität. Für alle X, Y, Z, $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \ .$$

In der Literatur werden gelegentlich auch Klassen von Morphismen zwischen zwei gegebenen Objekten zugelassen. Solche Kategorien werden wir in dieser Vorlesung voraussichtlich nicht brauchen.

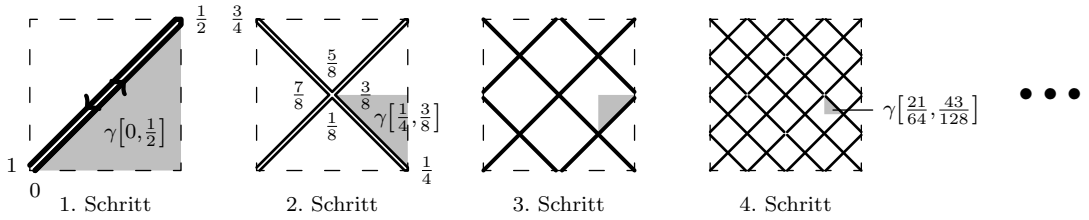


ABBILDUNG 1.1. Eine flächenfüllende Kurve

1.20. BEISPIEL. Es folgen einige typische Beispiele von Kategorien.

(1) Die Kategorie $\mathcal{S}et$ hat als Objekte alle Mengen, und als Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen.
(2) Die Kategorie $\mathcal{G}rp$ hat als Objekte alle Gruppen, und als Morphismen alle Gruppenhomomorphismen.
(3) Sei $\Bbbk$ ein Körper, dann hat die Kategorie $\mathcal{V}ec_\Bbbk$ als Objekte alle $\Bbbk$-Vektorräume, und als Morphismen alle $\Bbbk$-linearen Abbildungen.
(4) Die Kategorie $\mathcal{T}op$ hat als Objekte alle topologischen Räume, und als Morphismen alle stetigen Abbildungen, siehe Bemerkung 1.18.

In jedem dieser Beispiele ist die Identität die Identität der zugrundeliegenden Menge, und die Komposition die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Schließlich wollen wir an ein pathologisches Beispiel erinnnern, das uns zeigt, dass stetige Abbildungen mitunter unerwartete Eigenschaften an den Tag legen.

1.21. BEISPIEL. Es gibt stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall $I = [0,1]$ in die Menge $I \times I \subset \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel kann man zwei Kopien der Kochschen Schneeflockenkurve (mit dem richtigen Parameter) aneinandersetzten, siehe Abbildung 1.1. Die entstehende Kurve γ ist stetig, sogar $\frac{1}{2}$-Höldersch. In jedem Schritt γ_{i+1} wird jede Strecke der Kurve γ_i durch vier Strecken der halben Länge ersetzt. Man überzeugt sich, dass die Folge $(\gamma_i)_i$ gleichmäßig konvergiert. Den Bildpunkt $\gamma(t)$ kann man durch Intervallschachtelung bestimmen.

Wir können auch verschiedene Topologien auf ein und demselben Raum vergleichen.

1.22. DEFINITION. Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zwei Topologien auf einer Menge X. Dann ist $\mathcal{O}'$ *feiner* als $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ *gröber* als $\mathcal{O}'$, wenn $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

1.23. BEMERKUNG. Eine Topologie $\mathcal{O}'$ auf X ist nach Definition 1.16 genau dann feiner als $\mathcal{O}$, wenn die Identität $\mathrm{id}_X \colon (X,\mathcal{O}') \to (X,\mathcal{O})$ stetig ist. Mit Bemerkung 1.18 (2) folgt: Sei die Abbildung $F \colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ stetig, sei $\mathcal{O}'_X$ feiner als oder gleich $\mathcal{O}_X$, und sei $\mathcal{O}'_Y$ gröber als oder gleich $\mathcal{O}_Y$, dann ist auch $F \colon (X,\mathcal{O}'_X) \to (Y,\mathcal{O}'_Y)$ stetig.

Faustregel: je feiner eine Topologie auf X ist, desto weniger Folgen in X konvergieren, desto weniger Abbildung nach X sind stetig, und desto mehr Abbildungen von X in einen anderen Raum sind stetig.

1.24. BEISPIEL. Sei $X = \mathbb{R}^n$, sei $\mathcal{O}_d$ die metrische Topologie zur Standardmetrik, und sei $\mathcal{O}_f$ die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.114. Dann ist die diskrete Topologie $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ aus Beispiel 1.11 (1) feiner als $\mathcal{O}_f$, die Topologie $\mathcal{O}_f$ ist feiner als $\mathcal{O}_d$, und $\mathcal{O}_d$ ist wiederum feiner als die Klumpentopologie $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ aus Beispiel 1.11 (2).

1.c. Trennungseigenschaften

Wir untersuchen die Frage, ob es in einem topologischen Raum genug offene Mengen gibt, so dass man vorgegebene Punkte oder Teilmengen voneinander „trennen“ kann. Wenn das gut genug geht, kann man zeigen, dass es „viele“ reellwertige Funktionen auf dem Raum gibt.

Wir beantworten diese Frage zunächst für metrische Räume. Sei dazu $I = ([0,1], \mathcal{O}_d)$ das reelle Einheitsintervall, wie üblich versehen mit der metrischen Topologie.

1.25. Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt bezüglich $\mathcal{O}_d$:*

(1) *einpunktige Teilmengen von X sind abgeschlossen;*
(2) *seien A_0, $A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann existieren disjunkte offene Mengen U_0, $U_1 \in \mathcal{O}$ mit $A_0 \subset U_0$ und $A_1 \subset U_1$;*
(3) *seien A_0, $A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ mit $A_0 = f^{-1}\{0\}$ und $A_1 = f^{-1}\{1\}$.*

Beweis. Zu (1). Zu zeigen ist die Offenheit von $X \setminus \{x\}$ für ein beliebiges $x \in X$. Sei dazu $x \neq y \in X$, dann folgt

$$B_{d(x,y)}(y) \subset X \setminus \{x\} \ .$$

Also ist $X \setminus \{x\}$ offen nach 1.4.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Wähle f wie in (3). Da f stetig ist, sind die Mengen $U_0 = f^{-1}\big(\big[0, \frac{1}{2}\big)\big)$ und $U_1 = f^{-1}\big(\big(\frac{1}{2}, 1\big]\big)$ disjunkt und offen in X, da $\big[0, \frac{1}{2}\big)$ und $\big(\frac{1}{2}, 1\big]$ disjunkt und offen in I sind.

Punkt (3) lassen wir als Übung 1.122. □

1.26. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ hat die *Trennungseigenschaft* oder erfüllt das *Trennungsaxiom*

(T0) wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in U$, $y \notin U$ oder $x \notin U$, $y \in U$,
(T1) wenn alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ für $x \in X$ abgeschlossen sind,
(T2) oder ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X disjunkte offene Mengen U, $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ und $y \in V$ gibt,
(T3) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte offene Mengen U, $V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $x \in V$ gibt,
(T3a) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f\colon (X, \mathcal{O}) \to I$ mit $f(A) \subset \{0\}$ und $f(x) = 1$ gibt,
(T4) wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, $B \subset X$ disjunkte offene Mengen U, $V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$ gibt.

Ein topologischer Raum heißt *regulär,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt, *vollständig regulär* oder *Tychonoff-Raum,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3a) erfüllt, und *normal,* wenn er die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die für uns zunächst wichtigste Trennungseigenschaft ist „hausdorffsch“. Bemerkung 1.27 und Beispiel 1.28 sollen das verdeutlichen.

1.27. Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(1) Wenn $(X, \mathcal{O})$ hausdorffsch ist, dann hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert. Das heißt, zu jeder Folge $(x_i)_i$ gibt es höchstens einen Punkt $x \in X$, so dass für jede Umgebung U von x fast alle Folgenglieder x_i in U liegen. Denn wäre $y \in X \setminus \{x\}$ ein weiterer Grenzwert, so könnte man x und y durch disjunkte offene Umgebungen U und V trennen, und fast alle Folgenglieder müssten in $U \cap V = \emptyset$ liegen.

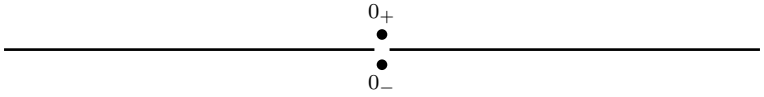


Abbildung 1.2. Ein nicht Hausdorffscher Raum

(2) Wenn sich zwei Punkte $x, y \in X$ nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, gilt $f(x) = f(y)$ für jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$. Denn wäre $f(x) \neq f(y)$, so könnte man $f(x)$ und $f(y)$ in $\mathbb{R}$ durch disjunkte offene Intervalle I, $J \subset \mathbb{R}$ trennen. Aber dann trennten $f^{-1}(I)$ und $f^{-1}(J)$ bereits x und y.

1.28. Beispiel. Betrachte den Raum $X = (-1, 0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0, 1)$ mit der folgenden Topologie $\mathcal{O}$. Eine Teilmenge $U \subset X$ sei offen, wenn zu jedem Punkt $x \in U \setminus \{0_+, 0_-\}$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U \setminus \{0_+, 0_-\}$ existiert, und falls $0_- \in U$ oder $0_+ \in U$, ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $(-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0) \subset U$ existiert, siehe Abbildung 1.2. Man überzeugt sich leicht, dass $(X, \mathcal{O})$ die Trennungseigenschaften (T0) und (T1) erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft (T2) ist jedoch verletzt, da der Schnitt je zweier Umgebungen von 0_+ und 0_- eine kleine Menge der Form $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ enthält. Als Beispiel für eine Folge mit zwei Grenzwerten betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0_+ \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0_- \ .$$

Andererseits konvergiert die konstante Folge $(0_+)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0_-, und eine Folge, deren Glieder abwechselnd 0_+ und 0_- sind, divergiert.

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie ist das Lemma von Urysohn, wonach jeder (T4)-Raum „viele stetige Funktionen“ trägt.

1.29. Lemma (Urysohn). *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein (T4)-Raum. Dann existiert zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen A, $B \subset X$ eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*

Es gilt auch die Umkehrung: wenn zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen A, $B \subset X$ eine stetige Funktion $f\colon X \to I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$ existiert, dann ist X ein (T4)-Raum. Dazu betrachten wir beispielsweise die offenen Mengen $f^{-1}\big(\big[0, \frac{1}{2}\big)\big)$ und $f^{-1}\big(\big(\frac{1}{2}, 1\big]\big)$.

1.30. Beispiel. Wir geben zwei einfache Beispiele.

(1) Die einpunktigen Mengen $\{0\}$, $\{1\} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen und disjunkt. Wir trennen sie mit Hilfe der stetigen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0, 1] \ , \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

(2) Die Teilmengen $[1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ und $[\sqrt{2}, 2] \cap \mathbb{Q}$ sind in $\mathbb{Q}$ abgeschlossen und disjunkt. Wir trennen sie mit der stetigen Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \sqrt{2}, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

All das geht nur, weil $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Siehe [**Que**, Abschnitt 7.A]. Sei

$$D = \left\{ a\, 2^{-k} \;\middle|\; a,\, k \in \mathbb{N},\, 0 \leq a \leq 2^k \right\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen im Einheitsintervall I. Wir wollen induktiv zu allen $d \in D$ eine offene Menge U_d konstruieren, so dass $A \subset \overline{U}_d \subset U_{d'} \subset X \setminus B$ für alle $d, d' \in D$ mit $d < d'$. Für $t \in I$ definieren wir dann offene Mengen

$$U_t = \bigcup_{d \in D \cap [0,t]} U_d \,,$$

und wiederum gilt $\overline{U}_t \subset U_{t'}$ für alle t, $t' \in I$ mit $t < t'$, da zwischen t und t' noch beliebig viele dyadische Zahlen liegen.

Mit $U_t = \emptyset$ für $t < 0$ und $U_t = X$ für $t > 1$ definieren wir

$$f(x) = \inf\{\, t \in \mathbb{R} \mid x \in U_t \,\} \in [0,1] \,.$$

Aus $A \subset U_0 \subset U_1 \subset X \setminus B$ folgt sofort $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. Um Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir für $t \in I$ und $x \in X$ mit $f(x) = t$ sowie $\varepsilon > 0$ das Intervall $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap I$. Sei $0 < \delta < \varepsilon$, dann folgt

$$x \in U_{t+\delta} \setminus \overline{U}_{t-\delta} \subset f^{-1}(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \,,$$

also ist f stetig.

Nun zur Konstruktion der Familie $(U_d)_{d \in D}$. Zu (T4) äquivalent ist die folgende Aussage: sei $A \subset Y \subset X$, A abgeschlossen und Y offen, dann existiert eine offene Menge U, so dass $A \subset U \subset \overline{U} \subset Y$.

Wir wählen also zunächst $U_0 \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$, und $U_1 = X \setminus B \in \mathcal{O}$. Seien jetzt alle U_d mit Nenner 2^k bestimmt, dann wählen wir $U_{(2a+1)\,2^{-k-1}}$ induktiv so, dass

$$\overline{U}_{a\,s^{-k}} \subset U_{(2a+1)\,2^{-k-1}} \subset \overline{U}_{(2a+1)\,2^{-k-1}} \subset U_{(a+1)\,2^{-k}} \,. \qquad \square$$

1.31. Bemerkung. Urysohn's Lemma 1.29 ist nicht ganz so stark wie Satz 1.25 (3), denn dort galt sogar $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$. Wenn nämlich $f^{-1}(0) = A$ gilt, dann können wir die abgeschlossene Menge A als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben, etwa

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[0, \frac{1}{n}\right) \,.$$

Und das muss in allgemeinen (T4)-Räumen nicht gelten.

1.32. Satz (Tietze). *Es sei X ein (T4)-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $g\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f|_A = g$.*

Der Beweis basiert auf dem Lemma 1.29 von Urysohn. Man erhält das Lemma von Urysohn zurück, indem man auf der abgeschlossenen Teilmenge $A \dot\cup B \subset X$ die Funktion g mit $g|_A \equiv 0$ und $g|_B \equiv 1$ betrachtet. Insbesondere gilt auch hier die Umkehrung: wenn man jede stetige Funktion auf einer abgschlossenen Teilmenge auf den ganzen Raum fortsetzen kann, dann erfüllt der Raum (T4). Wir greifen hier vor auf die Unterraumtopologie aus Abschnitt 1.f.

Beweis. Siehe [**Que**, Abschnitt 7.B]. Wir setzen zunächst Funktionen $g\colon A \to [-1,1]$ stetig auf X fort. Anschließend betrachten wir Funktionen $g\colon A \to \mathbb{R}$.

Sei also $g\colon A \to [-1,1]$ gegeben. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(x)| \le 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle } x \in X, \tag{a}$$

$$|f_n(a) - g(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle } a \in A, \tag{b}$$

$$\text{und} \qquad |f_k(x) - f_\ell(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle } k, \ell \ge n \text{ und alle } x \in X. \tag{c}$$

Die Funktion $f_0 \equiv 0$ erfüllt bereits (a) und (b).

Gegeben f_n, betrachte die nach Definition 1.49 abgeschlossenen Teilmengen

$$B_n = \left\{ x \in A \;\middle|\; f_n(x) - g(x) \leq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$
$$\text{und} \qquad C_n = \left\{ x \in A \;\middle|\; f_n(x) - g(x) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

von X. Nach Urysohns Lemma 1.29 existiert eine stetige Funktion $h_n \colon X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ mit $h_n|_{B_n} \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ und $h_n|_{C_n} \equiv -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Dann hat die Funktion $f_{n+1} = f_n + h_n$ wieder die Eigenschaften (a) und (b).

Außerdem gilt (c), denn

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |h_{n+j}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^j < \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Im Grenzwert erhalten wir eine Funktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \colon X \to \mathbb{R} .$$

Wegen (c) ist die Konvergenz gleichmäßig, also ist die Grenzfunktion stetig nach Analysis I. Aus (b) folgt $f|_A = g$, und wegen (a) hat f Werte in $[-1, 1]$.

Sei jetzt $g \colon A \to (-1, 1)$ gegeben, dann liefert die obige Konstruktion zunächst eine stetige Fortsetzung $f \colon X \to [-1, 1]$. Da aber $B = f^{-1}(\{-1, 1\})$ abgeschlossen und zu A disjunkt ist, erhalten wir mit dem Lemma von Urysohn eine Funktion $u \colon X \to [0, 1]$ mit $u|_A \equiv 1$ und $u|_B \equiv 0$, und die Funktion uf ist eine Fortsetzung von g mit Werten in $(-1, 1)$. Da $(-1, 1)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, folgt der obige Satz. □

1.33. Bemerkung. Aus Satz 1.25 und den obigen Definitionen ergeben sich die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\text{metrisierbar} & \Longrightarrow & \text{normal} & \Longrightarrow & \begin{array}{c}\text{vollständig}\\ \text{regulär /}\\ \text{Tychonoff}\end{array} & \Longrightarrow & \text{regulär} & \Longrightarrow & \begin{array}{c}\text{Hausdorff}\\ \text{(T2)}\end{array} & \Longrightarrow & \text{(T1)} \Longrightarrow \text{(T0)} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow & & \\
 & & \text{(T4)} & & \text{(T3a)} & \Longrightarrow & \text{(T3)} & & & &
\end{array}$$

Aus metrisierbar folgt normal wegen Satz 1.25. Die drei vertikalen Pfeile beruhen direkt auf den Definitionen. Aus (T3a) folgt (T3) wie (2) aus (3) in Satz 1.25, genauso folgt regulär aus vollständig regulär. Um aus regulär hausdorffsch zu folgern, ersetzen wir die abgeschlossene Menge in (T3) durch einen Punkt, der nach (T1) abgeschlossen ist. Aus normal folgt vollständig regulär mit (T1) und Urysohns Lemma 1.29. Aus hausdorffsch folgt (T1) wie im Beweis von 1.25 (1), und (T1)-Räume sind offensichtlich (T0).

In den Übungen 1.123–1.125 wird deutlich, dass (T3), (T3a) und (T4) ohne (T1) wenig aussagen.

1.34. Bemerkung. Wir haben gesehen, wie hilfreich Trennungsaxiome beispielsweise dann sind, wenn es darum geht, stetige Funktionen nach $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie zu konstruieren. Es gibt aber auch Bereiche der Mathematik, in denen das nicht im Vordergrund steht. Dann benötigt man auch keine Trennungsaxiome, beispielsweise sind algebraische Varietäten mit der Zariski-Topologie in den meisten Fällen nicht Hausdorffsch. Wir lernen später eine andere Charakterisierung der Hausdorff-Eigenschaft kennen, die sich leichter auf andere Kategorien von Räumen übertragen lässt.

1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften

Um eine Topologie $\mathcal{O}$ zu definieren, ist es häufig unbequem, alle offenen Mengen anzugeben. Stattdessen sucht man möglichst kleine Teilmengen $\mathcal{U}$ von $\mathcal{O}$, so dass $\mathcal{O}$ selbst die gröbste Topologie ist, für die alle Mengen in $\mathcal{U}$ offen sind. So wird man auf die Begriffe „Basis“ und „Subbassis“ geführt. Für spätere Überlegungen ist es oft hilfreich zu wissen, dass manche topologischen Räume eine „kleine“ — sprich abzählbare — Basis besitzen.

1.35. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* von $\mathcal{O}$, wenn

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \;\middle|\; \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \;\middle|\; I \text{ Menge, } U_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt *Subbasis* von $\mathcal{O}$, wenn die Menge

$$\{ U_1 \cap \cdots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{S} \}$$

eine Basis von $\mathcal{O}$ bildet.

Mit anderen Worten: $\mathcal{B}$ ist eine Basis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt. $\mathcal{S}$ ist eine Subbasis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Durchschnitten je endlich vieler Elemente aus $\mathcal{S}$ schreiben lässt. Insbesondere ist jede Basis auch eine Subbasis.

1.36. Beispiel. Es folgen Basen und Subbasen für einige uns wohlbekannte Topologien.

(1) Sei X eine Menge. Die einpunktigen Teilmengen von X bilden eine Basis der diskreten Topologie $\mathcal{O}_\delta$ auf X. Und da alle einpunktigen Mengen offen sind, muss jede Basis von $\mathcal{O}_\delta$ alle einpunktigen Mengen enthalten. Die Menge $\{X\}$ bildet eine Basis der Klumpentopologie $\mathcal{O}_K$, und die leere Menge bildet eine Subbasis, denn $\bigcap \emptyset = X \in \mathcal{P}X$ nach Konvention.

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann bildet die Menge $\mathcal{B}$ aller metrischen Bälle mit Radius $1/k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Basis der metrischen Topologie $\mathcal{O}_d$. Sei nämlich $U \in \mathcal{O}_d$. Nach Definition 1.4 existiert zu jedem $x \in U$ ein Radius $0 < \varepsilon_x$ so dass $B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$, und zu ε_x existiert nach dem Axiom des Archimedes eine Zahl $k_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $0 < 1/k_x \leq \varepsilon_x$. Also gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{1/k_x}(x) \quad \text{und} \quad \{ B_{1/k_x}(x) \mid x \in U \} \subset \mathcal{B}\,.$$

Darüberhinaus ist eine Teilmenge $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$, wenn sie einen der abzählbar vielen offene Bälle $B_{1/k}(x)$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ enthält.

(3) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie versehen. Dann bildet die Menge aller metrischen Bälle mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten bereits eine Basis der metrischen Topologie. Diese Basis ist abzählbar, während $\mathcal{O}$ selbst überabzählbar ist.

Die letzten beiden Beispiele sollen als Motivation für die folgende Definition dienen.

1.37. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann hat $(X, \mathcal{O})$ die *Abzählbarkeitseigenschaft* oder erfüllt das *Abzählbarkeitsaxiom*

(A1) wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Menge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}X$ von Umgebungen besitzt, so dass $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von x ist, wenn es ein $U \in \mathcal{U}_x$ mit $U \subset V$ gibt, und

(A2) wenn $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Eine Teilmenge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}$ wie in (A1) heißt auch *Umgebungsbasis.* Aus (A2) folgt (A1), denn sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von X und $x \in X$, dann ist

$$\mathcal{U}_x = \left\{ U \in \mathcal{B} \;\middle|\; x \in U \right\}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom lässt sich benutzen, um topologische Argumente induktiv über „kleine“ Mengen zu führen. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird häufig benötigt, um topologische Begriffe über Folgen zu erklären, so wie im folgenden Satz.

1.38. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit der Abzählbarkeitseigenschaft (A1). Dann ist eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie* folgenabgeschlossen *ist, das heißt, wenn jede Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in A, die in X konvergiert, ihre Grenzwerte in A annimmt.*

Beachte, dass der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig sein muss, wenn der Raum nicht Hausdorff (T2) ist. Wenn X das Axiom (A1) nicht erfüllt, ist der obige Satz falsch. Wir geben unten eine andere, ähnliche Charakterisierung abgeschlossener Mengen an.

Beweis. Sei A abgeschlossen, und sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X \setminus A$. Wir wollen zeigen, dass dann nicht alle a_i in A liegen können. Da $X \setminus A$ eine offene Umgebung von a ist, existiert ein $i_0 > 0$, so dass $a_i \notin A$ für alle $i \geq i_0$.

Sei umgekehrt A nicht abgeschlossen, das heißt, es gibt einen Punkt $x \notin A$, so dass jede Umgebung V von x die Menge A schneidet. Da (A1) gilt, können wir eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von x wählen. Da endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind, sind endliche Durchschnitte von Umgebungen von x wiederum Umgebungen von x, und wir setzen $U_i = V_1 \cap \cdots \cap V_i$. Dann ist $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis mit der Eigenschaft, dass $U_j \subset U_i$ für alle $j \geq i$. Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_i \in A \cap U_i$. Eine Teilmenge $V \subset X$ ist Umgebung von x genau dann, wenn es ein i_0 gibt mit $U_i \subset V$ für alle $i \geq i_0$. Es folgt $a_i \in V$ für alle $i \geq i_0$. Daraus folgt, dass x ein Grenzwert unserer Folge a_i ist. □

1.39. Bemerkung. Für allgemeine metrisierbare Räume gilt nur (A1), siehe Beispiel 1.36 (2). Es gilt aber der *Metrisationssatz von Urysohn:* Wenn $(X, \mathcal{O})$ die zweite Abzählbarkeitseigenschaft (A2) hat, dann ist $(X, \mathcal{O})$ genau dann metrisierbar, wenn $(X, \mathcal{O})$ regulär ist, also (T1) und (T3) erfüllt. Man beachte, dass $(X, \mathcal{O})$ nach Satz 1.25 dann sogar normal ist.

Die allgemeinen Metrisationssätze von Bing, Nagata und Smirnov geben ein genaues topologisches Äquivalent zur Metrisierbarkeit, sind aber leider nicht ganz so einfach zu formulieren, siehe [**Que**, Abschnitt 10.B].

Wir können eine Subbasis oder Basis aber auch dazu verwenden, eine Topologie zu definieren.

1.40. Satz. *Sei X eine Menge, und seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$ beliebig.*

(1) *Wenn für je endlich viele $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}$ mit $k \geq 0$ eine Untermenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ existiert, so dass $B_1 \cap \cdots \cap B_k = \bigcup \mathcal{U}$, dann existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ auf X mit Basis $\mathcal{B}$. Wir nennen $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ die durch die Basis $\mathcal{B}$ definierte Topologie.*

(2) *Es existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ auf X mit Subbasis $\mathcal{S}$. Sei $\mathcal{O}_X$ eine beliebige Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$, dann gilt $\mathcal{O}_\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$. Wir nennen $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ die durch die Subbasis $\mathcal{S}$ definierte Topologie.*

Insbesondere ist $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ die *kleinste* oder *gröbste* Topologie auf X, bezüglich der alle Mengen der Subbasis $\mathcal{S}$ offen sind. In Übung 1.128 sehen wir, dass man Konvergenz von Folgen in X und Stetigkeit von Abbildungen nach X allein anhand der Elemente einer Subbasis überprüfen kann.

Beweis. Zu (1). Die Menge $\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \;\middle|\; \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\}$ enthält $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und erfüllt Axiom (3) in Definition 1.9. Nach Voraussetzung gilt $X = \bigcap \emptyset \subset \mathcal{O}$, somit ist auch Axiom (1) erfüllt. Um

Axiom (2) zu zeigen, seien $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k \subset \mathcal{B}$, dann folgt

$$\Big(\bigcup \mathcal{U}_1\Big) \cap \cdots \cap \Big(\bigcup \mathcal{U}_k\Big) = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}_k} U_1 \cap \cdots \cap U_k \,.$$

Nach Voraussetzung gilt $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$ für alle Terme auf der rechten Seite, und da Axiom (3) gilt, auch für deren Vereinigung. Also ist $\mathcal{O}$ eine Topologie.

Man sieht leicht, dass jede Topologie $\mathcal{O}'$, die $\mathcal{B}$ enthält, alle offenen Mengen aus $\mathcal{O}$ enthalten muss, also folgt $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Wäre umgekehrt $U \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$, dann ließe U sich nicht als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{O}$ schreiben, $\mathcal{B}$ wäre dann also keine Basis von $\mathcal{O}'$. Also ist $\mathcal{O}_\mathcal{B} = \mathcal{O}$ die einzige Topologie mit Basis $\mathcal{B}$.

Zu (2) setze

$$\mathcal{B} = \big\{\, U_1 \cap \cdots \cap U_k \;\big|\; k \geq 0,\, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{S} \,\big\}\,,$$

dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Voraussetzung von (1) und definiert eine Topologie $\mathcal{O}_B$ mit Subbasis $\mathcal{S}$. Wie unter (1) lässt sich zeigen, dass das die einzige Topologie auf X mit Subbasis $\mathcal{S}$ ist; in der Tat enthält jede Topologie $\mathcal{O}_X$ mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ bereits $\mathcal{O}_\mathcal{S}$. □

1.e. Filter und Konvergenz

Wir kommen auf das Problem zurück, dass Satz 1.38 nur für Räume gilt, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Als Alternative zum Versuch, eine Topologie mittels konvergenter Folgen zu beschreiben, betrachten wir jetzt die Konvergenz von Filtern. Wir benutzen diesen Begriff später auch, um den Satz von Tychonoff zu beweisen.

Um zu verstehen, warum sich eine Topologie nicht immer nur mit Hilfe von Folgen beschreiben lässt, konstruieren wir zunächst einen Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt. Dazu betrachten wir die Ordnungstopologie auf einer wohlgeordneten Menge, die eine überabzählbare Ordinalzahl enthält.

1.41. Bemerkung. Es sei X eine Menge mit einer Ordnung $\prec$, das heißt, es gilt

(1) *Totalität* und *Antisymmetrie.* Für $x, y \in X$ gilt genau eine der drei Aussagen $x \prec y$, $y \prec x$ oder $x = y$.
(2) *Transitivität.* Für $x, y, z \in X$ implizieren $x \prec y$ und $y \prec z$, dass $x \prec z$.

Dann definieren wir die Ordnungstopologie „$\mathcal{O}_\prec$“ als die Topologie mit der Subbasis

$$\mathcal{S}_\prec = \big\{\, (-\infty, x) \;\big|\; x \in X \,\big\} \cup \big\{\, (x, \infty) \;\big|\; x \in X \,\big\}\,,$$
$$\text{wobei} \qquad (-\infty, x) = \big\{\, y \in X \;\big|\; y \prec x \,\big\} \qquad \text{und} \qquad (x, \infty) = \big\{\, y \in X \;\big|\; x \prec y \,\big\}\,.$$

Dabei sind „$\pm\infty$“ hier zwei Symbole, keine Elemente von X. Endliche Durchschnitte solcher Mengen liegen entweder wieder in $\mathcal{S}$ oder sind von der Form

$$(x, y) = \big\{\, z \in X \;\big|\; x \prec z \text{ und } z \prec y \,\big\}\,.$$

Als Beispiel erhalten wir auf $\mathbb{R}$ mit der üblichen Anordnung „$<$“ genau die Standardtopologie. Trotz der ähnlichen Bezeichnung ist das hier jedoch nicht die Topologie aus Übung 1.124.

Wir machen jetzt noch folgende Zusatzannahmen.

(3) *Wohlordnung.* Jede nichtleere Teilmenge von X enthält ein kleinstes Element.
(4) *Kleinste überabzählbare Ordinalzahl.* Es gibt ein Element $\omega_1 \in X$, so dass $(-\infty, \omega_1)$ überabzählbar ist, aber für alle $x \prec \omega_1$ die Teilmenge $(-\infty, x)$ abzählbar ist.

In $(\mathbb{R}, <)$ sind diese beiden Annahmen offensichtlich nicht erfüllt. In $(\mathbb{N}, <)$ gilt immerhin (3). In einer Vorlesung über Mengenlehre lernt man mehr über wohlgeordnete Mengen und Ordinalzahlen.

Der Abschluss der Menge $U = (-\infty, \omega_1)$ enthält das Element ω_1. Denn sei ω_1 Element einer Basismenge B der Form (x, y) mit $x \in X \cup \{-\infty\}$ und $y \in X \cup \{\infty\}$, dann ist wegen (4) die Teilmenge $(x, \omega_1) = B \cap U$ überabzählbar, also insbesondere nicht leer.

Sei andererseits $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U, die gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert. Wegen (3) gib es ein kleinstes Element $x' \in X \setminus \big((-\infty, x) \cup \{x\}\big)$, somit liegen fast alle Glieder der Folge in der Umgebung $(-\infty, x')$ von x, ohne Einschränkung gelte also $x_n \prec x'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $x_n \prec x$ oder $x_n = x$. Sei andererseits $y \prec x$, dann folgt $y \prec x_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt somit

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (-\infty, x_n) = (-\infty, x) \; .$$

Als Vereinigung einer abzählbaren Familie abzählbarer Mengen ist $(-\infty, x)$ selbst abzählbar, also $x \prec \omega_1$ wegen (4). Die Menge $U \subset X$ ist somit folgenabgeschlossen, aber nicht abgeschlossen.

Um im obigen Beispiel mit so etwas wie Folgen argumentieren zu können, könnten wir anstelle von Folgen also Familien mit beliebige großen „gerichteten“ Indexmengen betrachten. Das führt auf den Begriff eines „Netzes“, den wir hier aber nicht einführen wollen. Alternativ kann man auch Systeme aus immer kleineren Teilmengen eines Raumes X betrachten. Dahinter steht eine ähnliche Idee wie bei der Intervallschachtelung in der Analysis. Anschaulich wäre hierfür wohl der Begriff „Trichter“, es hat sich aber ein anderer Name durchgesetzt.

1.42. Definition. Es sei X eine Menge. Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \text{ und } X \in \mathcal{F} \; , \tag{1}$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } B \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{F} \; , \tag{2}$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } A \subset B \subset X \quad \Longrightarrow \quad B \in \mathcal{F} \; . \tag{3}$$

Ein Filter heißt *frei,* wenn $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$. Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Filter auf X mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, dann heißt $\mathcal{G}$ *feiner* als $\mathcal{F}$.

1.43. Beispiel. Es folgen einige nicht ganz unwichtige Beispiele.

(1) Sei $A \subset X$ nicht leer, dann ist
$$\mathcal{F}_A = \big\{\, B \subset X \;\big|\; A \subset B \,\big\}$$
ein Filter auf X. Er ist nie frei.

(2) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann bilden die Umgebungen von x einen Filter $\mathcal{U}_x$, den *Umgebungsfilter* von x. Er ist ebenfalls nie frei.

(3) Es sei X eine unendliche Menge. Betrachte
$$\mathcal{F} = \big\{\, A \subset X \;\big|\; X \setminus A \text{ ist endlich} \,\big\} \; .$$
Dann ist $\mathcal{F}$ der sogenannte *koendliche* Filter auf X. Er ist immer frei, und möglicherweise das einfachste Beispiel eines freien Filters.

(4) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X induziert einen Filter
$$\mathcal{F}_{(x_n)_n} = \big\{\, A \subset X \;\big|\; \text{es gibt } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } x_n \in A \text{ für alle } n \geq n_0 \,\big\} \; .$$
Teilfolgen induzieren feinere Filter.

Wir wollen Grenz- und Häufungspunkte von Filtern so definieren, dass der Filter $\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ aus Beispiel 1.43 (4) genau dann einen Grenz- oder Häufungspunkt hat, wenn das entsprechende für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt. Dabei heißt ein Punkt $x \in X$ *Häufungspunkt* einer Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von x ein x_i liegt mit $i \geq n$. Insbesondere sind Grenzwerte von Teilfolgen immer Häufungspunkte.

1.44. Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.

(1) Dann heißt $x \in X$ ein *Grenzwert* von $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{F}$ den Umgebungsfilter $\mathcal{U}_x$ von x enthält. Man sagt auch, dass $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert, kurz $\mathcal{F} \to x$.
(2) Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $\mathcal{F}$, wenn $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}_x$ und alle $F \in \mathcal{F}$ gilt.

In Übung 1.130 sehen wir, dass sich diese Definition für Filter, die von Folgen wie in Beispiel 1.43 (4) induziert werden, genau wie erwartet verhält. Wenn X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist ein Punkt $x \in X$ genau dann Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge gegen x konvergiert. Bei Filtern gilt das analoge Resultat immer.

1.45. Satz. *Ein Punkt x in einem topologischen Raum X ist genau dann Häufungspunkt eines Filters $\mathcal{F}$ auf X, wenn es einen feineren Filter $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ gibt, der gegen x konvergiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Es sei $x \in X$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Dann enthält der feinere Filter

$$\mathcal{G} = \left\{ G \subset X \;\middle|\; \text{es gibt } U \in \mathcal{U}_x \text{ und } F \in \mathcal{F} \text{ mit } U \cap F \subset G \right\}$$

den gesamten Umgebungsfilter $\mathcal{U}_x$, konvergiert also gegen x.

„$\Longleftarrow$“: Es sei $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ ein feinerer Filter, der gegen x konvergiert. Für $U \in \mathcal{U}_x$ und $F \in \mathcal{F}$ folgt U, $F \in \mathcal{G}$, also auch $U \cap F \in \mathcal{G}$, und somit $U \cap F \neq \emptyset$. □

Als nächstes wollen wir Abbildungen $F\colon X \to Y$ auf Filter anwenden. Im Falle einer Folge in X reicht es, F auf jedes Folgenglied einzeln anzuwenden, um eine Folge in Y zu erhalten. Im Falle von Filtern überlegen wir uns, dass F durch das zweifache Bilden von Urbildern die folgenden Abbildungen induziert:

$$F^{-1}\colon \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X \qquad \text{und} \qquad (F^{-1})^{-1}\colon \mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}\mathcal{P}Y\ .$$

Das führt auf die folgende Definition.

1.46. Definition. Es sei $F\colon X \to Y$ eine Abbildung von Mengen und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann definieren wir den *Bildfilter* $F\mathcal{F}$ auf Y durch

$$F\mathcal{F} = \left\{ V \subset Y \;\middle|\; F^{-1}(V) \in \mathcal{F} \right\}.$$

1.47. Bemerkung. In den Übungen überprüfen wir die folgenden Aussagen.

(1) Es sei $F\colon X \to Y$ eine Abbildung von Mengen und $\mathcal{F}$ ein Filter auf F. Dann gilt

$$F\mathcal{F} = \left\{ V \subset Y \;\middle|\; \text{es gibt } U \in \mathcal{F} \text{ mit } F(U) \subset V \right\} \subset \mathcal{P}Y\ .$$

(2) Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Abbildung $x_\bullet\colon \mathbb{N} \to X$. Dann ist der von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induzierte Filter $\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ aus Beispiel 1.43 (4) gerade das Bild des koendlichen Filters auf $\mathbb{N}$ aus Beispiel 1.43 (3) unter der Abbildung $x_\bullet$.
(3) Die Bildfolge $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y induziert genau den Bildfilter $F\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ auf Y.

Die letzte Bemerkung könnte uns verleiten, anstelle von „Folgenstetigkeit“ den Begriff „Filterstetigkeit“ einzuführen. Der folgende Satz zeigt, dass wir diesen Begriff bereits kennen.

1.48. Satz. *Es sei $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Abbildung F ist am Punkt x stetig.*
(2) *Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \to x$ gilt $F\mathcal{F} \to F(x)$.*
(3) *Das Bild des Umgebungsfilters $\mathcal{U}_x$ konvergiert gegen $F(x)$.*

Selbstverständlich bleiben die Aussagen äquivalent, wenn wir vor jede noch „Für alle $x \in X$“ dazuschreiben. Wir sehen also, dass Filterstetigkeit (im Gegensatz zur Folgenstetigkeit) äquivalent zu Stetigkeit ist. Außerdem sehen wir, dass der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_x$ ausreicht, um Stetigkeit bei x zu testen. Wenn wir Folgenstetigkeit bei x prüfen wollen, reicht eine einzelne Folge dazu in der Regel nicht aus.

Beweis. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Es sei F stetig bei x und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der gegen x konvergiert. Nach Definition 1.44 (1) ist $\mathcal{U}_{F(x)} \subset F\mathcal{F}$ zu zeigen. Sei also $V \in \mathcal{U}_{F(x)}$, das heißt, $V \in Y$ ist eine Umgebung von $F(x)$. Da F stetig bei x ist, ist $F^{-1}(V)$ Umgebung von x, also $F^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert. Nach Definition 1.46 folgt $V \in F\mathcal{F}$, was zu zeigen war.

Die Richtung „(2) $\Rightarrow$ (3)“ gilt, da $\mathcal{U}_x$ nach Definition 1.44 (1) gegen x konvergiert.

Zu „(3) $\Rightarrow$ (1)“ sei $V \subset Y$ eine Umgebung von $F(x)$. Zu zeigen ist, dass $F^{-1}(V)$ Umgebung von x ist. Nach Annahme gilt $V \in F\mathcal{U}_x$, also $F^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$ nach Definition 1.46. Aber dann ist $F^{-1}(V)$ eine Umgebung von x, was zu zeigen war. □

Tatsächlich bestanden alle Beweise in diesem Abschnitt allein daraus, Definitionen korrekt aufzuschlüsseln. So gesehen sind Filter zunächst einmal nur eine (zugegeben nicht offensichtliche) Verallgemeinerung von Folgen, mit denen sich viele grundlegende Konzepte der Topologie äquivalent umformulieren lassen. Die wirkliche Stärke dieses Kozeptes lernen wir erst in Abschnitt 1.h kennen, wenn wir den Satz von Tychonoff beweisen.

1.f. Unterräume und Produkte

In diesem Abschnitt betrachten wir zum einen die Unterraum- oder Relativtopologie, die aus Analysis II möglicherweise schon bekannt ist. Zum anderen betrachten wir beliebige (also auch unendliche) Produkte topologischer Räume. Die Definition der Topologie auf dem Produktraum ist dabei vielleicht etwas unerwartet — es gibt andere Definitionen, die auf den ersten Blick genauso gut aussehen. Wir begründen die Definition unten zum einen damit, dass die Produkttopologie einige sehr schöne Eigenschaften hat. Zum anderen ist sie eine Verallgemeinerung der „Topologie der punktweisen Konvergenz“. Und schließlich ist es genau diese Topologie, mit der wir später den Satz von Tychonoff formulieren und beweisen können.

Außerdem lernen wir in diesem Abschnitt „universelle“ und „charakteristische“ Eigenschaften kennen. Eine charakteristische Eigenschaft beschreibt eine bestimmte Topologie auf einer gegebenen Menge eindeutig, und zwar nur dadurch, dass wir angeben, welche Abbildungen von Mengen stetig sein sollen. Eine universelle Eigenschaft beschreibt völlig analog ein Objekt in einer beliebigen Kategorie (hier $\mathcal{T}op$, siehe Beispiel 1.20 (4)), und zwar bis auf eindeutige Isomorphismen.

1.49. Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$. Die *Unterraumtopologie* (auch *Relativ-* oder *Spurtopologie*) $\mathcal{O}_Y$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \left\{ Y \cap U \;\middle|\; U \in \mathcal{O}_X \right\} .$$

Man überlegt sich, dass $\mathcal{O}_Y$ eine Topologie ist, denn

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{O}_Y , \qquad Y = Y \cap X \in \mathcal{O}_Y ,$$

$$(Y \cap U_1) \cap \cdots \cap (Y \cap U_k) = Y \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \in \mathcal{O}_Y \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Y \cap U) = Y \cap \bigcup \mathcal{U}$$

für alle $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$.

1.50. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$ versehen mit der Unterraumtopologie $\mathcal{O}_Y$. Dann gilt:*

(1) *$\mathcal{O}_Y$ ist die gröbste Topologie auf Y, für die die Inklusion $\iota \colon Y \hookrightarrow X$ stetig ist.*

(2) *$\mathcal{O}_Y$ ist die einzige Topologie, für die eine Abbildung F von einem beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ nach Y genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $\iota \circ F \colon Z \to X$ stetig ist.*

BEWEIS. Da $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ gilt, folgt (1) bereits aus der Definition von $\mathcal{O}_Y$.

Zu (2) sei zunächst $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein beliebiger topologischer Raum, und sei $F \colon Z \to Y$ eine Abbildung. Für eine offene Menge $V = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$ gilt

$$F^{-1}(V) = F^{-1}\big(\iota^{-1}(U)\big) = (\iota \circ F)^{-1}(U) \,,$$

also ist F genau dann stetig bezüglich $\mathcal{O}_Y$, wenn $\iota \circ F$ stetig ist bezüglich $\mathcal{O}_X$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}_Y$ die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist, wählen wir eine beliebige Topologie $\mathcal{O}$ auf Y, die die in (2) geforderte Eigenschaft besitzt. Da $\mathrm{id} \colon (Y, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig ist, ist dann auch $\iota = \iota \circ \mathrm{id} \colon (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ stetig. Aber da $\mathcal{O}_Y$ diese Eigenschaft auch hat, ist somit auch $\mathrm{id}_Y \colon (Y, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig. Die folgenden Diagramme erklären die beiden Beweisschritte.

Mit vertauschten Rollen folgt analog die Stetigkeit von $\mathrm{id}_Y \colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O})$, und $\mathcal{O}$ ist sowohl gröber als auch feiner als $\mathcal{O}_Y$ nach Bemerkung 1.23. Also stimmen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_Y$ überein. □

Aus dem Beweis ergibt sich, dass die charakteristische Eigenschaft (2) ausreicht, um die Unterraumtopologie eindeutig festzulegen. Ihre Existenz mussten wir aber „von Hand“ zeigen.

Wir können jetzt die fehlenden Details im Satz 1.32 von Tietze nachtragen. Die Aussage „$g \colon A \to \mathbb{R}$ ist stetig“ bezieht sich auf die Unterraumtopologie auf $A \subset X$. Und im Beweis betrachten wir abgeschlossene Teilmengen B_n, $C_n \subset A$ von A. Das heißt, es gibt eine abgeschlossene Teilmengen E_n, $F_n \subset X$ mit $B_n = A \cap E_n$ und $C_n = A \cap F_n$. Da A in X abgeschlossen ist, sind folglich B_n und C_n auch in X abgeschlossen, und wir dürfen das Lemma von Urysohn auf X anwenden.

1.51. DEFINITION. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine *Einbettung* von X nach Y ist eine injektive Abbildung $F \colon X \hookrightarrow Y$, so dass die induzierte Abbildung von $(X, \mathcal{O}_X)$ nach $F(X) \subset Y$ mit der Unterraumtopologie ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt die Produkttopologie. Dazu bezeichnen wir mit

$$\prod_i X_i = \big\{\, (x_i)_{i \in I} \;\big|\; x_i \in X_i \,\big\}$$

das kartesische Produkt einer Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Mengen über einer beliebigen Indexmenge I, und mit $\pi_j \colon X \to X_j$ die Projektion auf die j-te Komponente, so dass $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$.

1.52. DEFINITION. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das *topologische Produkt* der X_i ist definiert als

$$\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \Big(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcap \Big) \,,$$

wobei $\mathcal{O}_\sqcap$ erzeugt wird von der Subbasis

$$\mathcal{S}_\sqcap = \big\{\, \pi_i^{-1}(U_i) \;\big|\; i \in I \text{ und } U_i \in \mathcal{O}_i \,\big\} \,.$$

Da wir $\mathcal{O}_\sqcap$ mit Hilfe einer Subbasis erklärt haben, wissen wir aus Satz 1.40, dass $\mathcal{O}_\sqcap$ eine Topologie ist. Ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{S}_\sqcap$ hat die Gestalt

$$\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i) \qquad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \,.$$

Mit anderen Worten: eine Teilmenge $U \subset \prod_i X_i$ ist genau dann offen, wenn jeder Punkt x eine Umgebung der obigen Form hat.

1.53. Satz. *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume.*

(1) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcap$ ist die gröbste Topologie auf $\prod_i X_i$, für die alle Abbildungen $\pi_i \colon \prod_i X_i \twoheadrightarrow X_i$ stetig sind.*
(2) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcap$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf dem kartesischen Produkt $\prod_i X_i$, so dass eine Abbildung G von einem beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ in das Produkt $\prod_i X_i$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $\pi_i \circ G$ für alle $i \in I$ stetig sind.*
(3) *Der Raum $(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcap)$ zusammen mit den Abbildungen $(\pi_i \colon \prod_i X_i \twoheadrightarrow X_i)_{i\in I}$ ist ein* Produkt *in der Kategorie Top, das heißt, zu jedem topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und jeder Familie stetiger Abbildungen $(G_i \colon Z \to X_i)_{i\in I}$ existiert genau eine stetige Abbildung $G \colon Z \to Y$, so dass $G_i = \pi_i \circ G$ für alle $i \in I$.*

1.54. Bemerkung. Die charakterisierende Eigenschaft (2) des Produkts wird durch das linke Diagramm veranschaulicht. In der rechten unteren Ecke steht eigenlich für jedes $i \in I$ ein separater Eintrag, mit separaten Abbildungen von den beiden anderen Objekten im Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} & & \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}\right) \\ & \overset{G}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow[\pi_i \circ G]{} & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ & \overset{G}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \eta_i} \\ (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow[G_i]{} & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{array} \tag{1.1}$$

Im Gegensatz dazu zeigt das rechte Diagramm die universelle Eigenschaft (3). Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit stetigen Abbildungen $\eta_i \colon Y \to X_i$ ist genau dann ein Produkt im Sinne von Satz 1.53 (3), wenn für alle $(Z, \mathcal{O}_Z)$ mit stetigen Abbildungen $G_i \colon Z \to X_i$ genau eine stetige Abbildung G wie im rechten Diagramm existiert.

Ein typisches Beispiel dafür ist $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Aus Analysis II wissen Sie, dass eine Abbildung f in den $\mathbb{R}^n$ genau dann stetig (oder beispielsweise auch differenzierbar) ist, wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ alle stetig (beziehungsweise differenzierbar) sind.

Das Produkt ist durch (3) bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt. Wenn also ein anderer Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit Abbildungen $(\eta_i \colon Y \to X_i)_i$ die Produkteigenschaft erfüllt, dann gibt es genau einen Homöomorphismus $G \colon Y \to \prod_i X_i$ mit $\eta_i = \iota_i \circ G$ für alle i. Dazu betrachten wir die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{array}{ccc} & & \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}\right) \\ & \overset{G}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow[\eta_i]{} & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ & \overset{H}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \eta_i} \\ \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}\right) & \xrightarrow[\pi_i]{} & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}\right) \\ & \overset{H \circ G}{\nearrow}_{\mathrm{id}} & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}\right) & \xrightarrow[\pi_i]{} & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ & \overset{G \circ H}{\nearrow}_{\mathrm{id}} & \big\downarrow{\scriptstyle \eta_i} \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow[\eta_i]{} & (X_i, \mathcal{O}_i) \end{array}$$

Die ersten beiden Diagramme zeigen die Existenz eindeutiger Abbildungen G und H, die letzten zwei Diagramme zeigen, dass H zu G invers ist, so dass G in der Tat ein Homöomorphismus ist. Da dieser Homöomorphismus stets eindeutig ist, kann man mit seiner Hilfe je zwei verschiedene Modelle für das Produkt miteinander identifizieren.

Man beachte, dass (geeignet formulierte) universelle Eigenschaften wie in Satz 1.53 (3) zwar die Eindeutigkeit der beschriebenen Objekte (bis auf eindeutige Isomorphismen) garantieren können, aber nicht die Existenz. Analog kann man in vielen Kategorien (wie $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$ oder $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$) Produkte definieren, muss deren Existenz aber jedesmal beweisen.

Beweis von Satz 1.53. Die Subbasis $\mathcal{S}_\sqcap$ enthält genau die Urbilder der offenen Teilmengen von X_i unter den Abbildungen π_i. Also sind alle π_i bezüglich einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}_\sqcap \subset \mathcal{O}$, und es folgt Behauptung (1).

Zu (2) sei G stetig. Dann sind auch die Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig nach (1).

Seien umgekehrt alle Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig. Nach Übung 1.128 folgt Stetigkeit von G bereits, wenn $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$ nur für alle $U \in \mathcal{S}_\sqcap$ gilt. Aber

$$G^{-1}\big(\pi_i^{-1}(U_i)\big) = (\pi_i \circ G)^{-1}U_i \in \mathcal{O}_Z$$

wegen Stetigkeit der Abbildungen $\pi_i \circ G$. Der Beweis der Eindeutigkeit ist analog zum Beweis des Satzes 1.50 (2).

Behauptung (3) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft des kartesischen Produkts von Mengen und Behauptung (2). □

1.55. Bemerkung. Die universelle Eigenschaft sagt, wann eine Abbildung in ein Produkt stetig ist. Sie sagt nichts über Abbildungen von einem Produkt in einen anderen Raum. Dazu erinnern wir uns an ein Beispiel aus der Analysis II. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Dann sind zwar $f(\,\cdot\,, y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x, \,\cdot\,)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle y beziehungsweise $x \in \mathbb{R}$ stetig, aber f nimmt in jeder Umgebung von 0 alle Werte zwischen -1 und 1 an, kann also bei 0 nicht stetig sein.

1.56. Bemerkung. Eine andere natürliche Topologie auf $\prod_i X_i$ ist die *Box-Topologie* $\mathcal{O}_\square$ mit Basis

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn die Indexmenge I unendlich ist und unendlich viele X_i nicht die Klumpentopologie tragen, ist $\mathcal{O}_\square$ echt feiner als $\mathcal{O}_\sqcap$. Diese Topologie hat leider nicht so schöne Eigenschaften wie $\mathcal{O}_\sqcap$, obwohl sie auf den ersten Blick einfacher aussieht. In Übung 1.140 fassen wir die Produkttopologie in dem Spezialfall, dass $X_i = X$ für alle $i \in I$, als *Topologie der punktweisen Konvergenz* von Folgen in $\mathrm{Abb}(I, X)$ auf. Wenn die Menge I unendlich ist, erhalten wir für die Boxtopologie einen sehr viel restriktiveren Konvergenzbegriff.

Wir sagen, dass eine topologische Eigenschaft E (wie etwa eine Trennungs- oder Abzählbarkeitseigenschaft) unter einer Konstruktion (wie etwa dem Produkt oder der Unterraumkonstruktion) *vererbt* wird, wenn immer dann, wenn alle zugrundeliegenden Topologien die Eigenschaft E haben, auch die neu konstruierte Topologie diese Eigenschaft hat.

1.57. Satz. (1) *Es werden (T0) – (T3), (T3a), (A1) und (A2) auf Unterräume vererbt.*
(2) *Es werden (T0) – (T3), (T3a) unter Produkten vererbt. Die Abzählbarkeitseigenschaften (A1) und (A2) werden vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

Beweis. Zu (1) betrachten wir nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome lassen sich analog beweisen. Sei also $A \subset Y$ abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf $Y \subset X$. Dann lässt sich $Y \setminus A$ zu einer offenen Teilmenge von X fortsetzen, deren Komplement B in X abgeschlossen ist mit $A = Y \cap B$. Sei $y \in Y \setminus A \subset X \setminus B$. Wir nehmen an, dass (T3) in X gilt und finden disjunkte

offene Mengen $U, V \subset X$ mit $y \in U$, $B \subset V$. Dann sind $Y \cap U$ und $Y \cap V$ in Y offen und disjunkt und trennen y und A. Zu (T3a) betrachte A, B und y wie oben. Wenn es eine Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $B \subset f^{-1}(0)$ und $f(y) = 1$ gibt, dann ist $f|_y$ stetig nach Satz 1.50 (2) und trennt y und A in Y.

Sei $\mathcal{U}_x$ abzählbare Umgebungsbasis von $x \in Y \subset X$ in X, dann ist

$$\{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x in Y. Genauso überträgt sich (A2) von X auf den Unterraum Y.

Zu (2) betrachten wir wieder nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome funktionieren analog. Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_y)$ erfüllt (T3) genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U von $y \in Y$ eine abgeschlossene Umgebung A mit $y \in A \subset U$ gibt. Denn wenn (T3) gilt und U Umgebung von y ist, dann ist auch das Innere $\mathring{U}$ Umgebung von y. Wir trennen $B = Y \setminus \mathring{U}$ von y durch disjunkte offene Mengen V, $W \subset X$. Dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossene Umgebung, da $y \in W \subset Y \setminus V$, und es gilt $Y \setminus V \subset \mathring{U} = Y \setminus B \subset U$. Die Umkehrung gilt analog.

Sei also $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ und sei U Umgebung von x. Nach Definition 1.52 und der Konstruktion im Beweis von Satz 1.40 (2) existieren $U_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$ mit

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U \tag{*}$$

Nach unserer obigen Überlegung existieren abgeschlossene Umgebungen $A_{ij} \subset U_{ij}$ von x_{ij}, und

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{ij}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \subset U$$

ist eine abgeschlossene Umgebung von x in $\prod_{i\in I} X_i$. Also gilt (T3).

Zu (T3a) sei $x \in \prod_{i\in I} X_i$ wie oben und $B \subset \prod_{i\in I} X_i$ abgeschlossen. Setze $U = \prod_{i\in I} X_i \setminus B$. Dann existieren $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ wie in (*). Also gibt es Funktionen

$$f_{i_j}\colon X_{i_j} \to [0,1] \qquad \text{mit} \qquad f_{i_j}\,|_{X_{i_j}\setminus U_{i_j}} = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{i_j}(x_{i_j}) = 1\,.$$

Dann sind die $f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$ nach Satz 1.53 (2) stetig, und

$$f = \min\bigl(f_{i_1} \circ \pi_{i_1}, \dots, f_{i_k} \circ \pi_{i_k}\bigr)\colon \prod_{i\in I} X_i \to [0,1]$$

ist als Minimum endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetig mit $f(x) = 1$ und

$$B \subset X \setminus \bigl(\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\bigr) \subset f^{-1}(0)\,.$$

Sei schließlich I höchstens abzählbar und $\mathcal{B}_i$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}_i$. Dann erhalten wir eine abzählbare Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}\mathcal{B}_i$$

von $\mathcal{O}_\sqcap$, denn jedes Element $\pi_i^{-1}(U)$ von $\mathcal{S}_\sqcap$ lässt sich als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{S}$ schreiben. Dann ist aber auch die Basis

$$\mathcal{B} = \bigl\{U_1 \cap \dots \cap U_k \;\big|\; k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}\bigr\}$$

von $\mathcal{O}_\sqcap$ abzählbar. Also wird (A2) und analog auch (A1) unter abzählbaren Produkten vererbt. □

Normalität wird unter Produkten und Unterräumen nicht vererbt, also auch nicht (T4). Die Gegenbeispiele können keine metrischen Räume sein, da sich Metriken auf Unterräume und endliche, ja sogar abzählbare Produkte übertragen lassen (Übungen 1.133, 1.135, 1.139), womit diese nach Satz 1.25 wieder normal sind. Dann dürfen unsere Räume auch (A2) nicht erfüllen, da sie sonst nach Bemerkung 1.39 metrisierbar wären. Wir besprechen diese Gegenbeispiele daher nicht hier, sondern verweisen auf [**Que**], [**SS**] und Übung 1.148 (5).

1.g. Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass abgeschlossene Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ viele schöne Eigenschaften haben: stetige Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ besitzen auf I ein Maximum und ein Minimum, und jede Folge $(x_i)_i$ in I hat mindestens einen Häufungspunkt. Der Grund dafür ist der Satz von Heine-Borel, nach dem abgeschlossene Intervalle kompakt sind.

Wir lernen drei mögliche Definitionen von Kompaktheitheit kennen. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ mit $\bigcup \mathcal{U} = X$.

1.58. Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X

(1) *quasikompakt,* wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, eine Menge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ mit $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$,
(2) *kompakt,* wenn er Hausdorffsch und quasikompakt ist,
(3) *abzählbar kompakt,* wenn X Hausdorffsch ist und es zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, $X = \bigcup_{i=0}^{N} U_i$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und
(4) *folgenkompakt,* wenn X Hausdorffsch ist und jede Folge $x_i \in X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

In der Literatur wird teilweise die Hausdorff-Eigenschaft in (2)–(4) nicht verlangt.

1.59. Bemerkung. Es folgen einige wohlbekannte Eigenschaften kompakter Mengen.

(1) Abgeschlossene Unterräume eines (abzählbar / folgen-) kompakten Raumes sind wieder (abzählbar / folgen-) kompakt. Denn sei etwa X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen und $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von A, dann existiert $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ mit
$$\mathcal{V} = \left\{ U \cap A \;\middle|\; U \in \mathcal{U} \right\}.$$
Dann ist aber $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ offene Überdeckung von X, und eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$ liefert uns auch eine endliche Teilüberdeckung von A, nämlich
$$\left\{ U \cap A \;\middle|\; U \in \mathcal{U}' \right\}.$$
(2) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ (abzählbar / folgen-) kompakt, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Hausdorff-Raum und $F\colon X \to Y$ stetig, dann ist das Bild $\operatorname{im} F \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, wieder (abzählbar / folgen-) kompakt (Übung 1.141).
(3) Sei $(X, \mathcal{O})$ (abzählbar / folgen-) kompakt, und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt und nimmt sein Maximum an. Dazu kombinieren wir (2) mit den Sätzen 1.61 und 1.62 unten.
(4) Jeder kompakte Raum ist normal (Übung 1.142).
(5) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, und sei $Y \subset (X, \mathcal{O}_X)$ kompakt in der Unterraumtopologie, dann ist $Y \subset X$ abgeschlossen.

1.60. Satz. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum.*

(1) *Wenn X kompakt oder folgenkompakt ist, ist X auch abzählbar kompakt.*
(2) *Es ist X genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.*
(3) *Wenn X abzählbar kompakt ist und (A1) erfüllt, ist X folgenkompakt.*
(4) *Wenn X abzählbar kompakt ist und (A2) erfüllt, dann ist X kompakt.*

Die Punkte (2) und (3) zeigen wieder einmal, dass man mit Folgen vorsichtig umgehen muss, wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Wir fassen den obigen Satz in einem Diagramm zusammen.

$$\text{kompakt} \overset{\text{(A2)}}{\underset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} \text{abzählbar kompakt} \overset{\text{(A1)}}{\underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}} \text{folgenkompakt}$$

Wir betrachten im Folgenden vor allem kompakte Räume. In der Analysis ist hingegen der Begriff der Folgenkompaktheit wichtiger.

Beweis von Satz 1.60. In (1) ist nur zu zeigen, dass jeder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist, die andere Aussage ist klar. Sei also $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir dürfen außerdem annehmen, dass

$$U_i \not\subset \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, andernfalls lassen wir U_i weg und gehen zu einer kleineren Teilüberdeckung über. Wir wählen also eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j \ .$$

Sei $x \in X$ ein Häufungspunkt (z.B. der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), dann gilt $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, also liegen unendlich viele Folgenglieder in U_{i_0}, im Widerspruch zur Konstruktion.

Zu (2) zeigen wir, dass jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem abzählbar kompakten Raum X einen Häufungspunkt besitzt, die Rückrichtung folgt wie in (1). Sei $A_n = \overline{\{\, x_i \mid i \geq n \,\}} \neq \emptyset$, dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ die Menge aller Häufungspunkte. Wenn wir annehmen, dass $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, sei $U_n = X \setminus A_n$, dann ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X mit $U_m \subset U_n$ für alle $m,\ n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Es folgt, dass $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $A_n \neq \emptyset$.

Zu (3) wähle nach (2) einen Häufungspunkt x der Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wenn (A1) erfüllt ist, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von x, und wie im Beweis von Satz 1.38 dürfen wir annehmen, dass $V_j \subset V_i$ für alle $i,\ j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$. Um eine Teilfolge mit Grenzwert x zu konstruieren, setzen wir $i_0 = 1$ und wählen induktiv $i_j > i_{j-1}$ für $j \geq 1$ so, dass $x_{i_j} \in V_j$. Aus $V_j \subset V_i$ für alle $i < j$ folgt $x_{i_k} \in V_j$ für alle $k \geq j$, also konvergiert $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Für (4) nehmen wir an, dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine beliebige offene Überdeckung ist, und dass $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}$ ist. Wenn wir eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ konstruieren können, folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung aus der Annahme, dass X abzählbar kompakt ist. Wir wählen jetzt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Menge $U_i \in \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$, so dass $V_i \subset U_i$, falls eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $V_i \subset U$ existiert, und $U_i = \emptyset$ sonst. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X war, muss dann auch $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung sein, denn jeder Punkt $x \in X$ ist in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten, und es existiert also ein i mit $x \subset V_i \subset U$. Elimination aller Indizes i mit $U_i = \emptyset$ liefert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von X, nach Voraussetzung existiert also auch eine endliche Teilüberdeckung. □

Es folgen einige weitere Sätze aus der Analysis, die wir nicht noch einmal beweisen wollen.

1.61. Satz. *Für einen metrischen Raum sind die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.*

1.62. Satz (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

1.63. Satz (Lebesgue-Zahl). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in K$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \cap K \subset U$ existiert.*

Schließlich führen wir noch den Begriff der lokalen Kompaktheit ein.

1.64. Definition. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt,* wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

1.65. Beispiel. (1) Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind lokalkompakt, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ jedoch nicht.
(2) Es sei K kompakt und $U \subset K$ offen, dann ist U lokalkompakt nach Übung 1.143.

Wir können in Beispiel 1.65 (2) den Spieß umdrehen und fragen, ob jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum Unterraum eines kompakten Raumes ist.

1.66. Definition. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Unter einer *Kompaktifizierung* von X versteht man eine Einbettung von X in einen kompakten Raum K, so dass das Bild von X dicht liegt.

Die Dichtheit ist dabei keine wirkliche Einschränkung. Sei etwa $\iota\colon X \to K$ eine Einbettung von X in ein Kompaktum X. Dann ist der Abschluss $\overline{\operatorname{im}\iota}$ des Bildes wieder kompakt, und $X \subset \overline{\operatorname{im}\iota}$ ist dicht.

In vielen Bereichen der Analysis und Geometrie interessiert man sich für Kompaktifizierungen. Oftmals stellt man dabei bestimmte Anforderungen an den Raum K, die sich aus dem jeweiligen Problem ergeben. Wir geben hier nur eine sehr einfache Kompaktifizierung an, in gewissem Sinne die einfachst mögliche. Den Gegenpol bildet die Stone-Čech-Kompaktifizierung, die wir in Abschnitt 1.h kennenlernen, mehr dazu in Bemerkung 1.74.

1.67. Satz (Alexandroff- oder Ein-Punkt-Kompaktifizierung). *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\infty \notin X$ ein zusätzlicher Punkt. Dann definiert*

$$\mathcal{O}_{\dot{X}} = \mathcal{O} \cup \left\{ \{\infty\} \cup X \setminus K \;\middle|\; K \subset X \text{ kompakt} \right\}$$

eine kompakte Topologie auf $\dot{X} = X \cup \{\infty\}$. Wenn X selbst nicht kompakt war, liegt X dicht in $\dot{X}$.

Die stereographische Projektion zeigt, dass S^n homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist, siehe Übung 1.144.

Beweis. Die Axiome einer Topologie lassen sich leicht überprüfen. Sei jetzt $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\dot{X}$, dann gibt es mindestens ein $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U$. Dann ist $K = \dot{X} \setminus U_0 \subset X$ nach Konstruktion kompakt, und wir erhalten eine offene Überdeckung

$$\dot{\mathcal{U}} = \left\{ K \cap U \;\middle|\; U \in \mathcal{U} \right\}$$

von K. Sei $K = (K \cap U_1) \cup \cdots \cup (K \cap U_n)$ eine endliche Teilüberdeckung, dann folgt $\dot{X} = U_0 \cup \cdots \cup U_n$. Also ist $\dot{X}$ quasikompakt. Die Hausdorff-Eigenschaft ist ebenfalls leicht zu überprüfen.

Da $\dot{X}$ nur einen Punkt mehr als X enthält, liegt X genau dann dicht in $\dot{X}$, wenn $X \subset \dot{X}$ nicht abgeschlossen ist. Da abgeschlossene Unterräume kompakter Räume wieder kompakt sind, trifft das genau dann zu, wenn X selbst nicht kompakt ist. □

Man kann fragen, ob die Alexandroff-Kompaktifizierung *funktoriell* ist, das heißt, ob es zu jeder stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ eine stetige Fortsetzung $\dot{f}\colon \dot{X} \to \dot{Y}$ mit $\dot{f}|_X = f$ und $f(\infty_X) = \infty_Y$ gibt, wobei ∞_X, ∞_Y die zusätzlichen Punkte bezeichne. Nach Konstruktion ist $\dot{f}$ genau dann stetig bei ∞_X, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

1.68. Definition. Eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich,* wenn die Urbilder aller kompakten Teilmengen wieder kompakt sind.

1.h. Produkte kompakter Räume

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Tychonoff, wonach beliebige Produkte kompakter Räume wieder kompakt sind. Es handelt sich hier um einen der tieferen Sätze dieser Vorlesung, auch wenn der Beweis am Ende relativ kurz sein wird. Das liegt daran, dass wir einen Großteil der Schwierigkeit in den Begriff des Ultrafilters und die Charakterisierung kompakter Mengen verschieben. Wir brauchen hier das Auswahlaxiom in Gestalt des Lemmas von Zorn, um zu zeigen, dass jeder Filter zu einem Ultrafilter verfeinert werden kann. Man kann sogar zeigen, dass das Auswahlaxiom zum Satz von Tychonoff äquivalent ist.

Der Satz von Tychonoff wird an manchen Stellen in der Mathematik benutzt. In der Funktionalanalysis zeigt man mit seiner Hilfe den Satz von Banach-Alaoglu, wonach der Einheitsball in einem Banach-Raum „schwach*-kompakt“ ist. Da man aber häufig mit Folgen argumentiert, braucht man stattdessen oft das Resultat, das der Einheitsball in einem Banach-Raum „schwach*-folgenkompakt“ ist, und das ist deutlich leichter zu zeigen. Wir konstruieren als Anwendung des Satzes von Tychonoff hier die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes. Im Gegensatz zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung besteht die Idee darin, so viele Punkte hinzufügen, dass sich jede stetige beschänkte Funktion auf die Kompaktifizierung fortsetzen lässt.

1.69. Definition. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X heißt *Ultrafilter,* wenn es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

1.70. Satz. *Es sei X eine Menge.*

(1) *Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf X lässt sich zu einem Ultrafilter verfeinern.*
(2) *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Zu (1) betrachten wir die Menge $\Phi \subset \mathcal{P}\mathcal{P}X$ aller Filter auf X, die feiner sind als $\mathcal{F}$. Sie wird durch die Relation „$\subset$“ geordnet. Jede totalgeordnete Teilmenge $\Psi \subset \Phi$ besitzt eine obere Schranke

$$\bigcup \Psi = \bigcup_{\mathcal{G} \in \Psi} \mathcal{G} \subset \mathcal{P}X \ ,$$

und $\bigcup \Psi$ ist wieder ein Filter. Nach dem Lemma von Zorn enthält Φ ein maximales Element, und das ist nach Definition ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ verfeinert.

Zu (2) betrachte $A \subset X$ und einen Filter $\mathcal{F}$. Wegen der Filteraxiome (1) und (2) kann es keine Elemente B, $C \in \mathcal{F}$ geben mit $B \subset A$ und $C \subset X \setminus A$, denn dann wäre $\emptyset = B \cap C \in \mathcal{F}$. Also gilt entweder $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, oder $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Ohne Einschränkung gelte ersteres. Dann betrachten wir einen neuen Filter

$$\mathcal{G} = \left\{ G \subset X \;\middle|\; \text{es gibt } F \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap F \subset G \right\} ,$$

der $\mathcal{F}$ verfeinert und A enthält. Wenn $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ uns damit insbesondere $A \in \mathcal{F}$. □

Der entscheidende Schritt im Beweis des Satzes von Tychonoff ist die folgende Charakterisierung quasikompakter Räume.

1.71. Proposition. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Der Raum X ist quasikompakt.*
(2) *Es sei $\mathcal{A}$ ein System abgeschlossener Teilmengen von X, so dass $\emptyset \neq A_1 \cap \cdots \cap A_k$ für je endlich viele $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$. Dann folgt $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{A}$.*
(3) *Jeder Ultrafilter auf X hat einen Grenzwert.*

Wir könnten einen Raum X "filterkompakt" nennen, wenn jeder Filter auf X eine konvergente Verfeinerung besitzt. Zusammen mit Satz 1.70 (1) zeigt die obige Proposition, dass überdeckungs- (quasi-) kompakt das gleiche wie filter- (quasi-) kompakt bedeutet.

Beweis. „(1) $\Leftrightarrow$ (2)": Hierzu benutzen wir, dass die offenen Mengen $X \setminus A$ für $A \in \mathcal{A}$ genau dann eine Überdeckung von X bilden, wenn $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ gilt. Entsprechendes gilt für eine endliche Auswahl dieser Mengen. Daher sind diese beiden Aussagen äquivalent.

„(2) $\Rightarrow$ (3)": Es sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Wir betrachten

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{F} \;\middle|\; A \text{ abgeschlossen} \right\} \subset \mathcal{F} .$$

Da $\mathcal{F}$ ein Filter ist, ist jeder endliche Durchschnitt von Elementen von $\mathcal{A}$ nicht leer, nach (2) existiert also mindestens ein Punkt $x \in \bigcap \mathcal{A}$. Es folgt $\mathcal{F} \to x$, denn sei $U \in \mathcal{U}_x$ Umgebung von U, dann ist $A = X \setminus \mathring{U}$ abgeschlossen mit $x \notin A$, folglich $A \notin \mathcal{A}$, und somit $A \notin \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathring{U} \in \mathcal{F}$ nach Satz 1.70 (2), und da $\mathring{U} \subset U$ auch $U \in \mathcal{F}$, was zu zeigen war.

„(3) $\Rightarrow$ (2)": Es sei $\mathcal{A}$ wie in (2) gegeben. Da endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{A}$ nie verschwinden, ist

$$\mathcal{G} = \left\{ U \subset X \;\middle|\; \text{es gibt } A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A} \text{ mit } A_1 \cap \cdots \cap A_k \subset U \right\} \subset \mathcal{P}X$$

ein Filter auf X. Nach Satz 1.70 (1) lässt sich $\mathcal{G}$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{F}$ verfeinern, und nach Voraussetzung existiert $x \in X$ mit $\mathcal{F} \to x$. Sei $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $X \setminus A \notin \mathcal{F}$, insbesondere $X \setminus A \notin \mathcal{U}_x$, folglich ist die offene Menge $X \setminus A$ keine Umgebung von x. Also gilt $x \notin X \setminus A$, das heißt $x \in A$. Da x in allen Elementen aus $\mathcal{A}$ enthalten ist, ist insbesondere $\bigcap \mathcal{A}$ nicht leer. □

1.72. Satz (Tychonoff). *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, dann ist der Produktraum $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{O}_i)$ genau dann quasikompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ quasikompakt sind.*

Da sich die Hausdorff-Eigenschaft nach Satz 1.57 (2) analog verhält, darf man im obigen Satz auch „quasikompakt" überall durch „kompakt" ersetzen.

Man beachte, dass die ensprechende Aussage für die Box-Topologie aus Bemerkung 1.56 bei unendlichen Indexmengen falsch wird.

Beweis. Die Richtung „$\Longrightarrow$" ist analog zu Übung 1.141, also beschränken wir uns auf „$\Longleftarrow$". Es sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein beliebiges Produkt quasikompakter topologischer Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ mit den natürlichen Abbildungen $\pi_i \colon X \to X_i$. Gegeben sei ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{F}$ gegen ein Element $x \in X$ konvergiert.

Wir betrachten die Bildfilter $\pi_i \mathcal{F}$ auf X_i aus Definition 1.46. Mit der Charakterisierung aus Satz 1.70 (2) überprüft man, dass die $\pi_i \mathcal{F}$ wieder Ultrafilter sind. Also existiert ein Grenzwert $x_i \in X_i$ von $\pi_i \mathcal{F}$, und wir betrachten $x = (x_i)_{i \in I} \in X$.

Sei jetzt $U \subset X$ eine Umgebung von x. Zu zeigen ist $U \in \mathcal{F}$ nach Definition 1.44 (1). Nach Definition der Produkttopologie existiert eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und Umgebungen $U_i \subset X_i$ für alle $i \in I_0$, so dass

$$\bigcap_{i \in I_0} \pi_i^{-1}(U_i) \subset U .$$

Da $\pi_i \mathcal{F} \to x_i$, folgt $U_i \in \pi_i \mathcal{F}$, also $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$ nach Definition 1.46. Aber dann ist der endliche Durchschnitt dieser Mengen wieder in $\mathcal{F}$ enthalten, und damit auch seine Obermenge U. Es folgt $\mathcal{F} \to x$. □

Man beachte, dass man im Beweis erneut das Auswahlaxiom anwenden muss, um x zu bestimmen, falls die einzelnen Grenzwerte $x_i \in X_i$ nicht eindeutig sind (was passieren kann, wenn die X_i nicht Hausdorff sind).

Wir haben in Satz 1.67 die Alexandroff-Kompaktifizierung $\dot{X}$ eines topologischen Raumes X kennengelernt. Es ist nicht schwer zu sehen, dass es für jede Kompaktifizierung $X \hookrightarrow \overline{X}$ von X eine eindeutige Abbildung $\overline{X} \to \dot{X}$ gibt, die auf X selbst die Identität induziert. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung hat genau die umgekehrte Eigenschaft.

1.73. Satz (Stone-Čech-Kompaktifizierung). *Es sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann existiert eine Kompaktifizierung $X \hookrightarrow \beta X$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jeder stetigen Abbildung $f\colon X \to K$ von X in einen kompakten Raum K existiert genau eine stetige Fortsetzung $\beta f\colon \beta X \to K$.*

Da es sehr viele kompakte Räume K und dementsprechend auch sehr viele stetige Abbildungen $X \to K$ gibt, ist es nicht auf Anhieb klar, dass solch eine Kompaktifizierung überhaupt existiert. Und tatsächlich bemühen wir im Beweis indirekt wieder das Auswahlaxiom.

In Übung 1.142 sehen wir, dass kompakte Räume normal sind, und aus Satz 1.57 wissen wir, dass Unterräume normaler Räume zumindest noch vollständig regulär sind. Das bedeutet, dass vollständige Regularität sowohl notwendig als auch hinreichend für die Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist.

1.74. Bemerkung. Es sei X ein topologischer Raum.

(1) Alle Kompaktifizierungen von X bilden eine Kategorie. Ihre Objekte sind Kompaktifizierungen $\iota\colon X \to K$, und ein Morphismus zwischen zwei Kompaktifizierungen $\iota_i\colon X \to K_i$ für $i = 0, 1$ ist eine Abbildung $F\colon K_0 \to K_1$, so dass $\iota_1 = F \circ \iota_0$. Die Axiome aus Definition 1.19 lassen sich leicht überprüfen.

(2) Wenn X vollständig regulär ist, sei $\iota_X\colon X \to \beta X$ eine Stone-Čech-Kompaktifizierung von X. Sie ist ein sogenanntes initiales Objekt, das heißt, für jede andere Kompaktifizierung $\iota\colon X \to K$ existiert genau ein Morphismus $F\colon \beta X \to K$. Wie bei jeder universellen Eigenschaft folgt auch hier, dass die Stone-Čech-Kompaktifizierung bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Tatsächlich gibt es verschiedene Möglichkeiten, sie zu konstruieren, aber alle führen am Ende auf homöomorphe Räume.

(3) Wenn X lokalkompakt ist, dann bildet die Alexandroff-Kompaktifizierung $\dot{X}$ aus Satz 1.67 ein terminales Objekt, das heißt, für jede andere Kompaktifizierung $\iota\colon X \to K$ existiert genau ein Morphismus $F\colon K \to \dot{X}$. Dieser Morphismus bildet alle Punkte in $K \setminus \operatorname{im}\iota$ auf den unendlich fernen Punkt ∞ ab. Aus dieser universellen Eigenschaft folgt entsprechend auch die Eindeutigkeit der Alexandroff-Kompaktifizierung.

Gegeben sei ein beliebiger topologischer Raum X, und I bezeichne wieder das Einheitsintervall $[0, 1]$ mit der Standard-Topologie. Wir betrachten den Raum

$$BX = \operatorname{Abb}(C(X, I), I) = \prod_{u \in C(X,I)} I$$

mit der Produkt-Topologie. Ein typisches Element von BX ist ein Tupel $(t_u)_{u \in C(X,I)}$ von Zahlen $t_u \in I$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ induziert eine Abbildung $Bf\colon BX \to BY$ mit

$$Bf\big((t_u)_{u \in C(X,I)}\big) = (t_{v \circ f})_{v \in C(X,I)} \ ,$$

denn für alle $v \in C(Y, I)$ ist $v \circ f \in C(X, I)$ ein zulässiger Index für die Familie $(t_u)_{u \in C(X,I)}$. Indem wir Funktionen u an Punkten $x \in X$ auswerten, erhalten wir eine Abbildung

$$\iota_X\colon X \to BX \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto (u(x))_{u \in C(X,I)} \in BX \ .$$

Wir zeigen unten, dass $\beta X = \overline{\operatorname{im}\iota_X} \subset BX$ die gesuchte Kompaktifizierung liefert. Aber zunächst beweisen wir einige elementare Aussagen über die obige Konstruktion.

1.75. LEMMA. *Es seien X ein topologischer Raum, dann ist $\iota_X\colon X \to BX$ stetig. Sie ist genau dann injektiv, wenn zu je zwei Punkten x, $y \in X$ eine stetige Funktion $u\colon X \to I$ mit $u(x) \neq u(y)$ existiert.*

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist die induzierte Abbildung $Bf\colon BX \to BY$ ebenfalls stetig, und es gilt $\iota_Y \circ f = Bf \circ \iota_X$.

Später werden wir B einen Funktor nennen, und ι eine natürliche Transformation.

BEWEIS. Für $v \in C(X, I)$ bezeichne

$$\pi_v\colon BX \to I \qquad \text{mit} \qquad \pi_v\big((t_u)_{u\in C(X,I)}\big) = t_v$$

die Projektion auf den v-ten Faktor I des Produktes. Nach Konstruktion gilt $\pi_v \circ \iota_X = v\colon X \to I$, denn

$$(\pi_v \circ \iota_X)(x) = \pi_v\big((u(x))_{u\in C(X,I)}\big) = v(x)$$

für alle $x \in X$, und die Abbildung $\pi_v \circ \iota_X = v$ ist stetig. Als Abbildung in ein Produkt ist ι_X stetig nach der charakteristischen Eigenschaft des Produkts aus Satz 1.53 (2), da $v = \pi_v \circ \iota_X$ für alle $v \in C(X.I)$ stetig ist. Die Aussage über Injektivität folgt unmittelbar aus der Konstruktion von ι_X.

Als nächstes sei $f\colon X \to Y$ stetig und $Bf\colon BX \to BY$ wie oben definiert. Um zu zeigen, dass Bf stetig ist, reicht es zu zeigen, dass $\pi_w \circ Bf\colon BX \to I$ für alle $w \in C(Y, I)$ stetig ist. Da

$$\pi_w \circ Bf\big((t_u)_{u\in C(X,I)}\big) = \pi_w\big((t_{v\circ f})_{v\in C(Y,I)}\big) = t_{w\circ f}\ ,$$

gilt $\pi_w \circ BF = \pi_{w\circ f}\colon BX \to I$, und die Projektionsabbildung $\pi_{w\circ f}$ ist stetig nach Satz 1.53 (1).

Für einen Punkt $x \in X$ gilt schließlich

$$(Bf \circ \iota_X)(x) = Bf\big((u(x))_{u\in C(X,I)}\big) = \big((v \circ f)(x)\big)_{v\in C(Y,I)} = \big(v(f(x))\big)_{v\in C(Y,I)} = (\iota_Y \circ f)(x)\ ,$$

folglich $Bf \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. □

BEWEIS von Satz 1.73. Wenn X vollständig regulär ist, behaupten wir, dass $\iota_X\colon X \to BX$ eine Einbettung ist, Zu zeigen ist, dass ι_X einen Homöomorphismus $X \to \operatorname{im}\iota_X \subset BX$ induziert. Aus dem obigen Lemma folgt, dass ι_X stetig und aufgrund der vollständigen Regularität auch injektiv ist. Also reicht es zu zeigen, dass das Bild jeder offenen Menge $U \subset X$ in der Unterraumtopologie auf $\operatorname{im}\iota_X \subset BX$ offen ist. Dazu sei $x \in U$. Da X vollständig regulär ist, finden wir eine stetige Funktion $v\colon X \to I$ mit $v(x) = 0$ und $v|_{X\setminus U} \equiv 1$. Nach einer Rechnung im obigen Beweis gilt $\pi_v \circ \iota_X = v\colon X \to I$. Insbesondere ist die Menge $\pi_v^{-1}([0, 1)) \subset BX$ offen, und

$$\iota_X(x) \in \pi_v^{-1}([0, 1)) \cap \operatorname{im}\iota_X \subset \iota_X(U)\ , \qquad \text{da } \{x\} \in v^{-1}([0, 1)) = \iota_X^{-1}\big(\pi_v^{-1}([0, 1))\big) \subset U$$

nach Wahl von v. Also ist $\iota_X(U)$ eine Umgebung vom Punkt $\iota_X(x)$. Da das für alle Punkte $x \in U$ gilt, ist $\iota_X(U)$ offen in der Unterraumtopologie. Somit ist ι_X eine Einbettung.

Nach dem Satz 1.72 von Tychonoff ist der Raum BX als Produkt vieler Kopien des kompakten Raums I wieder kompakt. Dann ist der Abschluss $\beta X = \overline{\operatorname{im}\iota_X}$ ebenfalls kompakt nach Bemerkung 1.59 (1). Außerdem ist $\operatorname{im}\iota_X$ homöomorph zu X und liegt dicht in βX, also ist $\iota_X\colon X \to \beta X$ eine Kompaktifizierung von X gemäß Definition 1.66.

Zu zeigen ist noch die universelle Eigenschaft. Dazu sei $f\colon X \to K$ eine stetige Abbildung in ein Kompaktum K. Wir wenden die obige Konstruktion auf K an. Da K kompakt und BK ein Hausdorff-Raum ist, ist $\operatorname{im}\iota_K \subset BK$ kompakt und insbesondere abgeschlossen nach Bemerkung 1.59 (2) und (5), also gilt $\beta K = \operatorname{im}\iota_K$. Nach Lemma 1.75 gilt $Bf \circ \iota_X = \iota_K \circ f$, also bildet Bf die Teilmenge $\operatorname{im}\iota_X$ nach $\operatorname{im}\iota_K$ ab. Wir behaupten, dass Bf auch den Abschluss $\overline{\operatorname{im}\iota_X}$ nach $\operatorname{im}\iota_K = \overline{\operatorname{im}\iota_K}$ abbildet. Denn $BK \setminus \operatorname{im}\iota_K$ ist offen, folglich auch

$$Bf^{-1}(BK \setminus \operatorname{im}\iota_K) = BX \setminus Bf^{-1}(\operatorname{im}\iota_K)\ .$$

Da $\operatorname{im}\iota_X \subset Bf^{-1}(\operatorname{im}\iota_K)$, folgt $\overline{\operatorname{im}\iota_X} \subset Bf^{-1}(\operatorname{im}\iota_K)$, was zu zeigen war. □

1.76. Beispiel. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist eher ein theoretisches Hilfsmittel als eine konkrete Konstruktion, mit der man explizit rechnen möchte. Wir geben die folgenden Beispiele daher ohne weitere Erläuterungen.

(1) Obwohl es so aussieht, als ob dem halboffenenen Intervall $(0, 1]$ nur der Punkt 0 zur Kompaktheit fehle, ist $I = [0, 1]$ nicht seine Stone-Čech-Kompaktifizierung, denn die stetige Funktion $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ lässt sich nicht auf I fortsetzen.
(2) Man kann zeigen, dass $\beta\mathbb{N}$ genau so viele Elemente hat, wie es beliebige Abbildungen $I \to I$ gibt [**Que**, Satz 12.21]. Insbesondere ist $\beta\mathbb{N}$ damit sogar mächtiger als $\mathbb{R}$.
(3) Sei andererseits $(-\infty, \omega_1)$ wie in Bemerkung 1.41 konstruiert. Dann ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung zur Alexandroff-Kompaktifizierung isomorph [**Que**, Satz 12.22]. Folglich hat dieser Raum wegen Bemerkung 1.74 bis auf Isomorphie nur eine einzige Kompaktifizierung.

1.i. Quotienten und Verklebung

In Abschnitt 1.f hatten wir bereits einige Konstruktionen topologischer Räume vorgestellt. Jetzt wollen wir beliebige Vereinigungen und Quotienten topologischer Räume betrachten, und auch mehrere Räume zu einem neuen verkleben.

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann bezeichne $\coprod_i X_i$ die disjunkte Vereinigung dieser Mengen, und $\iota_i \colon X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ sei die Inklusion der Menge X_i in die disjunkte Vereinigung. Da die Mengen X_i nicht immer paarweise disjunkt sind, müssen wir die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen erst konstruieren, zum Beispiel wie folgt:

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} \{i\} \times X_i \quad \subset \quad I \times \bigcup_{i\in I} X_i \qquad \text{und} \qquad \iota_i(x_i) = (i, x_i)\ .$$

1.77. Definition. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *topologische Summe* der X_i ist definiert als

$$\coprod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \Big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup\Big) \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{O}_\sqcup = \Big\{\, U \subset \coprod_i X_i \;\Big|\; \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \,\Big\}\ .$$

Wenn wir X_i mit der Teilmenge $\iota_i(X_i) \subset \coprod_i X_i$ identifizieren, dann ist $U \subset \coprod_i X_i$ genau dann offen, wenn $U \cap X_i$ für alle $i \in I$ in X_i offen ist.

Wir überprüfen, dass $\mathcal{O}_\sqcup$ eine Topologie ist. Dazu nutzen wir elementare Eigenschaften der Urbild-Abbildung ι_i^{-1} aus, nämlich

$$\iota_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_i\ , \qquad \iota_i^{-1}(X) = X_i \in \mathcal{O}_i\ ,$$
$$\iota_i^{-1}(U_i \cap \cdots \cap U_k) = \iota_i^{-1}(U_i) \cap \cdots \cap \iota_i^{-1}(U_k) \in \mathcal{O}_i \qquad \text{und} \qquad \iota_i^{-1}\Big(\bigcup \mathcal{U}\Big) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

für $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

1.78. Satz. *Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume.*

(1) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcup$ ist die feinste Topologie auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_i X_i$, für die alle Inklusionsabbildungen $\iota_i \colon X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ stetig sind.*
(2) *Die Topologie $\mathcal{O}_\sqcup$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf $\coprod_i X_i$, so dass eine beliebige Abbildung F von $(\coprod_i X_i, \mathcal{O})$ in einen beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $F \circ \iota_i \colon (X_i, \mathcal{O}_i) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig sind.*

(3) *Der Raum* $(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup)$ *zusammen mit den Inklusionsabbildungen* $\big(\iota_i\colon X_i \to \coprod_i X_i\big)_{i\in I}$ *ist ein* Koprodukt *der Räume* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *in der Kategorie* $\mathcal{T}op$*, das heißt, dass zu jedem Objekt* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *und jeder Familie von Morphismen* $(F_i\colon X_i \to Z)_{i\in I}$ *genau ein Morphismus* $F\colon \coprod_i X_i \to Z$ *existiert, so dass* $F_i = F \circ \iota_i$ *für alle* $i \in I$*.*

1.79. Bemerkung. Die charakteristische Eigenschaft (2) der topologischen Summe wird durch das linke kommutative Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F\circ\iota_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ {\scriptstyle\iota_i}\big\downarrow & \nearrow_{F} & \\ \big(\coprod_i X_i, \mathcal{O}\big) & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\ {\scriptstyle\iota_i}\big\downarrow & \overset{F}{\nearrow} & \\ (Y, \mathcal{O}_Y) & & \end{array} \tag{1.2}$$

Ein Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit stetigen Abbildungen $\iota_i\colon X_i \to Y$ ist genau dann ein *Koprodukt* im Sinne von Satz 1.78 (3), wenn zu jedem Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ mit stetigen Abbildungen $F_i\colon X_i \to Z$ genau eine stetige Abbildung F wie im rechten Diagramm existiert.

Wie in Bemerkung 1.54 kann man zeigen, dass es zwischen je zwei Koprodukten der Objekte $(X_i)_{i\in I}$ genau einen Isomorphismus gibt, der mit den Inklusionsabbildungen verträglich ist. Und wie beim Produkt muss man auch bei Koprodukten in einer gegebenen Kategorie die Existenz „von Hand“ nachweisen, beispielsweise, indem man eine Konstruktion angibt und zeigt, dass sie die richtigem Eigenschaften hat.

Da sich die beiden Diagramme in (1.1) und (1.2) jeweils nur in der Richtung der Pfeile unterscheiden, sagt man, die beiden Konstruktionen in den Definitionen 1.52 und 1.77 seien zueinander *dual*. Daher rührt die Wahl der Bezeichnungen und der Symbole „$\prod$“ und „$\coprod$“.

Beweis des Satzes 1.78. Zu (1) sei $\mathcal{O}$ eine beliebige Topologie auf $\coprod_i X_i$. Es sind genau dann alle Inklusionsabbildungen $\iota_i\colon X_i \to \coprod_i X_i$ stetig, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \qquad \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ und alle } i \in I$$

gilt, wenn also $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\sqcup$.

Zu (2) seien $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und $F\colon (\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ wie im Satz vorgegeben. Wenn F stetig ist, sind alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, da ι_i nach (1) stetig ist. Seien jetzt alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, und sei $U \subset Z$ offen, dann ist

$$\iota_i^{-1}\big(F^{-1}(U)\big) = \big(F \circ \iota_i\big)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

offen in X_i für alle $i \in I$. Nach Definition 1.77 gilt $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\sqcup$, also ist F stetig. Der Beweis der Eindeutigkeit ist wieder analog zum Beweis der Sätze 1.50 (2) und (1.53) (2).

Zu (3) seien $f_i\colon X_i \to Z$ stetig. Die einzige Abbildung $f\colon \coprod_i X_i \to Z$ mit $f \circ \iota_i = f_i$ für alle i wird gegeben durch

$$f\big(\iota_i(x_i)\big) = f_i(x_i)\ ,$$

und f ist stetig nach (2). □

Das nächste Resultat ist das Pendant zu Satz 1.57.

1.80. Satz. *Die Trennungseigenschaften (T0) – (T4) und (T3a) und die Abzählbarkeitseigenschaft (A1) werden unter der disjunkten Vereinigung vererbt. Die Eigenschaft (A2) wird vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist. Quasikompaktheit und Kompaktheit werden vererbt, wenn die Indexmenge endlich ist.*

BEWEIS. Man kann die in den Trennungsaxiomen (T0) – (T4) gesuchten offenen Mengen U und $V \subset \coprod_{i\in I} X_i$ konstruieren, in dem man für alle $i \in I$ offene Teilmengen $\iota_i^{-1}(U)$, $\iota_1^{-1}(V) \subset X_i$ angibt. Im Falle von (T4) muss man unter Umständen auf jedem Summanden X_i Wahlen treffen und benötigt daher das Auswahlaxiom. Analog konstruiert man die in (T3a) gesuchte Funktion, indem man auf dem Summanden X_i, der den ausgezeichneten Punkt x enthält, eine Funktion f_i vorgibt und diese mit der universellen Eigenschaft aus Satz 1.78 (3) auf allen anderen Summanden durch 0 fortsetzt.

Sei $x = \iota_j(x_j) \in \iota_j(X_j) \subset \coprod_{i\in I} X_i$, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X_j)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x_j in X_j, dann ist $\iota_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}(\coprod_{i\in I} X_i)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x in der disjunkten Vereinigung, also wird (A1) vererbt. Wenn I abzählbar ist und $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{O}_i$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$, dann ist

$$\bigcup_{i\in I} \iota_i(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{O}_\sqcup$$

eine abzählbare Basis der disjunkten Vereinigung.

Sei schließlich $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung einer disjunkten Vereinigung X quasikompakter Räume $X_1, \ldots, X_n$, dann reichen je endliche offene Mengen aus $\mathcal{U}$ aus, um einen Raum X_i zu überdecken. Also reichen insgesamt endlich viele. □

1.81. BEMERKUNG. Es sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und X eine Menge.

(1) Gegeben Abbildungen $f_i \colon X \to X_i$ für alle $i \in I$, existiert stets eine eindeutige gröbste Topologie $\mathcal{O}$ auf X, für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie $\mathcal{O}$ heißt die von den f_i *induzierte Topologie* oder auch *Initialtopologie*. Beispiele sind die Unterraumtopologie (Satz 1.50 (1)), die Produkttopologie (Satz 1.53 (1)) sowie die Klumpentopologie, falls $I = \emptyset$.

(2) Seien umgekehrt Abbildungen $f_i \colon X_i \to X$ für alle $i \in I$ gegeben, dann existiert stets eine eindeutige feinste Topologie $\mathcal{O}$ auf X, für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die von den f_i *koinduzierte Topologie* oder *Finaltopologie*. Beispiele sind die Summentopologie (Satz 1.78 (1)), sowie die diskrete Topologie, falls $I = \emptyset$.

Die Existenz und Eindeutigkeit ist in jedem Fall zu zeigen, die Argumente sind immer ähnlich denen in den Beweisen der Sätze 1.78, 1.50 und 1.53. Die Begriffe „Initialtopologie“ und „Finaltopologie“ stammen daher, dass man eine Topologie am „Beginn“ beziehungsweise „Ende“ der betrachteten „Pfeile“, also der Abbildungen f_i, definiert.

Im Folgenden betrachten wir einige Finaltopologien. Die Quotiententopologie ist dual zur Unterraumtopologie. Anstelle einer injektiven Abbildung $\iota \colon Y \hookrightarrow X$ in einen gegebenen topologischen Raum betrachten wir also eine surjektive Abbildung $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ von einem gegebenen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in eine Menge Y. Dabei können wir Y als Quotienten $Y = X/\sim$ nach einer Äquivalenzrelation $\sim$ auffassen, wobei

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi(x) = \pi(y) \ .$$

1.82. DEFINITION. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann definieren wir die *Quotiententopologie* oder *Identifizierungstopologie* auf Y durch

$$\mathcal{O}_Y = (\pi^{-1})^{-1}(\mathcal{O}_X) = \{\, U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \,\} \ .$$

Ähnlich wie bei der Summentopologie überlegt man sich, dass $\mathcal{O}_Y$ tatsächlich eine Topologie ist. Die Quotiententopologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert.

1.83. SATZ. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung.*

(1) *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf Y, für die $\pi \colon X \twoheadrightarrow Y$ stetig ist.*

(2) *Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf Y, für die eine Abbildung f von Y in einen beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi \colon X \to Z$ stetig ist.*

1.84. BEMERKUNG. Um zu sehen, dass Unterraumtopologie und Quotiententopologie zueinander dual sind, vergleichen wir die zugehörigen Diagramme.

Das linke Diagramm beschreibt die Situation aus Satz 1.50 (2), das rechte die aus Satz 1.83 (2).

BEWEIS von Satz 1.83. Damit $\pi \colon X \to Y$ stetig ist, dürfen höchstens Teilmengen $U \subset Y$ mit $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ offen sein, also gilt (1).

Zu (2) kopieren wir den Beweis von Satz 1.50 (2) und drehen alle Pfeile um. □

1.85. BEMERKUNG. Sei $p \colon (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ surjektiv, und $\mathcal{O}_Y$ sei die Quotiententopologie. Wir untersuchen, welche topologischen Eigenschaften sich von X auf Y vererben.

(1) Wenn X quasikompakt ist, dann ist auch Y quasikompakt, da $Y = p(X)$. Wenn X kompakt und Y Hausdorffsch ist, dann ist Y auch kompakt, vgl. Übung 1.141.
(2) Trennungseigenschaften vererben sich im allgemeinen nicht von X auf Y, wie die Übungen 1.154 und 1.156 zeigen. Insbesondere vererbt sich auch Kompaktheit nicht automatisch.
(3) Auch Abzählbarkeitseigenschaften vererben sich nicht immer, siehe Bemerkung 1.109 unten.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Äquivalenzrelation $\sim$ beziehungsweise die Abbildung $\pi \colon X \to X/\sim$ lassen sich einzelne Trennungsaxiome von X auf den Quotienten übertragen, siehe etwa Übung 1.157. Wir wollen das hier aber nicht vertiefen.

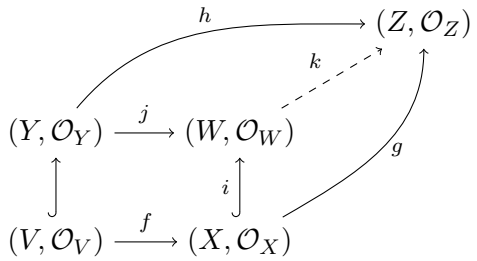
Als nächstes wollen wir die Summen- und die Quotiententopologie benutzen, um zwei weitere Konstruktionen zu erklären. Wir benötigen beide später zur Konstruktion von CW-Komplexen.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $V \subset Y$ eine Teilmenge, und seien $f \colon V \to X$ eine zunächst beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$X \cup_f Y = (X \dot\cup Y)/\sim ,$$

wobei $\sim$ die von $y \sim f(y)$ für alle $y \in V$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Hierbei *erzeugt* jede Teilmenge $S \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation R auf M, so dass aRb genau dann gilt, wenn es eine Kette $a = a_0, a_1, \ldots, a_k = b$ von Elementen von M mit $k \geq 0$ und $(a_{i-1}, a_i) \in S$ oder $(a_i, a_{i-1}) \in S$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gibt. Die Punkte in V werden in unserem Fall entlang der Abbildung f an X „angeklebt“. Die Quotiententopologie auf $X \cup_f Y$ heißt daher auch „Verklebungstopologie“. Man beachte: die kanonische Abbildung $i \colon X \hookrightarrow X \cup_f Y$ ist injektiv, die Abbildung $j \colon Y \to X \cup_f Y$ im

allgemeinen jedoch nicht. Der Raum $W = X \cup_f Y$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines *Pushouts.*



(1.3)

1.86. Folgerung. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $V \subset Y$ und $f\colon V \to X$ beliebig. Der Raum $X \cup_f Y$ trage die Identifizierungstopologie zur Abbildung $\pi\colon X \sqcup Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y$. Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $g\colon X \to Z$ und $h\colon Y \to Z$ stetig.*

(1) *Es existiert genau dann eine Abbildung $k\colon X \cup_f Y \to Z$ mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, wenn $g \circ f = h|_V\colon V \to Z$, und k ist in diesem Fall eindeutig.*
(2) *In diesem Fall ist k stetig.*

Beweis. Zu (1) existiert stets genau eine Abbildung

$$\overline{k}\colon X \sqcup Y \to Z \quad \text{mit} \quad \overline{k}|_X = g \quad \text{und} \quad \overline{k}|_Y = h\ ,$$

da die disjunkte Vereinigung ein Koprodukt in der Kategorie der Mengen ist. Damit k existiert, muss $\overline{k}$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich sein. Das ist äquivalent zu

$$(g \circ f)(y) = \overline{k}(f(y)) = \overline{k}(y) = h(y) \qquad \text{für alle } y \in V\ .$$

Sei nun $k\colon X \cup_f Y \to Z$ eine Abbildung mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, dann gilt $(k \circ \pi)|_X = g$ und $(k \circ \pi)|_Y = h$, und es folgt $\overline{k} = k \circ \pi$ wegen Satz 1.78 (3). Da π surjektiv ist, ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von k.

Zu (2) folgern wir nach Satz 1.78 (2), dass $\overline{k}$ stetig ist. Da $\overline{k} = k \circ \pi$, folgt aus Satz 1.83 (2) die Stetigkeit von k. □

Sei jetzt $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine gerichtete Folge topologischer Räume, das heißt, es existieren (beliebige) Abbildungen $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ für alle $i < j$ mit

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}\colon X_i \to X_k \qquad \text{für alle } i < j < k.$$

Wir betrachten den *Kolimes*

$$\operatorname{colim} X_i = \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \Big/ \sim\ , \tag{1.4}$$

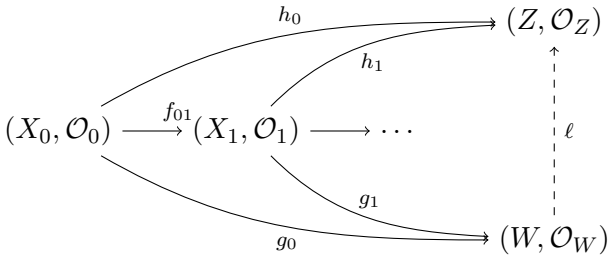
wobei

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \quad \iff \quad f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \qquad \text{für ein } k > i, j.$$

1.87. Folgerung. *Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ topologische Räume und $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ Abbildungen, so dass $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für alle $i < j < k$. Sei $\varinjlim X_i$ mit der Identifizierungstopologie zur Abbildung $\coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \varinjlim X_i$ versehen. Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $(h_i\colon X_i \to Z)_{i\in\mathbb{N}}$ seien stetige Abbildungen.*

(1) *Es existiert genau dann eine Abbildung $\ell\colon \varinjlim X_i \to Z$ mit $h_i = \ell \circ g_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wenn $h_j \circ f_{ji} = h_i\colon X_i \to Z$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, und ℓ ist in diesem Fall eindeutig.*
(2) *In dieser Situation ist ℓ stetig.*

Also erfüllt $W = \varinjlim X_i$ die universelle Eigenschaft eines *Kolimes.*



(1.5)

Man nennt die obige Topologie auch die *schwache Topologie* auf $\operatorname{colim} X_i$. Sie ist die Finaltopologie zu den Abbildungen g_i.

Beweis. Dieser Beweis ist völlig analog zum Beweis von Folgerung 1.86. □

In Wirklichkeit ist die Kolimes-Konstruktion wesentlich allgemeiner und umfasst die universellen Eigenschaften in den Diagrammen (1.3) und (1.5) als Spezialfälle, siehe Definition 4.7 und Bemerkung 4.8.

1.j. Zusammenhang

Wir nennen einen Raum X zusammenhängend, wenn wir ihn nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Unterräume schreiben können, das heißt, wenn wir ihn nicht in Teile zerlegen können, die (im Sinne von Satz 1.78) "nichts miteinander zu tun haben". Für viele Anwendungen benötigen wir den etwas stärkeren Begriff des Wegzusammenhangs.

1.88. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt

(1) *zusammenhängend,* wenn es keine zwei nichtleeren offenen Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ gibt mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$, und
(2) *wegzusammenhängend,* wenn zu je zwei $x, y \in X$ ein *Weg* γ von x nach y, das heißt, eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, existiert.

1.89. Bemerkung. Bedingung (1) kann man äquivalent mit abgeschlossenen Mengen formulieren.

(1) Wenn $X = U \dot\cup V$ gilt und U, V offen sind, dann ist X homöomorph zu $U \sqcup V$, siehe Übung 1.158.
(2) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
(3) Es trage $Y = \{0, 1\}$ die diskrete Topologie. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung $F\colon X \twoheadrightarrow Y$ gibt.

1.90. Beispiel. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn sie zusammenhängend ist. Zu "⇒" sei etwa $I = U \dot\cup V$ mit $U, V \subset I$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Wir fixieren $u \in U$ und $v \in V$, o.B.d.A. sei $u < v$. Setze $x = \inf(V \cap [u, v])$, dann enthält jede Umgebung von x sowohl Punkte von V als auch von U. Es folgt

$$x \in \overline{V} \cap \overline{U} = V \cap U \ ,$$

da sowohl U als auch V abgeschlossen sind, im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$.

Wenn I kein Intervall ist, existieren $x < y < z$ mit $x, z \in I$ und $y \notin I$. Dann ist

$$I = (I \cap (-\infty, y)) \dot\cup (I \cap (y, \infty))$$

eine Zerlegung wie in Definition 1.88 (1).

1.91. Satz. (1) *Das Bild eines (weg-) zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist wieder (weg-) zusammenhängend.*
(2) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Wir können (1) als eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes der Analysis auffassen. Außerdem folgt aus (1), dass sich (Weg-) Zusammenhang auf Quotienten vererbt.

Beweis. Sei $F\colon X \to Y$ stetig. Wenn $\operatorname{im} F \subset Y$ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es nichtleere, offene Teilmengen $U, V \subset \operatorname{im} F$ mit $\operatorname{im} F = U \dot\cup V$. Dann sind auch $F^{-1}(U)$ und $F^{-1}(V)$ nicht leer, offen mit $X = F^{-1}(U) \dot\cup F^{-1}(V)$. Also ist auch X nicht zusammenhängend.

Sei X wegzusammenhängend und $F(x)$, $F(y)$ zwei beliebige Punkte in $\operatorname{im} F$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y, dann ist $F \circ \gamma$ ein Weg von $F(x)$ nach $F(y)$ in $\operatorname{im} F$. Also ist auch $\operatorname{im} F$ wegzusammenhängend, und es folgt (1).

Zu (2) nehmen wir an, dass es nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmengen U, $V \subset X$ mit $X = U \dot\cup V$ gibt. Wähle $x \in U$ und $y \in V$. Dann kann es keinen Weg γ von x nach y geben, denn ansonsten wäre

$$[0,1] = \gamma^{-1}(U) \dot\cup \gamma^{-1}(V)$$

mit $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V)$ nichtleer, offen im Widerspruch zu Beispiel 1.90. □

1.92. Bemerkung. Aus der obigen Diskussion folgt, dass sich (Weg-) Zusammenhang auf Quotienten überträgt, aber nicht auf disjunkte Vereinigungen. In Übung 1.161 sehen wir, dass sich Wegzusammenhang auf beliebige Produkte überträgt. Auch Zusammenhang überträgt sich auf Produkte, siehe dazu [**En**, Theorem 6.1.15] und [**Que**, Satz 4.10].

1.93. Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$.
(1) Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von X, die x enthalten, heißt die *Zusammenhangskomponente* $K(x)$ von x.
(2) Die Menge aller Punkte y, die sich mit x durch einen stetigen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ verbinden lassen, heißt die *Wegzusammenhangskomponente* von x.
(3) Der Raum X heißt *total unzusammenhängend,* wenn $\{x\}$ die Zusammenhangskomponente von x ist für alle $x \in X$.

1.94. Bemerkung. (1) Zusammenhangskomponenten sind immer abgeschlossen, Wegzusammenhangskomponenten jedoch nicht notwendigerweise, siehe Übung 1.159.
(2) Seien x, $y \in X$, dann gilt entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$, analoges gilt für Wegzusammenhangskomponenten.
(3) Aus Satz 1.91 (2) folgt, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes x in $K(x)$ enthalten ist.
(4) Für alle $x \in X$ gilt

$$K(x) \subset \bigcap \left\{ V \subset X \;\middle|\; x \in V,\ V \text{ ist offen und abgeschlossen} \right\}.$$

Gleichheit muss nicht gelten.

1.95. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *lokal (weg-) zusammenhängend,* wenn zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x eine (weg-) zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von x existiert.

1.96. Bemerkung. Es gibt lokal zusammenhängende, nicht zusammenhängende topologische Räume, und auch zusammenhängende, nicht lokal zusammenhängende topologische Räume. Wir werden später oft mit lokal wegzusammenhängenden Räumen arbeiten.

1.k. Funktionenräume und die kompakt-offene Topologie

Gegeben zwei (topologische) Räume X, Y, hat man in der Regel viele Möglichkeiten, eine Topologie auf dem Raum $\mathrm{Abb}(X,Y)$ aller Abbildungen oder geeigneten Unterräumen (wie zum Beispiel dem Raum $C(X,Y)$ der stetige Abbildungen) zu definieren. Oft benötigt man dazu zusätzliche Strukturen wie Metriken, Maße oder differenzierbare Strukturen. Beispiele sind Räume wie $C^k(X)$, $C^{k,\alpha}(X)$, $L^p(X)$ oder $W^{k,p}(X)$. Die Topologien auf diesen Räumen kann man mit den Methoden dieser Vorlesung betrachten und mit anderen Topologien auf dem gleichen oder einem ähnlichen Raum vergleichen. Das passiert in Vorlesungen über Funktionalanalysis oder auch partielle Differentialgleichungen (siehe zum Beispiel die Sätze von Rellich und Sobolev).

Es gibt einige wenige interessante Topologien auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ oder $C(X,Y)$, die man allein mit Hilfe der Topologien auf X und Y definieren kann. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ haben wir in Gestalt der Produkttopologie in Definition 1.52 kennengelernt, siehe Übung 1.140. Für sie braucht man nur eine Topologie auf Y. In diesem Abschnitt betrachten wir eine andere Topologie auf $C(X,Y)$, die die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz verallgemeinert. Diese Topologie spielt nicht nur in Teilen der reellen und komplexen Analysis eine wichtige Rolle, sondern auch später in der algebraischen Topologie. Wir werden in Abschnitt 4.c noch ausführlich auf sie zurückkommen.

1.97. Definition. Seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, dann ist die *kompakt-offene Topologie* $\mathcal{O}_{\mathrm{ko}}$ auf $C(X,Y)$ definiert als die Topologie zur Subbasis

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ko}} = \left\{ S_{u,K,U} \;\middle|\; K \text{ kompakt, } u\colon K \to X \text{ stetig und } U \subset Y \text{ offen} \right\}$$
$$\text{mit} \qquad S_{u,K,U} = \left\{ f \in C(X,Y) \;\middle|\; \operatorname{im} u \subset f^{-1}(U) \right\} .$$

So, wie es in der Literatur verschiedene Sichtweisen auf den Begriff „kompakt“ gibt, gibt es auch mehrere ähnliche Definitionen für die kompakt-offene Topologie. All diese Definitionen sind äquivalent, wenn die beteiligten Räume Hausdorffsch sind. Die obige Definition folgt Strickland [**St**].

1.98. Proposition (Funktorialität). *Seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ und $(Z,\mathcal{O}_Z)$ topologische Räume. Dann induziert jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ stetige Abbildungen*

$$C(Z,X) \longrightarrow C(Z,Y) \qquad \text{mit} \qquad g \longmapsto f \circ g \tag{1}$$
$$\text{und} \qquad C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z) \qquad \text{mit} \qquad h \longmapsto h \circ f \; . \tag{2}$$

Den Beweis lassen wir als Übung 1.162. In Definition 2.16 führen wir Funktoren ein. Dann wird auch klar werden, was wir mit Funktorialität meinen.

1.99. Proposition. *Es seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$, $(Z,\mathcal{O}_Z)$ topologische Räume, und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ sei* lokalkompakt. *Dann ist die Verkettung*

$$\circ\colon C(Y,Z) \times C(X,Y) \longrightarrow C(X,Z) \tag{1}$$

stetig bezüglich der kompakt-offenen Topologien. Insbesondere gibt es eine stetige Auswertungsabbildung

$$\mathrm{ev}\colon C(Y,Z) \times Y \longrightarrow Z \; . \tag{2}$$

Wir können das leider nicht direkt aus Proposition 1.98 folgern, vergleiche Bemerkung 1.55.

Beweis. Nach Übung 1.128 reicht es für (1) zu zeigen, dass die Urbilder von Subbasismengen $S_{u,K,W} \subset C(X,Z)$ in $C(Y,Z) \times C(X,Y)$ offen sind. Dazu sei K kompakt, $u\colon K \to X$ stetig und $W \subset Z$ offen. Außerdem seien $f \in C(X,Y)$ und $g \in C(Y,Z)$ gegeben mit $g \circ f \in S_{u,K,W}$. Wir konstruieren ein Kompaktum L, eine stetige Abbildung $v\colon L \to g^{-1}(W) \subset Y$ und eine offene Teilmenge $V \subset \operatorname{im} v$ mit $\operatorname{im} u \subset f^{-1}(V)$. Dann folgt $f \in S_{u,K,V}$, $g \in S_{v,L,W}$ und

$$S_{v,L,W} \times S_{u,K,V} \subset \circ^{-1}(S_{u,K,W}) \; .$$

Also ist $\circ^{-1}(S_{u,K,W})$ eine Umgebung des Punktes (g,f). Da das für alle g, f mit $g\circ f \in S_{u,K,W}$ gilt, ist $\circ^{-1}(S_{u,K,W})$ offen, und somit die Verkettung eine stetige Abbildung.

Zur Konstruktion von V und L sei zunächst $y \in \operatorname{im}(f\circ u) \subset Y$. Da $g\circ f \in S_{u,K,W}$, folgt $y \in g^{-1}(W)$. Da Y lokalkompakt ist, hat y eine kompakte Umgebung $L_y \subset Y$. Als kompakter Raum ist L_y normal nach Übung 1.142, also finden wir eine offene Umgebung $V_y \subset L_y$ von y mit $\overline{V}_y \subset g^{-1}(W)$. Nun ist K kompakt und $f\circ u$ stetig, also reichen endlich viele Mengen der Form $(f\circ u)^{-1}(V_y)$ aus, um K zu überdecken; seien $y_1, \ldots, y_N \in \operatorname{im}(f\circ u)$ die entsprechenden Punkte. Wir definieren

$$V = \bigcup_{i=1}^{N} V_{y_i} \ .$$

Die Teilmengen $\overline{V}_{y_i} \subset L_{y_i}$ sind kompakt, folglich auch ihre endliche disjunkte Vereinigung

$$L = \coprod_{i=1}^{N} \overline{V}_{y_i} \ .$$

Wir definieren $v\colon L \to Y$ als disjunkte Vereinigung der Inklusionsabbildungen $V_{y_i} \hookrightarrow Y$. Es folgt $\operatorname{im}(f\circ u) \subset V \subset \operatorname{im} v \subset g^{-1}(W)$ wie gefordert. Damit ist (1) bewiesen.

Zu (2) betrachten wir als Spezialfall den einpunktigen Raum $X = \mathrm{pt}$. Es gibt eine natürliche Bijektion $C(\mathrm{pt}, Y) \cong Y$, die jeder Abbildung ihren Wert zuordnet. Sei K kompakt, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $c\colon K \to \mathrm{pt}$. Sei außerdem $V \subset Y$ offen, dann entspricht die Subbasismenge $S_{c,K,V} \subset C(\mathrm{pt}, Y)$ genau der offenen Menge V, falls $K \neq \emptyset$ (und dem gesamten Raum Y, falls $K = \emptyset$). Insbesondere sind die Räume $C(\mathrm{pt}, Y)$ und Y kanonisch homöomorph. Jetzt folgt (2) aus (1), denn wir erhalten ev als Verkettung stetiger Abbildungen

$$C(Y,Z)\times Y \xleftarrow{\cong} C(Y,Z)\times C(\mathrm{pt},Y) \xrightarrow{\circ} C(\mathrm{pt},Z) \xrightarrow{\cong} Z \ . \qquad \square$$

1.100. Proposition. *Es seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und $C(X,Y)$ trage die kompakt-offene Topologie. Dann gibt es eine stetige Abbildung*

$$\mathrm{in}\colon X \longrightarrow C(Y, X\times Y) \qquad \textit{mit} \qquad \mathrm{in}(x)(y) = (x,y) \ .$$

Zu jedem $x \in X$ gehört also eine *Inklusionsabbildung* $\mathrm{in}(x)$, die Y auf $\{x\}\times Y \subset X\times Y$ abbildet.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\mathrm{in}^{-1}(S_{u,K,W}) \subset X$ für alle Kompakta K, alle stetigen Abbildungen $u\colon K \to Y$ und alle offenen Mengen $W \subset X\times Y$ offen ist. Sei dazu $x \in \mathrm{in}^{-1}(S_{u,K,W})$, das heißt, es gilt $\{x\}\times \operatorname{im} u \subset W$.

Nach Definition der Produkttopologie finden wir zu jedem Punkt $y \in \operatorname{im} u$ Umgebungen $U_y \subset X$ von x und $V_y \subset Y$ von y, so dass $U_y \times V_y \subset W$. Da K kompakt ist, reichen endlich viele der offenen Mengen $u^{-1}(V_y)$ aus, um K zu überdecken. Seien $y_1, \ldots, y_N \in \operatorname{im} u$ die entsprechenden Punkte, dann ist

$$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_N} \subset X$$

eine offene Umgebung von x mit $U \subset \mathrm{in}^{-1}(S_{u,K,W})$, denn

$$U \times \operatorname{im} u \subset (U_{y_1}\times V_{y_1}) \cup \cdots \cup (U_{y_N}\times V_{y_N}) \subset W \ . \qquad \square$$

Seien X, Y, Z Mengen, dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Abb}(X\times Y, Z) \cong \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y,Z)) \ , \qquad F \longmapsto f = \big(x \mapsto F(x,\,\cdot\,) \in \mathrm{Abb}(Y,Z)\big) \ .$$

Wenn wir Y^X für $\mathrm{Abb}(X,Y)$ schreiben, ließt sich das als „Exponentialgesetz“ $(z^y)^x = z^{xy}$. Da dies ein Beispiel einer formalen Adjunktion ist, nennen wir f und F zueinander *adjungiert.* Das andere Expontialgesetz $z^{x+y} = z^x \cdot z^y$ hat ebenfalls ein topologisches Analogon, das wir uns in Übung 1.165 anschauen.

1.101. Satz (Exponentialgesetz). *Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topologische Räume, und $C(Y, Z)$ trage die kompakt-offene Topologie $\mathcal{O}_{\mathrm{ko}}$.*

(1) *Dann existiert eine injektive Abbildung*

$$\alpha\colon C(X \times Y, Z) \longrightarrow C(X, C(Y, Z)) \qquad \textit{mit} \qquad F \longmapsto (x \mapsto F(x, \cdot\,)) \; .$$

Sie ist stetig bezüglich der kompakt-offenen Topologien.

(2) *Die obige Abbildung α ist genau dann bijektiv für alle Räume $(X, \mathcal{O}_X)$, wenn die Auswertungsabbildung*

$$\mathrm{ev}\colon C(Y, Z) \times Y \longrightarrow Z \qquad \textit{mit} \qquad \mathrm{ev}(g, y) = g(y)$$

stetig ist. Das gilt insbesondere dann, wenn $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal kompakt ist.

(3) *Wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ Hausdorff und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal kompakt ist, ist die Abbildung α ein Homöomorphismus bezüglich der kompakt-offenen Topologien.*

Wir beweisen diesen Satz hier nicht vollständig. In Kapitel 4 gehen wir zu einer „angenehmen“ Unterkategorie $kw\mathcal{H}$ von $\mathcal{T}op$ über, in der der obige Satz nicht nur etwas einfacher zu beweisen ist, sondern auch ohne zusätzliche Voraussetzungen an X und Y gilt. In dieser Kategorie können wir die Bijektivität von α in (2) als universelle Eigenschaft des „internen hom-Funktors“ $C(Y, Z)$ deuten, falls wir $X \times Y$ schon kennen. Umgekehrt können wir es auch als universelle Eigenschaft des „Tensorproduktes“ $X \times Y$ lesen, wenn wir $C(Y, Z)$ schon kennen. Dann ergibt sich (3) durch abstrakte Überlegungen. In der Kategorie $\mathcal{T}op$ funktioniert all das leider nicht.

Beweis. Zu (1) sei eine stetige Abbildung $F\colon X \times Y \to Z$ gegeben. Wegen der Propositionen 1.98 (1) und (1.100) erhalten wir $\alpha(F) \in C(X, C(Y, Z))$ als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \xrightarrow{\mathrm{in}} C(Y, X \times Y) \xrightarrow{F\circ} C(Y, Z) \; .$$

Da die stetigen Abbildungen eine Teilmenge aller Abbildungen bilden, ergibt sich die Injektivität von α aus der Vorüberlegung. Die Stetigkeit von α beweisen wir hier nicht.

Zu (2) sei zunächst $\mathrm{ev}\colon C(Y, Z) \times Y \to Z$ stetig. Wir erhalten $f \in C(X, C(Y, Z))$ ein Urbild unter α als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \times Y \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_Y} C(Y, Z) \times Y \xrightarrow{\mathrm{ev}} Z \; .$$

Umgekehrt erhalten wir die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}\colon C(Y, Z) \times Y \to Z$ als Urbild von $\mathrm{id}_{C(Y,Z)}$ unter α für $X = C(Y, Z)$, denn für $g \in C(Y, Z)$ gilt

$$\alpha(\mathrm{ev})(g) = \mathrm{ev}(g, \cdot\,) = g = (\mathrm{id}_{C(Y,Z)} g) \; .$$

Den Beweis von (3) lassen wir wieder aus. □

1.102. Bemerkung. Es sei jetzt (Y, d) ein metrischer Raum.

(1) Eine Folge $(f_i)_i$ in $C(X, Y)$ konvergiert genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn $(f_i)_i$ *gleichmäßig auf Kompakta* gegen f konvergiert (oder kurz: *kompakt konvergiert*), das heißt, wenn es zu jeder stetigen Abbildung $u\colon K \to X$ von einem Kompaktum nach X und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d\big(f_i(x), f(x)\big) < \varepsilon$$

für alle $x \in K$ und alle $i \geq n$ gibt (Übung 1.163).

(2) Sei X lokalkompakt, dann ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie wegen (1) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz, das heißt, jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert. Zur Erinnerung: in Analysis I wurde gezeigt, dass die Teilmenge der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Intervall I

unter gleichmäßiger Konvergenz in $\mathrm{Abb}(I,\mathbb{R})$ folgenabgeschlossen ist. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, hätte lokal gleichmäßige Konvergenz dafür auch ausgereicht.

(3) Wenn X sogar kompakt ist, ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.

(4) Wenn X eine *kompakte Ausschöpfung* besitzt, das heißt, wenn X als Vereinigung kompakter Mengen K_i mit $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$ geschrieben werden kann, können wir eine Metrik auf $C(X,Y)$ angeben, die die kompakt offene Topologie auf $C(X,Y)$ induziert, siehe Übung 1.164.

Um gleichmäßige Konvergenz topologisch zu definieren, wenn X nicht kompakt ist, brauchen wir eine stärkere Struktur als nur eine Topologie auf dem Raum Y.

1.l. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beschreiben jetzt zwei wichtige Klassen topologischer Räume. Die Grundidee bei beiden Konstruktionen besteht darin, Räume zu konstruieren, die sich in einem gewissen Sinne ähnlich verhalten wie $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie. Während Mannigfaltigkeiten (oft mit Zusatzstruktur, zum Beispiel „differenzierbar“) in der Geometrie eine große Rolle spielen, brauchen wir CW-Komplexe später für viele Konstruktionen in der (algebraischen) Topologie.

1.103. Definition. Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit* der *Dimension* $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

1.104. Beispiel. Die folgenden Räume sind Mannigfaltigkeiten.

(1) Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(2) Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. Hierzu betrachtet man die stereographischen Projektion vom Nord- und Südpol $(0,\dots,0,\pm 1)$ aus auf den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

(3) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hierzu reicht es zu zeigen, dass offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind. Betrachte dazu die Abbildung

$$B_r(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \qquad \text{mit} \qquad y \mapsto \frac{1}{r-|y-x|}\,(y-x)\ .$$

(4) Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, dann ist M, versehen mit der Unterraumtopologie, eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(5) Es sei $(-\infty,\omega_1)$ die geordnete Menge aus Bemerkung 1.41, dann versehen wir

$$X = \big((-\infty,\omega_1)\times[0,1)\big) \setminus \{(0,0)\}$$

mit der *lexikographischen Ordnung,* das heißt

$$(x,r) \prec (y,s) \quad \Longleftrightarrow \quad x \prec y \quad \text{oder} \quad \big(x = y \text{ und } r < s\big)$$

und der zugehörigen Ordnungstopologie. Dieser Raum heißt auch die (halb-) lange Gerade (die lange Gerade erhält man als Vereinigung zweier Kopien, von denen eine die umgekehrte Odnung trägt, und einem Punkt $(0,0)$ genau dazwischen).

Man kann zeigen, dass X lokal zu $\mathbb{R}$ homömorph ist. Sei beispielsweise $\omega_0 = \sup\mathbb{N} \prec \omega_1$ die kleinste unendliche Ordinalzahl. Als Umgebung betrachten wir das Intervall $I = (-\infty,(\omega_0+1,0)) \subset X$. Die Abbildung $I \to (-1,1) \subset \mathbb{R}$ mit

$$(x,s) \mapsto \begin{cases} s & \text{falls } x = \omega_0, \text{ und} \\ -2^{-1-x}(2-s) & \text{falls } x \prec \omega_0, \end{cases}$$

ist eine ordnungserhaltende Bijektion, also ein Homöomorphismus bezüglich der Ordnungstopologien. Aber X enthält überabzählbar viele disjunkte offene Teilmengen der Form $\{x\} \times (0,1)$, kann also keine abzählbare Basis haben.

1.105. Bemerkung. (1) Man beachte, dass (A1) und (T1) automatisch erfüllt sind, da jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ besitzt.

(2) Wir verlangen die Hausdorff-Eigenschaft (T2), um den Raum aus Beispiel 1.28 und ähnliche Konstrukte auszuschliessen. Wir verlangen abzählbare Basen (A2), damit unsere Mannigfaltigkeiten nicht zu groß werden. Betrachte dazu etwa die obige (halb-) lange Gerade oder das Produkt aus dem Intervall $(0,1)$ mit einer überabzählbaren, diskreten Menge.

(3) Man kann zeigen, dass Mannigfaltigkeiten (T3) erfüllen, also regulär sind, daher nach dem Metrisationssatz von Urysohn metrisierbar (siehe Bemerkung 1.39), also insbesondere sogar normal.

(4) Wir werden in Satz 3.51 sehen, dass die Dimension eine lokale Invariante ist: eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ genau dann isomorph, wenn $n = m$ gilt. Wir verlangen, dass eine Mannigfaltigkeit nur aus Komponenten einer festgelegten Dimension besteht.

Mit dieser Definition lässt sich zeigen, dass man jede Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^N$ einbetten kann, wenn N hinreichend groß gewählt wurde.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist jedoch für viele Zwecke zu speziell. Die folgende Konstruktion liefert hingegen (überraschenderweise) eine Klasse von topologischen Räumen, die einerseits noch halbwegs anschaulich, und andererseits für die meisten Konstruktionen in der algebraischen Topologie allgemein genug ist. Als Referenz verweisen wir auf den Anhang von [**H1**] und auf Abschnitt 4.d.

Wir bezeichnen mit $D^n = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ den abgeschlossenen n-dimensionalen Einheitsball, und mit $\partial D^n = S^{n-1}$ seinen Rand. Hier wie auch im Folgenden bezieht sich ein hochgestellter Index immer auf eine Art Dimension und bezeichnet insbesondere nicht etwa einen Exponenten.

(1) Wir beginnen mit einem diskreten topologischen Raum X^0, dem 0-*Gerüst* oder 0-*Skelett,* dessen Punkte wir auch 0-*Zellen* nennen.

(2) Sei das $(n-1)$-Gerüst X^{n-1} bereits induktiv konstruiert, sei I^n eine beliebige Indexmenge, und sei $(\varphi_i^n)_{i\in I^n}$ eine Familie stetiger Abbildungen von S^{n-1} nach X^{n-1}. Mit Satz 1.78 erhalten wir eine Abbildung

$$\varphi^n = \coprod_i \varphi_i^n \colon \coprod_i \partial D^n \to X^{n-1} \qquad \text{mit} \qquad \varphi^n(i,x) = \varphi_i^n(x)\ .$$

Dann konstruieren wir das n-Gerüst X_n, indem wir $\#I^n$-viele Kopien von D^n mit X^{n-1} entlang der Abbildung ϕ^n verkleben wie in Folgerung 1.86, siehe Diagramm (1.3):

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I^n} D^n & \xrightarrow{\Phi^n} & X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi^n} \coprod_{i\in I^n} D^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod_{i\in I^n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi^n} & X^{n-1}\ . \end{array}$$

Mit Satz 1.78 zerfällt Φ^n wiederum als disjunkte Vereinigung einer Familie $(\Phi_i^n)_{i\in I^n}$ von Abbildungen von D^n nach X^n.

(3) Wir können entweder nach endlich vielen Schritten aufhören mit $X = X^n$, oder diesen Prozess für alle $n \in \mathbb{N}_0$ fortsetzen. In diesem Fall liefert Folgerung 1.87 den Kolimes

$$X = \operatorname{colim} X^n\ .$$

Als Menge ist X die aufsteigende Vereinigung der Räume $X^0 \subset X^1 \subset \dots$
Durch diese Konstruktionen ist die Topologie auf X induktiv durch die Abbildungen $\varphi_i^n \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ festgelegt.

1.106. Definition. Ein so konstruierter topologischer Raum X heißt *CW-Komplex.* Die Teilmenge $X^n \subset X$ heißt das *n-Gerüst* oder *n-Skelett*) von X. Die Abbildungen

$$\varphi_i^n \colon S^{n-1} \to X^{n-1} \hookrightarrow X$$

heißen *Verklebeabbildungen,* die

$$\Phi_i^n \colon D^n \to X^n \hookrightarrow X$$

charakteristische Abbildungen. Man nennt $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$ eine (*offene*) *n-Zelle* und $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ eine *abgeschlossene n-Zelle* von X.

Die Buchstaben „CW“ stehen für *closure finite, weak topology,* siehe unten. Man beachte, dass offene Zellen als Teilmengen von X nicht notwendigerweise offen sind. Die Skelette, Zellen und charakteristischen Abbildungen hängen dabei nicht nur vom Raum X, sondern von der konkreten Konstruktion ab. Wir werden trotzdem später salopp von einem CW-Komplex X und seinen Gerüsten, Zellen etc. sprechen, auch wenn wir die genaue Konstruktion nicht immer angeben.

1.107. Beispiel. Die folgenden Räume sind CW-Komplexe:

$X = S^n$	mit	$X^0 = \dots = X^{n-1} = \mathrm{pt}$,	$X^n = \dots = S^n$;
	oder mit	$X^j = S^j$ für $j \le n$,	$X^n = \dots = S^n$;
$X = \mathbb{R}$	mit	$X^0 = \mathbb{Z}$,	$X^1 = \dots = \mathbb{R}$;
$X = \mathbb{R}^2$	mit	$X^0 = \mathbb{Z}^2$, $X^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,	$X^2 = \dots = \mathbb{R}^2$;
$X = \mathbb{R}^n$	mit	$X^0 = \mathbb{Z}^n$, $\dots$,	$X^n = \dots = \mathbb{R}^n$;

Das erste Beispiel zeigt, dass ein gegebener topologischer Raum auf (viele) verschiedene Weisen als CW-Komplex geschrieben werden kann.

Wir wollen jetzt einige grundlegende Fakten über CW-Komplexe zusammenstellen.

1.108. Proposition. *Es sei $X = \operatorname{colim} X^n$ mit $X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi^n} \coprod_{i \in I^n} D^n$ ein CW-Komplex.*

(1) *Für eine Teilmenge $U \subset X$ sind äquivalent:*
   (a) *U ist offen (abgeschlossen) in X,*
   (b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $U \cap X^n$ offen (abgeschlossen) in X^n,*
   (c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ ist $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ offen (abgeschlossen) in D^n.*

(2) *Für einen topologischen Raum Y und eine Abbildung $f \colon X \to Y$ sind äquivalent:*
   (a) *f ist stetig,*
   (b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f|_{X^n} \colon X^n \to Y$ stetig,*
   (c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ ist $f \circ \Phi_i^n \colon D^n \to Y$ stetig.*

(3) *Für alle n ist $X^n \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Die CW-Topologie auf X^n stimmt mit der Unterraumtopologie überein.*

Beweis. Die erste Äquivalenz in (1) ergibt sich aus der Konstruktion des Kolimes als Quotient der disjunkten Vereinigung aller X^n. Für die zweite Äquivalenz benutzen wir induktiv die Konstruktion des Pushouts.

Eigenschaft (2) folgt analog aus den universellen Eigenschaften des Kolimits und des Pushouts, siehe Folgerungen 1.86 und 1.87.

Zu (3) zeigen wir induktiv, dass X^n abgeschlossene Teilmenge von X^m ist für alle $m \ge n$. Im Induktionsschritt von $m-1$ auf m beachten wir, dass alle φ_i^m stetig und folglich alle $(\varphi_i^m)^{-1}(X^n)$

in S^{m-1} abgeschlossen sind. Da $S^{m-1} \subset D^m$ abgeschlossen ist, ist folglich auch $(\Phi_i^m)^{-1}(X^n) = (\varphi_i^m)^{-1}(X^n) \subset D^m$ abgeschlossen. Wegen (1) ist X^n in X abgeschlossen.

Eine Teilmenge $A \subset X^n$ ist in der CW-Topologie auf X^n nach (1) genau dann abgeschlossen, wenn $(\Phi_i^\ell)^{-1}(A)$ in D^ℓ abgeschlossen ist für alle $\ell \leq n$ und alle $i \in I^\ell$. Mit dem obigen induktiven Argument folgt, dass $(\Phi_i^\ell)^{-1}(A)$ in D^ℓ abgeschlossen ist für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^\ell$. Das ist äquivalent dazu, dass A in X abgeschlossen ist, und da X^n in X abgeschlossen ist, auch dazu, dass A in X^n mit der Unterraumtopologie abgeschlossen ist. Die Rückrichtung ist klar. □

1.109. Bemerkung. *CW*-Komplexe erfüllen nicht automatisch das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und sind daher auch nicht immer metrisierbar, siehe Beispiel 1.36 (2). Als Beispiel betrachten wir einen *CW*-Komplex mit 0-Skelett

$$X^0 = \mathbb{N} \dot\cup \{*\} .$$

Wir wählen $I^1 = \mathbb{N}$ und definieren Verklebefunktionen

$$\varphi_n^1 \colon \{-1, 1\} \to X^0 \qquad \text{mit} \qquad \varphi_n^1(-1) = * \qquad \text{und} \qquad \varphi_n^1(1) = n .$$

Unser *CW*-Komplex $X = X^1$ sieht also aus wie ein Stern mit abzählbar vielen Zacken. Äquivalent schreiben wir

$$X = ([-1, 1] \times \mathbb{N})/\!\sim ,$$

wobei $(-1, m) \sim (-1, n)$ für alle m, $n \in \mathbb{N}$, während alle anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sind.

Es sei jetzt $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Umgebungen des Punktes $*$. Für jedes n existiert also $\varepsilon_n > 0$, so dass $[-1, \varepsilon_n - 1) \subset (\Phi_n^1)^{-1}(U_n)$. Wir definieren

$$V = \coprod_{n\in\mathbb{N}} \Big[-1, \frac{\varepsilon_n}{2} - 1\Big)\Big/\!\sim \subset X .$$

Nach Proposition 1.108 (1) ist das eine offene Umgebung von $*$ in X, aber für kein $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \subset V$. Folglich hat $*$ keine abzählbare Umgebungsbasis.

Da der Raum $[-1, 1] \times \mathbb{N}$ sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom (A2) erfüllt, erhalten wir auch ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 1.85 (3). Analog kann man zeigen, dass die CW-Topologie auf X echt feiner ist als die metrische Topologie, bei der wir X als Vereinigung radialer Strecken in einem Vektorraum mit der französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.114 auffassen.

1.110. Satz. *CW-Komplexe sind normal.*

Beweis. Sei $X = \operatorname{colim} X^n$ ein CW-Komplex. Zu zeigen ist, dass (T1) und (T4) gelten, und (T1) ist äquivalent dazu, dass Punkte in X abgeschlossen sind.

Sei also $x \in X$. Da $X = \operatorname{colim} X^n$, existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$. Da

$$X^{n_0} \setminus X^{n_0-1} = \coprod_{i\in I^{n_0}} e_i^{n_0} ,$$

liegt x in genau einer Zelle $e_{i_0}^{n_0}$ von X^{n_0}. Also ist $\{x\}$ abgeschlossen in X^{n_0}, und wegen Proposition 1.108 (3) auch in X.

Anstelle von (T4) beweisen wir induktiv die äquivalente Formulierung aus Urysohns Lemma 1.29. Seien dazu A, $B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Da X^0 diskret ist, können wir mit einer beliebigen Funktion $f^0 \colon X^0 \to [0, 1]$ starten, so dass $f^0|_{A\cap X^0} \equiv 0$ und $f^0|_{B\cap X^0} \equiv 1$.

Sei $f^{n-1} \colon X^n \to [0, 1]$ gegeben, so dass $f^{n-1}|_{A\cap X^{n-1}} \equiv 0$ und $f^{n-1}|_{B\cap X^{n-1}} \equiv 1$. Da für alle $i \in I^n$ die Teilmenge $S^{n-1} \cup (\Phi_i^n)^{-1}(A) \cup (\Phi_i^n)^{-1}(B)$ in D^n abgeschlossen und D^n normal ist, finden wir nach dem Satz 1.32 von Tietze eine stetige Funktion $f_i^n \colon D^n \to [0, 1]$, so dass

$$f_i^n|_{S^{n-1}} = f^{n-1} \circ \varphi_i^n , \qquad f_i^n|_{(\Phi_i^n)^{-1}(A)} \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad f_i^n|_{(\Phi_i^n)^{-1}(B)} \equiv 1 .$$

Die Funktionen f^{n-1} und $\coprod_{i\in I^n} f_i^n$ erfüllen die Verklebebedingung aus Folgerung 1.86 (1), also definieren sie zusammen eine stetige Funktion $f^n\colon X^n \to [0,1]$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Schließlich erfüllen die Funktionen $f^n\colon X^n \to X$ die analoge Bedingung aus Folgerung 1.87 (1) und definieren daher eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. □

1.111. Definition. Ein *Unterkomplex* Y eines CW-Komplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus einer Vereinigung von Zellen von X besteht. Ein CW-Komplex heißt *endlich,* wenn er aus endlich vielen Zellen besteht.

Da einzelne n-Zellen e_i^n für $n > 0$ selbst nicht abgeschlossen sind, gehören auch alle Zellen, die vom Rand von $\bar{e}_i^n$ getroffen werden, mit zum Unterkomplex. Insbesondere sind Unterkomplexe selbst wieder CW-Komplexe, und man kann sich wie in Proposition 1.108 überzeugen, dass die Unterraumtopologie eines Unterkomplexes $Y \subset X$ mit seiner CW-Komplex-Topologie übereinstimmt, indem man induktiv die CW-Topologie auf Y^n mit der Unterraumtopologie von $Y^n \subset X^n$ vergleicht.

Um einem möglichen Missverständnis vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass der Abschluss einer Zelle e_i^n nicht notwendigerweise ein Unterkomplex von X ist, genausowenig ihr Rand $\partial e_i^n \subset X^{n-1}$ (obwohl das in vielen Beispielen durchaus so sein wird).

1.112. Satz. *Ein Unterraum A eines CW-Komplexes X ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossenen und in einem endlichen Unterkomplex von X enthalten ist.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Jede abgeschlossene Zelle $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ ist als Bild einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum kompakt, siehe Bemerkung 1.59 (2). Ein endlicher Unterkomplex ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Zellen, und daher immer noch kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichen Unterkomplexes ist auch in X abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.59 (1) kompakt.

„$\Longrightarrow$“: Es sei zunächst $B \subset X$ eine Teilmenge, so dass $B \cap e_i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ höchstens einen Punkt enthält. Wir behaupten, dass B in X abgeschlossen ist. Da X^0 ein diskreter Raum ist, ist $B \cap X^0$ in X^0 abgeschlossen. Sei jetzt $B \cap X^{n-1}$ in X^{n-1} abgeschlossen, dann ist für alle $i \in I^n$ auch $(\Phi_i^n)^{-1}(B \cap X^{n-1})$ in D^n abgeschlossen. Da $(\Phi_i^n)^{-1}(B)$ höchstens einen weiteren Punkt enthält, ist auch diese Teilmenge in D^n abgeschlossen. Folglich ist $B \cap X^n$ in X^n abgeschlossen, und damit nach Proposition 1.108 (1) auch B in X. Jede Teilmenge von B ist aus dem gleichen Grund abgeschlossen, also trägt B als Unterraum von X die diskrete Topologie.

Sei jetzt $A \subset X$ kompakt, dann ist A abgeschlossen nach Bemerkung 1.59 (5). Wir wählen eine Teilmenge $B \subset A$, die für jede Zelle e_i^n mit $A \cap e_i^n \neq \emptyset$ genau einen Punkt $b_i^n \in A \cap e_i^n$ enthält. Dann ist B in A abgeschlossen und somit kompakt, und trägt die diskrete Topologie. Da ein diskreter kompakter Raum nur aus endlich vielen Punkten bestehen kann, kann ein kompakter Unterraum nur endlich viele offene Zellen treffen.

Zu zeigen bleibt, dass jede Zelle in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Für 0-Zellen ist das klar. Induktiv nehmen wir an, dass alle Zellen bis zur Dimension $n-1$ jeweils in endlichen Unterkomplexen enthalten sind. Der Rand einer n-Zelle e_i^n ist kompakt und trifft somit nur endlich viele Zellen; diese haben Dimension $< n$ und sind somit in endlichen Unterkomplexen enthalten. Also ist e_i^n in einer endlichen Vereinigung endlicher Unterkomplexe mit der Zelle e_i^n enthalten. □

Aus der Kompaktheit von D^n folgt also insbesondere, dass das Bild $\overline{e_i^n}$ von Φ_i^n nur endlich viele Zellen trifft (daher „closure finite“). Mit „weak topology“ ist die in Proposition 1.108 (1) beschriebene Topologie gemeint. Und für alle $i \in I^n$ ist $\Phi_i^n|_{B^n}\colon B^n \to X$ eine Einbettung mit Bild e_i^n. Dadurch lassen sich CW-Komplexe sogar charakterisieren.

1.113. Satz (ohne Beweis, siehe [**H1**]). *Sei X ein Hausdorff-Raum und $(\Phi_i^n\colon D^n \to X)_{n\in\mathbb{N}_0, i\in I^n}$ für jedes n eine Familie stetiger Abbildungen. Dann sind die Abbildungen Φ_i^n genau dann die charakteristischen Abbildungen eines CW-Komplexes auf X, wenn*

1. *die Einschränkungen $\Phi_i^n|_{B^n}$ Einbettungen sind, und X als Menge die disjunkte Vereinigung ihrer Bilder e_i^n ist,*
2. *die Bilder der $\Phi_i^n|_{\partial D^n}$ jeweils nur endlich viele offene Zellen treffen,*
3. *und eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$ für alle n und alle $i \in I^n$ abgeschlossen ist.*

1.m. Übungen zu Kapitel 1

Übungen zu Abschnitt 1.a.

1.114. Übung. Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x,y) = \begin{cases} \|y-x\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. (V, d_f) ist ein metrischer Raum.
2. Sei $d_n(x,y) = \|y-x\|$ die übliche Metrik. Die Identität $\mathrm{id}_V\colon (V,d_f) \to (V,d_n)$ ist stetig, nicht jedoch $\mathrm{id}_V\colon (V,d_n) \to (V,d_f)$.

1.115. Übung. Es seien (X,d), (Y,d') metrische Räume und $\alpha \in (0,1]$ gegeben. Eine Abbildung $F\colon (X,d) \to (Y,d')$ heißt *α-Höldersch,* falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle x, $y \in X$ gilt:

$$d'\big(F(x),F(y)\big) \le C\, d(x,y)^\alpha \ .$$

1-Höldersche Abbildungen heissen auch Lipschitzsch. Zeigen Sie, dass jede α-Höldersche Abbildung stetig ist.

1.116. Übung. Sei p eine Primzahl. Jede rationale Zahl $q \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r\, \frac{a}{b} \ ,$$

mit r, a, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, so dass p, a und b paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall definieren wir die *p-adische Bewertung* von q durch $\|q\|_p = p^{-r}$ und $\|0\|_p = 0$. Dadurch wird die p-adische Metrik

$$d_p(x,y) = \|y-x\|_p$$

auf $\mathbb{Q}$ induziert.

1. Zeigen Sie, dass d_p wirklich eine Metrik ist, also die Axiome (1)–(3) aus Definition 1.1 erfüllt.
2. Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:
$$d_p(x,z) \le \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\} \ ,$$
und „$<$“ kann nur auftreten, wenn $d_p(x,y) = d_p(y,z)$ gilt.
3. Folgern Sie daraus: Für alle x, $y \in (\mathbb{Q}, d_p)$ und alle ε, $\delta > 0$ seien $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ metrische Bälle bezüglich d_p, dann sind $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ entweder disjunkt, oder einer der beiden Bälle enthält den anderen.

1.117. Übung. Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in X. Zeigen Sie: die Folge x_i konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von x in X ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $x_i \in U$ für alle $i \ge n_0$.

Übungen zu Abschnitt 1.b.

1.118. Übung. Sei X eine beliebige Menge, und sei

$$\mathcal{O} = \{\, U \subset X \;\big|\; X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge} \,\} \cup \{\emptyset\} \quad \subset \quad \mathcal{P}X \;.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X definiert. Diese Topologie heißt auch die *koendliche Topologie.*

1.119. Übung. Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ *Zariski-abgeschlossen,* wenn es eine Menge $P \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ von Polynomen gibt, so dass

$$A = \left\{\, z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P \,\right\} . \tag{*}$$

Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen,* wenn $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}_Z$ aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie.*
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen: (1) $\emptyset$ und $\mathbb{C}^n$ sind Zariski-abgeschlossen; (2) wenn $A_1, \ldots, A_k$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ (betrachten Sie hierzu geeigenete Produkte der definierenden Polynome); (3) wenn alle $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \;.$$

Bemerkung: Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man für jedes A nur jeweils endlich viele Polynome braucht, um A wie in (*) zu definieren.

1.120. Übung. Seien X und Y beliebige Mengen. Zeigen Sie:

(1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ die diskrete Topologie, und sei $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, Y\}$ die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F\colon (X, \mathcal{O}_\delta) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G\colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_K)$ stetig.
(2) Seien $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ beliebige Topologien auf X und Y. Falls für jeden beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ alle Abbildungen $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G\colon (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, dann ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$ die diskrete und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie.

1.121. Übung. Es sei $F\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir nennen F *stetig am Punkt* $x \in X$ genau dann, wenn für jede Umgebung $V \subset Y$ von $F(x)$ das Urbild $F^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x ist.

(1) Zeigen Sie, dass F genau stetig ist, wenn F an jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
(2) Es seien d, d' Metriken auf X beziehungsweise Y, so dass $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{d'}$. Zeigen Sie, dass die obige Definition zu Definition 1.3 äquivalent ist.

Übungen zu Abschnitt 1.c.

1.122. Übung. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien A, A_0 und A_1 abgeschlossene Teilmengen von X, und A_0 und A_1 seien disjunkt. Zeigen Sie:

(1) die Funktion $d_A\colon X \to \mathbb{R}$ mit $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ ist stetig;
(2) es gilt $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$;
(3) die Funktion $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$ hat die in Satz 1.25 (3) geforderten Eigenschaften.

1.123. Übung. Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und sei $\mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie auf X. Welche Trennungseigenschaften besitzt $(X, \mathcal{O}_K)$?

1.124. Übung. Es sei X eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie $\mathcal{O}$ aus Aufgabe 1.118. Welche Trennungseigenschaften besitzt $(X, \mathcal{O})$?

1.125. Übung. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{N}$ heiße offen bezüglich der Topologie $\mathcal{O}_<$, wenn aus $m \in U$ auch $n \in U$ für alle $n \geq m$ folgt.

(1) Überprüfen Sie, dass $\mathcal{O}_<$ die Axiome einer Topologie erfüllt.
(2) Welche Trennungseigenschaften hat $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_<)$?

1.126. Übung. Zeigen Sie:

(1) die Zariski-Topologie $\mathcal{O}_Z$ auf $\mathbb{C}^n$ ist für kein $n \geq 1$ hausdorffsch, erfüllt aber $(T1)$.
(2) Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ definiert eine stetige Abbildung $p\colon (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z) \to (\mathbb{C}, O_Z)$.
(3) Versuchen Sie zu erklären, warum (2) nicht Bemerkung 1.27 (2) widerspricht.

Hinweis: Um (1) zu beweisen, überlegen Sie sich, dass für alle Polynome p gilt:

(1) wenn $p(x) \neq 0$, dann existiert ein kleiner metrischer Ball $B_\varepsilon(x)$, auf dem p nirgends verschwindet.
(2) wenn p auf einem kleinen metrischen Ball verschwindet, dann verschwindet es auf ganz $\mathbb{C}^n$.

Übungen zu Abschnitt 1.d.

1.127. Übung. Betrachte den Raum $X = [0,1]^2$ mit

$$d\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist.
(2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt $(X, \mathcal{O}_d)$?

1.128. Übung. Es sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf einer Menge Y. Zeigen Sie:

(1) Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert genau dann gegen einen Punkt $y \in Y$, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ mit $y \in S$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_i \in S$ für alle $i \geq i_0$.
(2) Eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ das Urbild $f^{-1}(S)$ in X offen ist.

Übungen zu Abschnitt 1.e.

1.129. Übung. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn jeder Filter auf X höchstens einen Grenzwert hat.

1.130. Übung. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X und $\mathcal{F}$ der von ihr induzierte Filter gemäß Beispiel 1.43 (4). Zeigen Sie:

(1) Der Filter $\mathcal{F}$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn die Folge $(x_n)_n$ gegen x konvergiert.
(2) Der Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn er ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$ ist.

1.131. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 1.47.

1.132. Übung. Betrachte

$$\mathcal{F} = \big\{\, U \subset \mathbb{R} \;\big|\; \text{es gibt } \delta > 0, \text{ so dass } (0, \delta) \subset U \,\big\} \subset \mathcal{P}\mathbb{R}\,.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ ein freier Filter auf $\mathbb{R}$ ist.
(2) Konvergiert $\mathcal{F}$ in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?
(3) Sei jetzt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Übersetzen Sie die Aussage „$f\mathcal{F}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$“ in die Sprache der Analysis I.

Übungen zu Abschnitt 1.f.

1.133. Übung. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}_{d_X}$, und sei $Y \subset X$ versehen mit der induzierten Metrik $d_Y = d|_{Y\times Y}$. Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{O}_{d_X}$ induzierte Unterraumtopologie $\mathcal{O}_Y$ mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_Y}$ übereinstimmt.

1.134. Übung. Manchmal möchte man Funktionen durch Fallunterscheidung definieren und sicherstellen, dass die so definierte Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich stetig ist. Dazu seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, und $A_1, \ldots, A_k \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A_1 \cup \cdots \cup A_k$. Es sei $f\colon X \to Y$ gegeben, so dass $f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ für alle $i = 1, \ldots, k$ stetig ist bezüglich der Unterraumtopologie auf A_i. Zeigen Sie, dass dann $f\colon X \to Y$ ebenfalls stetig ist.

1.135. Übung. Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, dann definieren wir eine Metrik $d_{X\times Y}$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ durch

$$d_{X\times Y}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\big\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\big\} .$$

Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{O}_{d_X}$ und $\mathcal{O}_{d_Y}$ induzierte Produkttopologie mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_{X\times Y}}$ übereinstimmt.

1.136. Übung. Zeigen Sie: ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn die Diagonale

$$\Delta X = \big\{\, (x, x) \in X \times X \;\big|\; x \in X \,\big\}$$

als Teilmenge des Produktes $X \times X$ abgeschlossen ist.

1.137. Übung. Wir versehen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und alle Unterräume mit der Standardtopologie. Welche der folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

$$F\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2 \qquad F(t) = \big(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\big) , \tag{a}$$

$$G\colon [0,1) \to \mathbb{R}^2 \qquad G(t) = \big(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\big) . \tag{b}$$

$$H\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad H(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 , \\ 1/n & \text{sonst.} \end{cases} \tag{c}$$

1.138. Übung. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine überabzählbare Familie topologischer (T1)-Räume mit jeweils mehr als einem Punkt für alle $i \in I$. Zeigen Sie: dann besitzt $\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft.

1.139. Übung. Es sei X eine Menge und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von *Halbmetriken,* das heißt, $d_n\colon X \times X \to [0, \infty]$ erfüllt die Axiome (2) und (3) aus Definition 1.1 sowie $d_n(x, x) = 0$ für alle $x \in X$. Außerdem existiere zu x, $y \in X$ mit $x \neq y$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d_n(x, y) > 0$. Dann definieren wir $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ durch

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}\, d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)} ,$$

wobei wir $\frac{2^{-n}\cdot\infty}{1+\infty} = 2^{-n}$ setzen. Zeigen Sie:

(1) Für jedes n erfüllt $(x, y) \mapsto \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)}$ wieder die Dreiecksungleichung.
(2) Die Abbildung d ist eine Metrik auf X.
(3) Eine Basis der Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{B} = \big\{\, B_{0,\varepsilon}(x) \cap \cdots \cap B_{n,\varepsilon}(x) \;\big|\; x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0 \,\big\} ,$$

wobei $\quad B_{k,\varepsilon}(x) = \big\{\, y \in X \;\big|\; d_k(x, y) < \varepsilon \,\big\} .$

(4) Eine Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{S} = \left\{ B_{n,\varepsilon}(x) \;\middle|\; x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0 \right\} .$$

(5) Das topologische Produkt abzählbar vieler metrischer Räume ist metrisierbar.

1.140. Übung. Es sei I eine Menge und X ein topologischer Raum. Wir identifizieren $\mathrm{Abb}(I, X)$ mit $\prod_{i\in I} X$ so, dass

$$\mathrm{Abb}(I, X) \ni (f\colon I \to X) \longmapsto (f(i))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X .$$

Zeigen Sie:

(1) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Abb}(I, X)$ konvergiert genau dann bezüglich der Produkttopologie gegen eine Abbildung $f\colon I \to X$, wenn sie punktweise konvergiert, das heißt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i) \qquad \text{für alle } i \in I .$$

(2) Sei X jetzt ein (T1)-Raum. Die obige Folge konvergiert genau dann bezüglich der Box-Topologie, wenn sie punktweise konvergiert und zusätzlich eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$f_n(i) = f(i) \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } i \in I \setminus I_0 .$$

Falls X ein metrischer Raum ist, ist die Box-Topologie für unendliche I sogar wesentlich feiner als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Übungen zu Abschnitt 1.g.

1.141. Übung. Seien $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O})$ Hausdorff-Räume, X sei kompakt, und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $F(X) \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, kompakt ist.

1.142. Übung. Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.
Hinweis: Per Definitionem sind kompakte Räume Hausdorffsch.

1.143. Übung. Zeigen Sie, dass offene Teilmengen kompakter Räume lokalkompakt sind.

1.144. Übung. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n$.

(1) Zeigen Sie beispielsweise mit Hilfe der stereographischen Projektion, dass S^n homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ ist.
(2) Finden Sie eine Kompaktifizierung $\iota\mathbb{R}^n \hookrightarrow K$ des $\mathbb{R}^n$, so dass $K \setminus \operatorname{im}\iota$ mehr als einen Punkt enthält.

1.145. Übung. Es sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X. Zeigen Sie, dass sich $x_\bullet\colon \mathbb{N} \to X$ genau dann stetig auf $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $\infty \mapsto x_\infty$ fortsetzen lässt, wenn die Folge (x_i) gegen x_∞ konvergiert.

Übungen zu Abschnitt 1.h.

1.146. Übung. Es seien X, Y quasikompakt, und $\mathcal{U}$ sei eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Zeigen Sie:

(1) Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine Umgebung U_x von x, so dass $U_x \times Y$ von endlich vielen Elementen aus $\mathcal{U}$ überdeckt wird.
(2) Es existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

1.147. Übung. Es bezeichne ℓ^∞ den Raum der beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(1) Die Einschränkungsabbildung $r\colon C(\beta\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \ell^\infty$ ist bijektiv.
(2) Wir versehen ℓ^∞ und $C(\beta\mathbb{N},\mathbb{R})$ jeweils mit der Supremumsmetrik. Dann ist r eine Isometrie.

1.148. Übung. Wir betrachten den Raum $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$, versehen mit der Topologie zur Basis

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = &\left\{ B_r(p) \;\middle|\; p \in B_1(0) \text{ und } 0 < r \leq 1 - \|p\| \right\} \\ &\cup \left\{ B_r\big((1-r)p\big) \cup \{p\} \;\middle|\; p \in S^1 \subset X \text{ und } 0 < r < 1 \right\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(1) Für alle $p \in S^1 \subset X$ ist die Funktion $f_p\colon X \to [-1,1]$ mit

$$f_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = p \text{ und} \\ \dfrac{\langle q, q-p\rangle}{\langle p, q-p\rangle} & \text{für } q \neq p \end{cases}$$

stetig auf X und erfüllt $\big\langle q-p, q-f_p(q)\,p\big\rangle = 0$. Sie nimmt für alle $r \in (0,1]$ auf dem Kreis mit Radius r um $(1-r)p$ den Wert $1-2r$ an, außer im Punkt p.
(2) Der Raum X ist vollständig regulär.
(3) Der Raum X hat eine abzählbare dichte Teilmenge $Q = B_1(0) \cap \mathbb{Q}^2$ und erfüllt (A1), aber nicht (A2).
(4) Der Raum X ist nicht normal.
(5) Lässt sich X in einen normalen Raum einbetten?

Hinweis: Benutzen Sie in (1) den Satz des Thales. Zeigen Sie zu (4), dass jede reellwertige Funktion auf dem abgschlossenen Unterraum $S^1 \subset X$ stetig ist, sich aber nicht alle diese Funktionen stetig auf X fortsetzen lassen. Sie dürfen verwenden, dass $\mathrm{Abb}(S^1,\mathbb{R})$ eine größere Kardinalität hat als $\mathrm{Abb}(Q,\mathbb{R})$.

Übungen zu Abschnitt 1.i.

1.149. Übung. Betrachten Sie den Raum $X = [0,1]^2$ mit der Topologie aus Übung 1.127.
(1) Geben Sie einen Homöomorphismus $X \to \coprod_{i\in[0,1]}[0,1]$ an.
(2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

1.150. Übung. Sei $\Bbbk$ ein beliebiger Körper. Es seien V_i Vektorräume über $\Bbbk$ für $i \in I$. Wir betrachten die direkte Summe und das

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i\in I} V_i &:= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I, \text{ fast alle } x_i = 0\} \\ \subset \prod_{i\in I} V_i &:= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(1) Die direkte Summe ist ein Koprodukt in $\mathcal{V}ec_\Bbbk$.
(2) Das direkte Produkt ist ein Produkt in $\mathcal{V}ec_\Bbbk$.
(3) Für die Dualräume gilt

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* = \prod_{i\in I} V_i^*.$$

1.151. Übung. Seien $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ und $(Z,\mathcal{O}_Z)$ topologische Räume mit stetigen Abbildungen

$$(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\;f\;} (Y,\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\;g\;} (Z,\mathcal{O}_Z).$$

(1) Falls $\mathcal{O}_Y$ die von g und $\mathcal{O}_Z$ induzierte Topologie ist, und $\mathcal{O}_X$ die von f und $\mathcal{O}_Y$ induzierte Topologie ist, dann ist $\mathcal{O}_X$ auch gleich der von $g \circ f$ und $\mathcal{O}_Z$ induzierten Topologie.
(2) Falls $\mathcal{O}_Y$ die von f und $\mathcal{O}_X$ koinduzierte Topologie ist, und $\mathcal{O}_Z$ die von g und $\mathcal{O}_Y$ koinduzierte Topologie ist, dann ist $\mathcal{O}_Z$ auch gleich der von $g \circ f$ und $\mathcal{O}_X$ koinduzierten Topologie.

1.152. Übung. Führen Sie den Beweis von Satz 1.83 (2) aus.

1.153. Übung. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, sei $V \subset Y$, und sei $f\colon V \to X$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf V. Zeigen Sie:

(1) die Topologie $\mathcal{O}_X$ ist genau die von der Verklebungstopologie auf $X \subset X \cup_f Y$ induzierte Unterraumtopologie;
(2) wenn V abgeschlossen ist und X und Y beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für $X \cup_f Y$.

1.154. Übung. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der komplexe Einheitskreis, und sei $z = e^{i\varphi} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten auf S^1 die von $x \sim zx$ erzeugte Äquivalenzrelation, das heißt, $x \sim y$ genau dann, wenn $x/y = z^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf $S^1/\sim$, unterscheiden Sie die Fälle $\varphi \in 2\pi\mathbb{Q}$ und $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Q}$.

1.155. Übung. Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (y_1, y_2) = \left(rx_1, \frac{x_2}{r}\right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \,.$$

(1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im $\mathbb{R}^2$.
(2) Skizzieren Sie $X = \mathbb{R}^2/\sim$.
(3) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf X, zum Beispiel durch Angabe einer Basis.

1.156. Übung. Betrachten Sie die in Aufgabe 1.155 definierte Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$. Sei wie vorhin $X = \mathbb{R}^2/\sim$, sei $Y = \big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)/\sim$ und $Z = \big(\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})\big)/\sim$.

(1) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt X?
(2) Zeigen Sie, dass Y zum Raum aus Beispiel 1.28 homöomorph ist.
(3) Zu welchem bekannten Raum ist Z homöomorph?

1.157. Übung. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein normaler topologischer Raum, sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung, und sei $\mathcal{O}_Y$ die Quotiententopologie auf Y. Zeigen Sie:

(1) wenn Urbilder $f^{-1}(\{y\})$ von Punkten in Y abgeschlossen sind in X, gilt (T1) für $(Y, \mathcal{O}_Y)$;
(2) wenn f *abgeschlossen* ist, das heißt, wenn $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen $A \subset X$, dann gilt (T4) für $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Wir haben also ein einfaches Kriterium dafür, wann Quotienten normaler Räume wiederum normal sind.

Übungen zu Abschnitt 1.j.

1.158. Übung. Zeigen Sie: ein topologischer Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nicht zur disjunkten Vereinigung zweier nicht leerer topologischer Räume homöomorph ist.

1.159. Übung. Sei

$$X = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \,\middle|\, x \neq 0 \right\} \cup \big(\{0\} \times [-1,1]\big) \quad \subset \quad \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ induzierten Unterraumtopologie.

(1) Skizzieren Sie X.
(2) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

(3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von X.

1.160. Übung. Zeigen Sie:

(1) Der Raum der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend sowohl bezüglich der metrischen Topologie als auch bezüglich der p-adischen Topologien für alle Primzahlen p.
(2) Der Raum $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z)$ ist zusammenhängend.

1.161. Übung. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie topologischer Räume und $X = \prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ ihr Produkt. Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes $(x_i)_{i\in I} \in X$ das Produkt der Wegzusammenhangskomponenten der Punkte $x_i \in X_i$ ist. Falls alle X_i nicht leer sind, ist insbesondere X genau dann wegzusammenhängend, wenn alle X_i wegzusammenhängend sind.

Übungen zu Abschnitt 1.k.

1.162. Übung. Beweisen Sie Proposition 1.98.

1.163. Übung. Es sei X ein Hausdorff-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Dann konvergiert eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C(X, Y)$ genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn (f_i) gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert.

1.164. Übung. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Wir nehmen an, dass es Kompakta $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X gibt, so dass

$$K_i \subset \mathring{K}_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad X = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i \,.$$

Zeigen Sie:

(1) Durch
$$d_i(f, g) = \sup_{x\in K_i} d_Y(f(x), g(x))$$
wird eine Folge von Halbmetriken auf $C(X, Y)$ definiert, so dass für alle $f \neq g\colon X \to Y$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $d_i(f, g) \neq 0$ existiert.
(2) Die Konstruktion aus Übung 1.139 liefert eine Metrik d auf $C(X, Y)$, die die kompakt-offene Topologie induziert.

1.165. Übung. Formulieren und beweisen Sie ein topologisches Analogon des „anderen Exponentialgesetzes“ $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$.

1.166. Übung. Es sei X ein topologischer Raum, $f\colon X \to Y$ sei surjektiv, und Y trage die Quotiententopologie. Es sei außerdem Z ein lokalkompakter topologischer Raum. Wir bezeichnen die Produkttopologie mit $\mathcal{O}_\sqcap$ und die Quotiententopologie auf $Y \times Z$ zur Abbildung $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ mit $\mathcal{O}_{\mathrm{fin}}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig sind:

$$\mathrm{id}_{Y\times Z}\colon (Y \times Z, \mathcal{O}_{\mathrm{fin}}) \to (Y \times Z, \mathcal{O}_\sqcap)\,, \tag{1}$$
$$\mathrm{id}_{Y\times Z}\colon (Y \times Z, \mathcal{O}_\sqcap) \to (Y \times Z, \mathcal{O}_{\mathrm{fin}})\,. \tag{2}$$

Hinweis zu (2): betrachten Sie das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{in}} & C(Z, (X \times Z, \mathcal{O}_\sqcap)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & C(Z, (Y \times Z, \mathcal{O}_{\mathrm{fin}})) \end{array}$$

und benutzen Sie das Exponentialgesetz 1.101 (2).

Übungen zu Abschnitt 1.l.

1.167. Übung. Sei $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ein (Schief-)Körper, und sei $k = 1$, 2 oder $4 = \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk$, dann sei

$$\big(\Bbbk P^n, \mathcal{O}_{\Bbbk P^n}\big) = \big(\Bbbk^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}\big) \,/\sim ,$$

wobei $(x_0,\dots,x_n) \sim (y_0,\dots,y_n)$ genau dann, wenn es ein $z \in \Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$ gibt, so dass $y_i = zx_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Die Äquivalenzklasse von $(x_0,\dots,x_n)$ wird auch als $[x_0 : \cdots : x_n]$ geschrieben. Zeigen Sie, dass $\Bbbk P^n$, versehen mit der Quotiententopologie, eine kn-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass $\Bbbk P^n$ die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von $U_i = \{\, [x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0 \,\} \subset \Bbbk P^n$ nach $\Bbbk^n \cong \mathbb{R}^{nk}$.

1.168. Übung. Es sei $\Bbbk P^n$ wie oben definiert und $k = \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk$. Die Abbildung

$$H^n_\Bbbk \colon S^{k(n+1)-1} \longrightarrow \Bbbk^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{q_n} \Bbbk P^n$$

heißt *Hopffaserung.* Die Abbildung q_n ist die Quotientenabbildung, und wir schreiben

$$q_n(z_0,\dots,z_n) = [z_0 : \cdots : z_n] \,.$$

Zeigen Sie:

(1) Für einen quasikompakten Raum X und einen Hausdorffraum Y ist jede stetige Bijektion $F \colon X \to Y$ ein Homöomorphismus.
(2) Die Abbildungen

$$\Bbbk P^n \ni [z_0 : \cdots : z_n] \longmapsto [z_0 : \cdots : z_n : 0] \in \Bbbk P^{n+1}$$

$$\text{und} \qquad D^{k(n+1)} \ni (z_0,\dots,z_n) \longmapsto \left[z_0 : \cdots : z_n : \sqrt{1 - |z|^2}\right] \in \Bbbk P^{n+1}$$

mit $D^{k(n+1)} = \big\{\, z \in \Bbbk^{n+1} \;\big|\; |z| \leq 1 \,\big\}$ sind stetig.
(3) Der Raum $\Bbbk P^n \cup_{H^n_\Bbbk} D^{k(n+1)}$ ist homöomorph zu $\Bbbk P^{n+1}$.
(4) Der projektive Raum $\Bbbk P^n$ lässt sich als CW-Komplex schreiben.

1.169. Übung. Wir definieren

$$\Bbbk P^\infty = \operatorname{colim} \Bbbk P^n \,.$$

Sei $\Bbbk^\infty$ der Vektorraum der endlichen $\Bbbk$-wertigen Folgen, und sei

$$Q = \big(\Bbbk^\infty \setminus \{0\}\big) \,/\sim \qquad \text{mit „}\sim\text{“ wie oben.}$$

Zeigen Sie:

(1) die natürliche Abbildung $F \colon \Bbbk P^\infty \to Q$ ist bijektiv;
(2) sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\Bbbk^\infty$ und sei $\mathcal{O}_Q$ die dazugehörige Quotiententopologie auf Q, dann ist F stetig;
(3) (*Zusatzaufgabe*) die Umkehrabbildung F^{-1} ist für keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\Bbbk^\infty$ stetig.

KAPITEL 2

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Wir behandeln in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese Gruppe lässt sich für geeignete topologische Räume X auf zweierlei Art definieren:

(1) Als Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ der Homotopieklassen von Wegen $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit festem Anfangs- und Endpunkt $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$, oder
(2) Als Gruppe Γ, die auf einem einfach zusammenhängenden Raum $\widetilde{X}$ wirkt, mit $X \cong \widetilde{X}/\Gamma$.

2.1. Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei $p = 1$.

(1) Wir beschränken uns im folgenden auf stückweise glatte Wege. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$, dann erhalten wir die Umlaufzahl

$$\nu(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\, dt \quad \in \quad \mathbb{Z}\,.$$

In der Tat werden wir zeigen, dass je zwei Wege in $\mathbb{C}^*$ mit Anfangs- und Endpunkt $p = 1$ und der gleichen Umlaufzahl um 0 in $\mathbb{C}^*$ (mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten) homotop sind. Also ist $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$.

(2) Betrachte die (leicht modifizierte) Exponentialabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto e^{2\pi i\, z}$, dann gilt

$$e^{2\pi i\, z_0} = e^{2\pi i\, z_1} \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 - z_0 \in \mathbb{Z}\,.$$

Wir können also $\mathbb{C}^*$ als Quotient des einfach zusammenhängenden Raumes $\mathbb{C}$ nach der Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}$ schreiben; dabei wirkt $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}$ durch Addition, geometrisch also durch Verschiebungen.

Wir wollen ab sofort (sofern nicht anders angegeben) unter einem Raum immer einen topologischen Raum verstehen, und unter einer Abbildung, einer Funktion oder einem Weg immer eine stetige Abbildung, eine stetige Funktion, oder einen stetigen Weg.

2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Homotopie von Abbildungen ein. Wir dürfen uns Homotopien als Wege im Raum der Abbildungen vorstellen. Indem wir statt stetiger Abbildungen Äquivalenzklassen homotoper stetiger Abbildungen betrachten, können wir den Begriff des Homöomorphismus durch den wesentlich gröberen Begriff der Homotopieäquivalenz ersetzen. Im Rest dieser Vorlesung lernen wir Methoden kennen, um nicht homotope Abbildungen oder nicht homotopieäquivalente Räume voneinander zu unterscheiden.

Ab sofort geben wir die Topologien nicht mehr an, wenn es nicht unbedingt nötig ist. Falls nicht anders angegeben, seien Abbildungen zwischen topologischen Räumen immer stetig.

2.2. Definition. Seien X, Y topologische Räume. Zwei Abbildungen $f_0, f_1\colon X \to Y$ heißen *homotop*, kurz $f_0 \sim f_1$, wenn es eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung $H\colon X \times [0,1] \to Y$ mit $H(x,t) = f_t(x)$ für $t \in \{0,1\}$ gibt. Dann heißt H eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1, und wir schreiben $H_t = H(\,\cdot\,, t)\colon X \cong X \times \{t\} \to Y$ für alle $t \in [0,1]$. Die Menge aller zu f homotopen Abbildungen heißt die (*freie*) *Homotopieklasse* von f und wird mit $[f]$ bezeichnet.

2.3. Bemerkung. (1) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von einem Raum in einen anderen (Übung 2.72), und ihre Äquivalenzklassen sind gerade Homotopieklassen.
(2) Homotopie ist verträglich mit Hintereinanderschalten von Abbildungen:

$$\big(f_0 \sim f_1 \colon Y \to Z \quad \text{und} \quad g_0 \sim g_1 \colon X \to Y\big) \qquad \Longrightarrow \qquad (f_0 \circ g_0) \sim (f_1 \circ g_1) \colon X \to Z \ .$$

2.4. Definition. Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g \colon Y \to X$ gibt, so dass

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \colon X \to X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y \colon Y \to Y \ .$$

In diesem Fall heißen X und Y *homotopieäquivalent,* und g heißt ein *Homotopieinverses* zu f.

Ein Raum X heißt *zusammenziehbar,* wenn er zu einem einpunktigen Raum homotopieäquivalent ist.

Die Räume $B^n \subset D^n \subset \mathbb{R}^n$ sind zusammenziehbar. Allgemeiner sind auch sternförmige Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zusammenziehbar. Es gibt aber noch weitere Beispiele, siehe Beispiel 2.11.

2.5. Bemerkung. (1) Jeder Homöomorphismus f ist insbesondere eine Homotopieäquivalenz mit $g = f^{-1}$.
(2) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume (Übung 2.73).
(3) Betrachte die (naive) *Homotopie-Kategorie* $\mathcal{HT}op$ mit den gleichen Objekten wie die Kategorie $\mathcal{T}op$ aus Beispiel 1.20 (4) und den Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op}(X, Y) = C(X, Y)/\sim \ .$$

Die Identität auf X im Sinne von Definition 1.19 (3) ist die Homotopieklasse $[\mathrm{id}_X]$ der Abbildung id_X. Die Verkettung von Homotopieklassen ist nach Bemerkung 2.3 (2) wohldefiniert.

Ein Morphismus $f \colon X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt invertierbar oder *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g \colon Y \to X$ (ein *Inverses*) gibt, so dass

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y \ .$$

Wenn ein Inverses existiert, ist es eindeutig (Übung?). Beispiele sind Bijektionen in $\mathcal{S}et$, Gruppenisomorphismen in $\mathcal{G}rp$, lineare Isomorphismen in $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$, und natürlich Homöomorphismen in $\mathcal{T}op$. Nach obiger Definition sind Homotopieäquivalenzen gerade die Isomorphismen in $\mathcal{HT}op$.

Algebraische Topologie versucht unter anderem, gewisse Klassen von Räumen bis auf Homotopie-Äquivalenz zu unterscheiden.

Oftmals ist freie Homotopie ein etwas zu grober Begriff. Beispielsweise ist ein Weg $\gamma \colon [0, 1] \to X$ immer homotop zur konstanten Abbildung auf seinen Anfangspunkt.

2.6. Definition. Ein *Paar topologischer Räume*, kurz *Paar*, besteht aus einem topologischen Raum X und einer beliebigen Teilmenge $A \subset X$. Eine *Abbildung* $f \colon (X, A) \to (Y, B)$ *von Paaren* ist eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ mit $f(A) \subset B$. Ein *punktierter* (*topologischer*) *Raum* (X, x_0) ist ein Paar $(X, \{x_0\})$ mit $x_0 \in X$. Der Punkt x_0 heißt auch *Basispunkt.* Eine *punktierte Abbildung* $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine Abbildung der entsprechenden Paare, es gilt also $f(x_0) = y_0$.

2.7. Definition. Es seien (X, A) ein Paar und Y ein Raum. Zwei Abbildungen f, $g \colon X \to Y$ heißen *homotop relativ zu* A, wenn es eine Homotopie $H \colon X \times [0, 1] \to Y$ zwischen f und g gibt mit

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } t \in [0, 1] \ .$$

Der Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ ist in $\mathbb{C}^*$ frei homotop zu einem konstanten Weg vermöge

$$H(t,s) = e^{2\pi i(1-s)t} \ .$$

Wir werden aber bald sehen, dass γ nicht relativ zu $\{0,1\}$ (also relativ zu den Endpunkten) homotop zum konstanten Weg ist.

2.8. Bemerkung. Wir erinnern uns an die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.97.

(1) Wie in Satz 1.101 gehört zu jeder Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ zwischen $f,\ g\colon X \to Y$ ein stetiger Weg $h\colon [0,1] \to (C(X,Y), \mathcal{O}_{\mathrm{ko}})$ von f nach g mit

$$(h(s))(x) = H_s(x) = H(x,s)$$

für alle $x \in X$, $s \in [0,1]$. Wenn X lokal kompakt ist, liefert jeder solche Weg umgekehrt eine Homotopie. In diesem Fall sind Wegzusammenhangskomponenten in $C(X,Y)$ also gerade Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y.

(2) Sei jetzt $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann betrachte die Teilmenge

$$C_{f|A}(X,Y) = \{\, g \in C(X,Y) \mid g|_A = f|_A \,\} \subset C(X,Y) \ ,$$

dann liefert eine Homotopie relativ zu A einen Weg in $C_{f|A}(X,Y)$ wie oben. Wenn X lokal kompakt ist, gehört wie oben zu jedem Weg in $C_{f|A}(X,Y)$ eine relative Homotopie. Das folgt aus (1), indem man $C_{f|A}(X,Y)$ mit der Unterraumtopologie versieht und deren charakterisierende Eigenschaft ausnutzt.

Zum Schluss geben wir ein Beispiel, dass Homotopieäquivalenzen mitunter nicht so offensichtlich sind, wie sie erscheinen.

2.9. Definition. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *Retrakt von X*, wenn es eine stetige Abbildung $f\colon X \to A$ mit $f|_A = \mathrm{id}_A$ gibt. Sie heißt *Deformationsretrakt*, wenn zusätzlich $\iota \circ f\colon X \to X$ homotop zur Identität id_X ist, und *starker Deformationsretrakt*, wenn die Homotopie zwischen $\iota \circ f$ und id_X sogar relativ zu A gewählt werden kann.

2.10. Beispiel.

(1) Jede einpunktige Menge $\{p\} \subset X$ ist Retrakt von X, aber nur dann Deformationsretrakt, wenn X zusammenziehbar ist. Beispielsweise ist $\{1\} \subset \mathbb{C}^*$ kein Deformationsretrakt (Beweis später).

(2) Der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{C}^*$ mit

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \qquad \text{und} \qquad H(z,s) = \frac{z}{|z|^s} \ .$$

Er ist aber kein Retrakt von ganz $\mathbb{C}$ (Beweis später).

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man sich nicht jede Deformationsretraktion vorstellen kann.

2.11. Beispiel. Bings „Haus mit zwei Zimmern“ kann man basteln, indem man zwei leere Dosen mit den Unterseiten aneinanderklebt. Dann bohrt man von jeder Seite durch einen Deckel und die gemeinsamen Unterseiten je ein Loch am Rand, und klebt je einen passenden Zylinder zwischen ein Deckel- und ein Unterseitenloch so ein, dass dieser auf seiner vollen Länge den jeweiligen Dosenrand berührt (Abbildung 2.1, linkes Bild). Man kann jetzt durch das Loch in der einen Dose in das „Zimmer“ in der anderen Dose gelangen und umgekehrt.

Man überzeugt sich, dass Bings Haus ein starker Deformationsretrakt einer vollen Dose ist (Abbildung 2.1, rechtes Bild), genau wie ein Punkt in der Dose. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, ist Bings Haus zusammenziehbar. Die zugehörige Deformationsretraktion kann man sich aber kaum vorstellen.

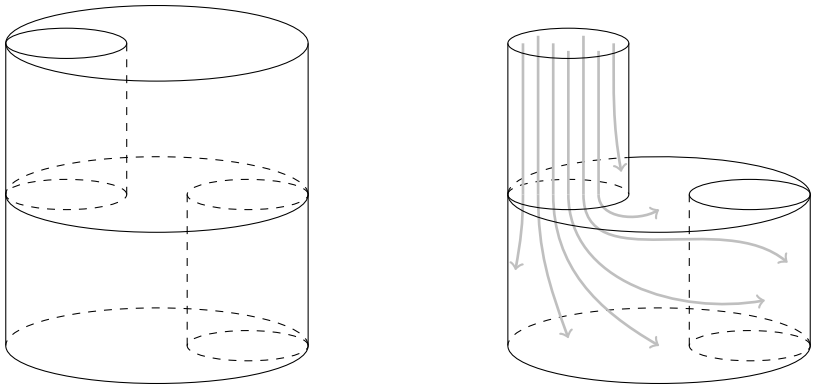


ABBILDUNG 2.1. Bings Haus mit zwei Räumen

2.b. Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes misst, wieviele Typen von nichtzusammenziehbaren Schleifen es in einem topologischen Raum gibt. Beispielsweise ist ein Fahrrad dann sicher an einem Gitter angeschlossen, wenn das Fahrradschloss sowohl im umgebenden Raum ohne Gitter, als auch im umgebenden Raum ohne Fahrrad nicht zusammenziehbar ist. Wir definieren hier die Fundamentalgruppe und geben erste Eigenschaften an. Für Anwendungen benötigen wir einige Techniken, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden.

2.12. DEFINITION. Es sei (X,x) ein punktierter topologischer Raum. Eine *Schleife* in (X,x) ist ein Weg von x nach x, also eine Abbildung $\gamma\colon [0,1]\to X$ mit $\gamma(0)=\gamma(1)=x$. Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X,x), dann ist ihre *Verkettung* die Schleife $\gamma_1\gamma_2\colon [0,1]\to X$ mit

$$(\gamma_1\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & \text{falls } 0\le t\le \frac{1}{2}\text{ , und}\\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2}\le t\le 1\text{ .}\end{cases}$$

Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X,x)$ ist die Menge aller Schleifen in (X,x) modulo Homotopie relativ zu $\{0,1\}$.

Bei der Verkettung werden also beide Schleifen nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir benutzen Übung 1.134 um zu sehen, dass die Verkettung wieder stetig ist.

Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ bedeutet für Schleifen soviel wie Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere gilt für eine solche Homotopie zwischen γ_0 und γ_1, dass

$$\begin{aligned} H(0,s)=H(1,s)&=x && \text{für alle } s\in[0,1]\text{ , und}\\ H(t,s)&=\gamma_s(t) && \text{für alle } t\in[0,1] \text{ und alle } s\in\{0,1\}\text{ .}\end{aligned}$$

2.13. SATZ. *$\pi_1(X,x)$ bildet mit der Verkettung eine Gruppe. Das neutrale Element und das Inverse zu $[\gamma]\in\pi_1(X,x)$ werden repräsentiert durch e beziehungsweise $\bar\gamma\colon[0,1]\to X$, mit*

$$e(t)=x \qquad \textit{und} \qquad \bar\gamma(t)=\gamma(1-t) \qquad \textit{für alle } t\in[0,1]\text{ .}$$

BEWEIS. Hier ist einiges zu zeigen: zunächst die Wohldefiniertheit der Verkettung relativer Homotopieklassen, dann die Gruppenaxiome.

Seien H_1 und $H_2\colon[0,1]\times[0,1]\to X$ relative Homotopien zwischen den Schleifen α_0 und α_1 beziehungsweise zwischen β_0 und β_1. Wir verketten die Homotopien und erhalten

$$H=\begin{cases}H_1(2t,s) & \text{falls } 0\le t\le \frac{1}{2}\text{ , und}\\ H_2(2t-1,s) & \text{falls } \frac{1}{2}\le t\le 1\text{ .}\end{cases}$$

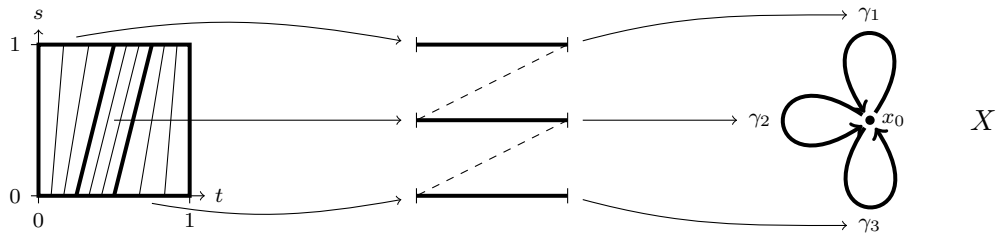
Dann ist H eine Homotopie zwischen $\alpha_0\beta_0$ und $\alpha_1\beta_1$ relativ zu $\{0,1\}$, also ist die Verkettung mit relativer Homotopie verträglich, und damit als Verknüpfung auf $\pi_1(X,x)$ wohldefiniert.

Zur Assoziativität überlegen wir uns, dass

$$\big((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3\big)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \le t \le 1/4\ , \\ \gamma_2(4t-1) & 1/4 \le t \le 1/2\ , \\ \gamma_3(2t-1) & 1/2 \le t \le 1\ ; \end{cases}$$

$$\big(\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)\big)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le 1/2\ , \\ \gamma_2(4t-2) & 1/2 \le t \le 3/4\ , \\ \gamma_3(4t-3) & 3/4 \le t \le 1\ . \end{cases}$$

Also konstruieren wir eine Homotopie zwischen $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ und $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ wie im folgenden Bild,



also in Formeln als

$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma_1\big(4t/(1+s)\big) & 0 \le t \le (1+s)/4\ , \\ \gamma_2\big(4t-(1+s)\big) & (1+s)/4 \le t \le (2+s)/4\ , \\ \gamma_3\big(1-4(1-t)/(2-s)\big) & (2+s)/4 \le t \le 1\ . \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass $[e]$ ein linksneutrales Element ist, konstruieren wir ähnlich wie oben eine relative Homotopie zwischen $e\gamma$ und γ für eine beliebige Schleife γ. Schließlich überprüfen wir, dass $[\overline{\gamma}]$ nur von $[\gamma]$ abhängt und zu $[\gamma]$ linksinversiv ist. Dazu konstruieren wir eine Homotopie

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(1-2st) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}\text{, und} \\ \gamma(1-2s(1-t)) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1\ . \end{cases}$$

zwischen e und $\overline{\gamma}\gamma$. Damit haben wir die Gruppenaxiome für $\pi_1(X,x)$ nachgewiesen.

Insbesondere folgt, dass $[e]$ das eindeutige, beidseitige neutrale Element und $[\overline{\gamma}]$ das eindeutige, beidseitige Inverse zu $[\gamma]$ ist. □

Wir werden später etwas nachlässig sein und manchmal γ statt $[\gamma]$ schreiben.

2.14. Satz. *Sei X ein Raum, x, $y \in X$. Jede Homotopieklasse von Wegen von x nach y induziert einen Isomorphismus von $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$. Insbesondere hängt der Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X,x)$ nicht vom Basispunkt x ab, wenn X wegzusammenhängend ist.*

Beweis von Satz 2.14. Sei $\alpha\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y, dann betrachte die Abbildung

$$\pi_1(X,x) \ni \gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \in \pi_1(X,y)\ .$$

Wie im obigen Beweis sieht man, dass $[\overline{\alpha}\gamma\alpha]$ weder von der Klammerung noch von den relativen Homotopieklassen von α und γ abhängt. Es handelt sich um einen Homomorphismus, da

$$(\overline{\alpha}\gamma_1\alpha)(\overline{\alpha}\gamma_2\alpha) \sim (\overline{\alpha}\gamma_1)(\alpha\overline{\alpha})(\gamma_2\alpha) \sim (\overline{\alpha}\gamma_1)e(\gamma_2\alpha) \sim (\overline{\alpha}\gamma_1)(\gamma_2\alpha) \sim \overline{\alpha}(\gamma_1\gamma_2)\alpha\ .$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus wird analog von $\overline{\alpha}$ induziert, denn $\bar{\overline{\alpha}} = \alpha$ und

$$\alpha(\overline{\alpha}\gamma\alpha)\overline{\alpha} \sim (\alpha\overline{\alpha})\gamma(\alpha\overline{\alpha}) \sim e\gamma e \sim \gamma\ .$$ □

Man schreibt daher manchmal $\pi_1(X)$, wenn X wegzusammenhängend ist und es nur auf den Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X,x)$ ankommt, aber nicht auf die einzelnen Elemente.

2.15. Bemerkung. Für $x = y$ gehört also zu jedem $\alpha \in \pi_1(X,x)$ ein innerer Automorphismus von $\pi_1(X,x)$, nämlich

$$\gamma \longmapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \ .$$

Wenn $\pi_1(X,x)$ nicht kommutativ ist, ist das nicht die Identität auf $\pi_1(X,x)$. In diesem Fall kann man nicht von den Elementen von $\pi_1(X)$ sprechen, ohne einen Fußpunkt zu fixieren.

So, wie man in einer Kategorie nicht nur Objekte betrachtet, sondern immer auch Morphismen, betrachtet man nicht nur Kategorien für sich, sondern auch „Abbildungen“ zwischen ihnen. Dabei muss man vorsichtig sein, da Abbildungen im strengen Sinne nur zwischen Mengen, aber nicht zwischen Klassen definiert sind.

2.16. Definition. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor* $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ordnet jedem Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ ein Objekt $\mathcal{F}A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ und jedem Morphismus $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ einen Morphismus $\mathcal{F}F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ zu, so dass

$$\mathcal{F}\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\mathcal{F}A} \ , \tag{1}$$

$$\mathcal{F}(F \circ G) = \mathcal{F}F \circ \mathcal{F}G \tag{2}$$

für alle $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ und alle $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C)$, $G \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$.

2.17. Definition. Wir betrachten die Kategorien $\mathcal{T}op_+$ (und $\mathcal{HT}op_+$) der punktierten topologischen Räume und der (relativen Homotopieklassen von) stetigen Abbildungen mit

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{T}op_+) = \mathrm{Obj}(\mathcal{HT}op_+) = \big\{\, (X,x) \;\big|\; X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T}op) \text{ und } x \in X \,\big\} \ ,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_+}\big((X,x),(Y,y)\big) = \big\{\, F\colon X \to Y \;\big|\; F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X,Y) \text{ und } F(x) = y \,\big\}$$

$$\text{und} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op_+}\big((X,x),(Y,y)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_+}\big((X,x),(Y,y)\big) \,/\sim \ ,$$

wobei $\sim$ hier Homotopie relativ zum Basispunkt bezeichnet. Die Identität auf (X,x) ist die (relative Homotopieklasse der) Abbildung $\mathrm{id}_{(X,x)}$, und die Verkettung ist die Hintereinanderausführung.

Später werden wir die Klasse der Objekte in $\mathcal{HT}op_+$ etwas einschränken, siehe Beispiel 4.64 (2).

2.18. Beispiel. Durch Vergessen der Basispunkte und Übergang zu (relativen) Homotopieklassen von Abbildungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}op_+ & \longrightarrow & \mathcal{HT}op_+ \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{T}op & \longrightarrow & \mathcal{HT}op \end{array}$$

Die Konstruktion B im Beweis der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist ebenfalls ein Funktor. Das ergibt sich aus dem zweiten Teil von Lemma 1.75.

2.19. Satz. *Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor*

$$\pi_1\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{G}rp$$

von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Dabei wird (X,x) auf $\pi_1(X,x)$ und $F\colon (X,x) \to (Y,y)$ auf $F_* = \pi_1 F\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ abgebildet mit

$$F_*[\gamma] = [F \circ \gamma] \in \pi_1(Y,y) \qquad \textit{für alle } [\gamma] \in \pi_1(X,x) \ .$$

Dieser Funktor ist auch auf $\mathcal{HT}op_+$ wohldefiniert.

BEWEIS. Sei $F\colon (X,x) \to (Y,y)$ eine stetige punktierte Abbildung. Als erstes zeigen wir, dass $\pi_1 F = F_*$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Sei H eine relative Homotopie zwischen γ_0, $\gamma_1\colon ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x)$, dann ist die Abbildung $F \circ H\colon [0,1]\times[0,1] \to Y$ eine relative Homotopie zwischen $F\circ\gamma_0$ und $F\circ\gamma_1$, also ist F_* wohldefiniert.

Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X,x). Dann folgt

$$(F\circ\gamma_1)(F\circ\gamma_2) = F\circ(\gamma_1\gamma_2)$$

direkt aus Definition 2.12, also ist F_* ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes überprüfen wir, dass π_1 die beiden Eigenschaften aus Definition 2.16 erfüllt. Da $\mathrm{id}_X \circ \gamma = \gamma$, gilt offensichtlich (1), also

$$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)}\ .$$

Seien $F\colon (Y,y)\to(Z,z)$ und $G\colon (X,x)\to(Y,y)$ punktierte Abbildungen. Dann folgt (2), da

$$(F\circ G)_*[\gamma] = [(F\circ G)\circ\gamma] = [F\circ(G\circ\gamma)] = F_*(G_*[\gamma])\ .$$

Um zu zeigen, dass π_1 auch auf $\mathcal{HT}op_+$ wohldefiniert ist, müssen wir nur überprüfen, dass F_* nur von der relativen Homotopieklasse von F abhängt. Sei also $H\colon X\times[0,1]\to Y$ eine relative Homotopie zwischen F_0 und $F_1\colon (X,x)\to(Y,y)$, dann ist die Abbildung $[0,1]\times[0,1]\to Y$ mit

$$(t,s) \longmapsto H(\gamma(t),s)$$

eine relative Homotopie zwischen $F_{0*}\gamma$ und $F_{1*}\gamma$. □

Wir können den Funktor $\pi_1\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{G}rp$ also in zwei Funktoren

$$\mathcal{T}op_+ \longrightarrow \mathcal{HT}op_+ \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{G}rp\ ,$$

zerlegen, dabei ist der erste Funktor der gleiche wie in Beispiel 2.18.

Wegen Bemerkung 2.15 dürfen wir jedoch auf keinen Fall den Basispunkt vergessen, wir erhalten also keinen Funktor $\mathcal{T}op \to \mathcal{G}rp$. Später werden uns Homologie und Kohomologie solche Funktoren (mit Werten in abelschen Gruppen) liefern.

Funktoren bilden Isomorphismen auf Isomorphismen ab (Übung), weitere Folgerungen aus den Funktor-Axiomen lernen wir später kennen.

2.20. FOLGERUNG. *Seien (X,x), (Y,y) homotopieäquivalente Paare topologischer Räume, dann ist $\pi_1(X,x)$ isomorph zu $\pi_1(Y,y)$.* □

2.21. DEFINITION. Ein nicht leerer topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend,* wenn er wegzusammenhängend ist mit $\pi_1(X) = \{e\}$.

Hierbei haben wir ausgesnutzt, dass der Isomorphietyp von $\pi_1(X,x)$ nach Satz 2.14 nicht vom Basispunkt $x\in X$ abhängt. In Übung 2.75 lernen Sie andere Charakterisierungen einfach zusammenhängender Räume kennen.

2.22. BEISPIEL.
(1) Der einpunktige Raum $\{*\}$ ist einfach zusammenhängend, da es nur die konstante Schleife $t\mapsto *$ gibt.
(2) Sei X zusammenziehbar, dann ist X nach Definition 2.4 zu $\{*\}$ homotopieäquivalent, also folgt $\pi_1(X) = \{e\}$. Man kann zeigen, dass zusammenziehbare Räume immer wegzusammenhängend sind, also ist X auch einfach zusammenhängend.

2.c. Die Fundamentalgruppe der S^1

In diesem Abschnitt rechnen wir unsere erste Fundamentalgruppe aus, und zwar „von Hand“. Anschließend beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz und den Satz von Borsuk-Ulam als Anwendungen davon.

Wir fassen S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ (mit der Unterraumtopologie) auf. Um $\pi_1(S^1, 1)$ zu berechnen, brauchen wir den Begriff der Überlagerung.

2.23. Definition. Eine Abbildung $p\colon \widetilde{X} \to X$ heißt *Überlagerung,* wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x, eine Menge M mit diskreter Topologie und einen Homömorphismus $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times M$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} U \times M & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ & \searrow^{\pi_U} & \downarrow & & \downarrow p \\ & & U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

kommutiert. Wir nennen dann U *gleichmäßig überlagert.* Eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ heißt *universell,* wenn $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

2.24. Beispiel. Betrachte die modifizierte komplexe Exponentialabbildung $p = e^{2\pi i \cdot} : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$. Diese Abbildung ist eine Überlagerung, denn jeder Punkt $z = e^{2\pi i s} \in S^1$ hat eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $S^1 \setminus \{-z\}$, denn es gibt einen Homöomorphismus

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(s + n - \frac{1}{2}, s + n + \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\cong} (S^1 \setminus \{-z\}) \times \mathbb{Z} \,.$$

Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ nach Definition 2.23 eine universelle Überlagerung.

2.25. Satz (Homotopie-Liftungssatz). *Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, und seien $\widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X}$ und $H\colon Y \times [0,1] \to X$ stetig mit*

$$H(\,\cdot\,, 0) = p \circ \widetilde{F}\colon Y \to X \,,$$

dann existiert genau eine stetige Abbildung $\widetilde{H}\colon Y \times [0,1] \to \widetilde{X}$ mit

$$p \circ \widetilde{H} = H \qquad \text{und} \qquad \widetilde{H}(\,\cdot\,, 0) = \widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X} \,.$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle \times\{0\}}\big\downarrow & \overset{\widetilde{H}}{\nearrow} & \big\downarrow p \\ Y \times [0,1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Wir nennen $\tilde{H}$ den Lift der Homotopie H mit Startwert $\tilde{F}$.

Beweis. Bei konstruktiven Beweisen ist es manchmal am einfachsten, zuerst die Eindeutigkeit zu beweisen. Danach zeigt man lokale Existenz. Aus der Eindeutigkeit folgt dann, dass sich die lokal konstruierten Objekte zu einem globalen Objekt zusammensetzen lassen.

Seien also zwei Lifts $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2\colon Y \times [0,1] \to \tilde{X}$ mit Startwert $\tilde{F}$ gegeben. Sei $y \in Y$. Wir behaupten, dass die Menge

$$A = \left\{\, t \in [0,1] \;\middle|\; \tilde{H}_1(y,t) = \tilde{H}_2(y,t) \,\right\} \subset [0,1]$$

offen und abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung gilt $0 \in A$, folglich $A = [0,1]$, da $[0,1]$ zusammenhängend ist.

Dazu sei $U \subset X$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $H(y,t)$ mit $p^{-1}(U) \cong U \times M$ wie oben. Wegen Stetigkeit der Abbildung $H(y,\,\cdot\,)$ existiert ein offenes Intervall $J \subset [0,1]$ mit $t \in J$, so dass $\{y\} \times J \subset H^{-1}(U)$. Die zusammengesetzten Abbildungen

$$J \xrightarrow{\tilde{H}_i(y,\,\cdot\,)} p^{-1}(U) \cong U \times M \xrightarrow{\pi_M} M$$

sind stetig, also konstant auf J, da M diskret ist. Aus $t \in A$ folgt daher $J \subset A$, und aus $t \notin A$ folgt $J \not\subset A$, somit ist A offen und abgeschlossen, und die Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ ist bewiesen.

Zur lokalen Existenz von Lifts fixiere $y \in Y$. Zu jedem $s \in [0,1]$ existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U_s von $H(y,s) \in X$, ein offenes Teilintervall $I_s \subset [0,1]$ mit $s \in I_s$ und eine offene Umgebung $V_s \subset Y$ von y mit $H(V_s \times I_s) \subset U_s$. Endlich viele solche Intervalle I_s überdecken $[0,1]$, da $[0,1]$ kompakt ist. Also existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, gleichmäßig überlagerte U_i und Umgebungen V_i von y mit

$$V_i \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U_i)\ .$$

Wir konstruieren induktiv Umgebungen W_i von y und Lifts $\widetilde{H}_i$ von $H|_{W_i \times [0,t_i]}$. Setze dazu zunächst $W_0 = Y$ und $\widetilde{H}_0(\,\cdot\,,0) = \widetilde{F}$. Sei jetzt eine offene Umgebung W_{i-1} von y und ein Lift $\widetilde{H}_{i-1}$ von $H|_{W_{i-1} \times [0,t_{i-1}]}$ bereits konstruiert. Betrachte die stetige Abbildung

$$f_i \colon W_{i-1} \cap V_i \xrightarrow{\tilde{H}_{i-1}(\,\cdot\,,t_{i-1})} p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi} U_i \times M_i \xrightarrow{\pi_{M_i}} M$$

und setze $m_i = f_i(y) \in M_i$. Da M_i die diskrete Topologie trägt, ist $\{m_i\} \subset M_i$ offen, also ist

$$W_i = f_i^{-1}(m_i) \subset W_{i-1} \cap V_i$$

eine offene Umgebung von y. Für $w \in W_i$ setze

$$\tilde{H}_i(w,s) = \begin{cases} \widetilde{H}_{i-1}(w,s) & \text{für } 0 \le s \le t_{i-1}, \text{ und} \\ \varphi^{-1}\big(H(w,s), m_i\big) & \text{für } t_{i-1} \le s \le t_i\ . \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{H}_i$ auf beiden Teilbereichen stetig und stimmt auf dem Durchschnitt überein, ist also insgesamt stetig. Setze $W_y = W_k$ und erhalte einen lokalen Lift

$$\widetilde{H}_y \colon W_y \times [0,1] \to \widetilde{X} \qquad \text{von} \qquad H|_{W_y \times [0,1]}\ .$$

Wir erhalten eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von Y und Lifts $H_V \colon V \times [0,1] \to \tilde{X}$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Wegen der obigen Eindeutigsaussage stimmen je zwei dieser Lifts auf dem gemeinsamen Definitionsbereich überein, so dass sich alle zu einem globalen Lift $\tilde{H} \colon Y \times [0,1] \to \tilde{X}$ zusammensetzen. □

2.26. Satz. *Es gibt eine Isomorphismus $\Phi \colon \pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$, der $[\exp(2\pi i\,\cdot\,)]$ auf $1 \in \mathbb{Z}$ abbildet.*

Beweis. Wir betrachten die Überlagerung $p = e^{2\pi i\,\cdot} : \mathbb{R} \to S^1$ aus Beispiel 2.24. Wir fassen $\gamma \in \pi_1(S^1,1)$ als Homotopie H von Abbildungen von $Y = \{*\}$ nach S^1 mit $H(*,s) = \gamma(s)$ auf. Es sei $\widetilde{F}(*) = 0 \in \mathbb{Z}$ ein Lift von $H(*,0) = 1$, dann existiert nach Satz 2.25 ein eindeutiger Lift $\tilde{\gamma}(s) = \widetilde{H}(*,s)$, und es folgt $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Seien γ_0 und γ_1 relativ homotope Schleifen in $(S^1,1)$ mit Lifts $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Wir fassen eine relative Homotopie H zwischen γ_0 und γ_1 als Homotopie $K(s,t) = H(t,s)$ von der konstanten Abbildung $s \mapsto 1$ zu sich selbst auf. Dann lässt sich K nach Satz 2.25 zu einer Homotopie $\widetilde{K}$ liften, wobei $\widetilde{K}(s,t) = \tilde{\gamma}_s(t)$ für $s \in \{0,1\}$ aufgrund der Eindeutigkeit der Lifts $\tilde{\gamma}_i$. Wir erhalten also eine Homotopie $\widetilde{H}(t,s) = \widetilde{K}(s,t)$ zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$. Da $s \mapsto \widetilde{H}(1,s)$ die konstante Abbildung $H(1,s) = 1 \in S^1$ liftet, ist diese Abbildung selbst konstant, und es folgt $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathbb{Z}$. Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi \colon \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z} \qquad \text{mit} \qquad \Phi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \qquad \text{für } \tilde{\gamma} \text{ wie oben.}$$

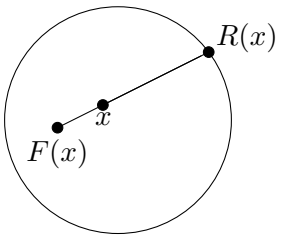


ABBILDUNG 2.2. Die Retraktion im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Ein Lift von $\gamma_1\gamma_2$ ist

$$\widetilde{\gamma_1\gamma_2} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(2t) & 0 \le t \le 1/2\ , \\ \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(2t-1) & 1/2 \le t \le 1\ , \end{cases}$$

dabei nutzen wir aus, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $t \mapsto \tilde{\gamma}(t)+n$ ein Lift von γ ist, wenn $\tilde{\gamma}$ ein Lift ist, da

$$e^{2\pi i(\tilde{\gamma}(t)+n)} = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)} \cdot e^{2\pi in} = \gamma(t) \cdot 1\ .$$

Also ist Φ ein Gruppenhomomorphismus. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass γ dabei gerade auf die Umlaufzahl $\nu_{(\gamma,0)}$ aus Beispiel 2.1 (1) abgebildet wird.

Zur Injektivität seien γ_0, γ_1 Schleifen in S^1 mit Lifts $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$, so dass $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = 0$ und $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) = n \in \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend. Insbesondere existiert eine relative Homotopie $\tilde{H}$ zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$ (Übung 2.75). Dann ist $p \circ \tilde{H}$ eine relative Homotopie zwischen γ_0 und γ_1, also folgt $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

Zur Surjektivität betrachte zu $n \in \mathbb{Z}$ die Schleife γ_n mit Lift $\tilde{\gamma}_n$, wobei

$$\gamma_n(t) = e^{2nint} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\gamma}_n(t) = nt\ . \qquad \square$$

Wir kommen jetzt zu zwei Anwendungen; weitere folgen in den Übungen 2.78 und 2.79. Zur Motivation zunächst der eindimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

2.27. BEMERKUNG. Jede stetige Funktion $f\colon D^1 = [-1,1] \to [-1,1]$ hat einen Fixpunkt. Betrachte dazu die Funktion

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto x - f(x)\ .$$

Es gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn $g(x) = 0$. Da $g(-1) \le 0$ und $g(1) \ge 0$, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

2.28. BEMERKUNG. Ein Retrakt in einer Kategorie ist ein Morphismus $r\colon X \to Y$, so dass es einen Morphismus $\iota\colon Y \to X$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_Y$ gibt. Wenn wir in $\mathcal{T}op$ arbeiten und Y mit $\operatorname{im}\iota \subset X$ identifizieren, erhalten wir genau den Begriff aus Definition 2.9. Funktoren bilden Retrakte auf Retrakte ab (Übung), also erhalten wir eine Zerlegung

$$\mathrm{id}_{\pi_1(Y,y)}\colon \pi_1(Y,y) \xrightarrow{\pi_1\iota} \pi_1(X,x) \xrightarrow{\pi_1 r} \pi_1(Y,y)\ .$$

Man kann sogar zeigen, dass $\pi_1(X,x) \cong \ker(\pi_1 r) \rtimes \operatorname{im}(\pi_1\iota)$.

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $D^n \to D^n$, siehe Satz 3.44.

2.29. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz, $n = 2$). *Jede stetige Abbildung $F\colon D^2 \to D^2$ hat einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Falls es keinen Fixpunkt gibt, konstruieren wir eine Retraktion $R\colon D^2 \to \partial D^2 = S^1$ wie in Abbildung 2.2. Da $\pi_1(D^2, 1) = 0$ und $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, widerspricht das der obigen Bemerkung.

Zur Konstruktion der Retraktion beachten wir, dass $\min_{x\in D^2} d(F(x), x) > 0$ wegen Kompaktkeit von D^2. Daher erhalten wir eine stetige Abbildung, indem wir die Strecke von $F(x)$ nach x über x hinaus fortsetzen, bis sie S^1 schneidet, und x den Schnittpunkt $R(x)$ zuordnen. Falls $x \in S^1$, ist $x = R(x)$ dieser Schnittpunkt, also erhalten wir die gesuchte Retraktion. □

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $S^n \to \mathbb{R}^n$, wird hier aber nur für $n = 2$ bewiesen.

2.30. SATZ (Borsuk-Ulam). *Sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

BEWEIS. Falls nicht, existiert eine Abbildung $G\colon S^2 \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|} ,$$

und es folgt $G(x) = -G(-x)$ auf ganz S^2. Betrachte den Äquator

$$\gamma\colon [0,1] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ohne Einschränkung gelte $G(\gamma(0)) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$, anderfalls drehen wir $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ entsprechend. Es sei $g = G \circ \gamma$. Wir wollen $G_*[\gamma] = [g] \in \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ bestimmen. Sei dazu $\tilde{g}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ein Lift von $g\colon [0,1] \to S^1$ wie in Satz 2.26 unter der Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ mit $p(t) = e^{2\pi t}$ aus Beispiel 2.24. Aus

$$g(t + 1/2) = G\big(-\gamma(t)\big) = -(G \circ \gamma)(t) = -g(t)$$

folgt

$$\tilde{g}(t + 1/2) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + 1/2 ,$$

da $p^{-1}(-1) = \mathbb{Z} + 1/2$. Da der obige Ausdruck stetig von t abhängt und $\mathbb{Z} + 1/2$ diskret ist, ist er konstant, und wir erhalten

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = \big(\tilde{g}(1) - \tilde{g}(1/2)\big) + \big(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)\big) = 2\big(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)\big) \in 2\mathbb{Z} + 1 .$$

Insbesondere wird der Äquator auf ein ungerades Element von $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ abgebildet. Der Äquator γ ist aber null-homotop in S^2. Sei H eine Homotopie von γ zur konstanten Schleife, dann ist $G \circ H$ eine Homotopie von g zur konstanten Schleife, was einen Widerspruch darstellt. □

Die Beweise der obigen Sätze sind nicht konstruktiv, das heißt, sie liefern kein Verfahren, das einen Punkt mit der gesuchten Eigenschaft findet. Das gleiche gilt für die beiden Anwendungen in den Übungen 2.78 und 2.79, auch dort sind die Beweise indirekt. Man beachte, dass es in allen vier Problemen beliebig „schlecht konditionierte" Situationen gibt, in denen eine beliebig kleine Variation der Ausgangsdaten (zum Beispiel Variation von F um weniger als $\varepsilon > 0$ in der Supremumsnorm) beliebig große Änderungen des gesuchten Punktes bewirken können.

2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen

Wir wollen als nächstes den Satz von Seifert-van Kampen beweisen, der es in vielen Fällen ermöglicht, die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Raumes aus den Fundamentalgruppen seiner Bausteine zu rekonstruieren. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie.

Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Gruppen. Wir wollen zunächst eine Gruppe konstruieren, die alle Gruppen G_i enthält, und in der keine „unnötigen" Relationen gelten. Diese Gruppe soll das „freie Produkt" der Gruppen G_i heißen. Wir werden sehen, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie $\mathcal{G}rp$ der Gruppen ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppen G_i paarweise disjunkt sind, ansonsten müssten wir die Elemente von G_i als (i, g) „markieren".

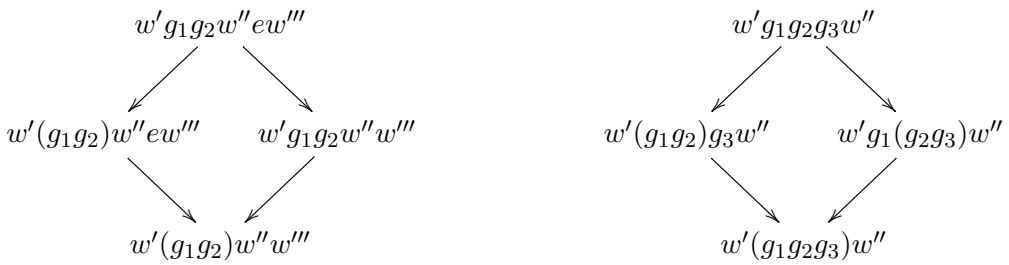


ABBILDUNG 2.3. Kürzen im freien Produkt (Beispiele)

2.31. DEFINITION. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Ein *Wort* w im Alphabet $\dot\cup_i G_i$ ist ein Tupel $g_1 \dots g_k$ der endlichen *Länge* $\ell(w) = k \geq 0$ von *Buchstaben* $g_j \in G_{i_j}$ mit $i_j \in I$. Schreibe $\emptyset$ für das leere Wort. Ein Wort heißt *gekürzt* oder *reduziert,* wenn

(1) kein Buchstabe ein neutrales Element $e_i \in G_i$ ist, und
(2) keine zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben g_j, g_{j+1} zur gleichen Gruppe $G_{i_j} = G_{i_{j+1}}$ gehören.

Ein Wort *kürzen* oder *reduzieren* heißt, so oft wie möglich einen der folgenden Schritte auszuführen:

(1) Weglassen eines Einselementes $e_i \in G_i$ an einer beliebigen Stelle des Wortes,
$$w'e_iw'' \mapsto w'w'' \ ,$$
(2) Ersetzen zweier aufeinanderfolgender Buchstaben g_j, $g_{j+1} \in G_{i_j}$ aus derselben Gruppe durch ihr Produkt,
$$w'g_jg_{j+1}w'' \mapsto w'(g_jg_{j+1})w'' \ .$$

Zwei Wörter w, w' heißen *äquivalent,* wenn es eine Kette $w = w_0, \dots, w_n = w'$ von Wörtern gibt, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ entweder w_i aus w_{i-1} oder w_{i-1} aus w_i durch einen der obigen Schritte entsteht.

Da wir Ketten spiegeln und aneinanderhängen können, ist „Äquivalenz“ eine Äquivalenzrelation. Beim Reduzieren nimmt die Anzahl der Buchstaben ab. Da wir nur Wörter endlicher Länge betrachten, erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein gekürztes Wort. Wichtig ist, dass dieses gekürzte Wort nicht davon abhängt, in welcher Weise wir beim Kürzen vorgehen.

2.32. PROPOSITION. *Jede Äquivalenzklasse von Wörtern enthält genau ein gekürztes Wort.*

BEWEIS. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Falls es zwei äquivalente reduzierte Wörter w, w' gibt, betrachten wir eine Kette $w = w_0, \dots, w_n = w'$ zwischen ihnen wie in Definition 2.31. Falls $n > 0$, muss es ein Wort w_{i_0} maximaler Länge innerhalb der Kette geben, und es folgt $0 < i_0 < n$. Falls $w_{i_0-1} = w_{i_0+1}$ gilt, können wir zwei Elemente aus der Kette streichen und erhalten eine kürzere Kette zwischen w und w'.

Andernfalls entstehen w_{i_0-1} und w_{i_0+1} durch verschiedene Kürzungsschritte aus w_{i_0}. Wenn diese Kürzungen an getrennten Stellen im Wort passieren, kann man sie in beliebiger Reihenfolge durchführen. Falls sich die Buchstabengruppen überschneiden, stammen hingegen alle beteiligten Buchstaben aus der selben Gruppe G_i. Indem wir beide Kürzungsschritte kombinieren, bekommen wir ein neues Wort w'_{i_0} durch Kürzen sowohl aus w_{i_0-1} als auch aus w_{i_0+1}, siehe Abbildung 2.3. Wenn wir w_{i_0} durch w'_{i_0} ersetzen, haben wir eine neue Kette. In jedem der beiden Fälle hat sich die Summe der Längen der beteiligten Wörter verringert, also terminiert das Verfahren nach endlich vielen Schritten bei einer “minimalen” Kette zwischen w und w'. Diese hat zwangsläufig die Länge $n = 0$, so dass $w = w'$ folgt. □

2.33. Definition. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Das *freie Produkt* $*_i G_i = \coprod_i G_i$ der G_i ist die Menge aller reduzierten Wörter, die Multiplikation ist Hintereinanderschreiben und anschließende Reduktion. Definiere Abbildungen $\iota_j\colon G_j \to \coprod_i G_i$ mit

$$\iota_j(g) = \begin{cases} \emptyset & g = e_j \ , \\ g & g \in G_j \setminus \{e_j\} \ . \end{cases}$$

2.34. Proposition. *Das freie Produkt ist eine Gruppe, und die Abbildungen ι_j sind Homomorphismen.*

Beweis. Da es laut Beweis des Satzes 2.32 nicht auf die Reihenfolge der Reduktionsschritte ankommt, erhalten wir das Produkt dreier Wörter durch Hintereinanderschreiben aller drei Wörter und anschließendes Kürzen; hieraus folgt Assoziativität der Multiplikation.

Das leere Wort ist offensichtlich neutrales Element, und für jedes Wort gilt

$$(g_1 \dots g_k)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1} \ .$$

Für alle $i \in I$ und alle $g \in G_i$ ist $\iota_i(g)$ gekürzt, und offensichtlich ist ι_i ein Homomorphismus. □

2.35. Beispiel. Es bezeichne $\mathbb{Z}/2$ die Gruppe mit zwei Elementen. Wir können uns $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ als Menge der Worte in zwei Buchstaben g und h vorstellen, wobei Kürzen heißt, zwei benachbarte gleiche Buchstaben zu streichen. Man kann zeigen, dass das genau die Isometriegruppe des metrischen Raumes $(\mathbb{Z}, d)$ mit $d(m,n) = |m-n|$ ist. Dabei entsprechen g und h Spiegelungen an zwei benachbarten Punkten in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Man nennt $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ auch die unendliche Diedergruppe.

2.36. Satz. *Das Produkt von Gruppen ist ein Produkt auf der Kategorie der Gruppen. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koprodukt auf der Kategorie der Gruppen.*

Beweis. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Analog zu Übung 1.150 erfüllt ihr Produkt

$$\prod_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} \mid g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I\}$$

mit komponentenweiser Multiplikation, zusammen mit den Projektionen

$$p_j\colon \prod_{i\in I} G_i \to G_j \ , \qquad p_j((g_i)_{i\in I}) = g_j \ ,$$

die Eigenschaften eines Produkts in der Kategorie $\mathcal{G}rp$.

Nach Bemerkung 1.79 besagt die universelle Eigenschaft des Koproduktes, dass es zu jeder Gruppe H und Homomorphismen $f_i\colon G_i \to H$ genau einen Homomorphismus $f\colon *_{i\in I} G_i \to H$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ gibt. Wenn f existiert, ist f eindeutig bestimmt durch

$$f(g_1 \cdots g_k) = f_{i_1}(g_1) \cdots f_{i_k}(g_k) \in H \ ,$$

wobei $g_j \in G_{i_j}$ wie oben. Offensichtlich ist Kürzen mit f verträglich, da alle f_i Homomorphismen sind. Also ist f ebenfalls Homomorphismus. □

Im Satz von Seifert-van Kampen benötigen wir einen Quotienten des freien Produkts. Da man Quotienten von Gruppen nur nach Normalteilern bilden kann, führen wir diese hier ein. Ein *Normalteiler* N einer Gruppe G ist eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$. Kerne von Gruppenhomomorphismen $F\colon G \to H$ haben diese Eigenschaft, denn sei $g \in G$, $k \in \ker F$, dann folgt

$$F(gkg^{-1}) = F(g) \cdot \underbrace{F(k)}_{=e} \cdot F(g)^{-1} = e \in H \ ,$$

also $gkg^{-1} \in \ker F$.

Sei umgekehrt N ein Normalteiler, dann definieren wir eine Gruppenstruktur auf dem Quotienten

$$G/N = \{gN \mid g \in G\} \qquad \text{mit} \qquad gN = \{gn \mid n \in N\}$$

durch

$$(gN) \cdot (hN) = g(hNh^{-1}) \cdot (hN) = gh \cdot N \cdot N = (gh)N \ .$$

Die Normalteiler-Eigenschaft garantiert uns, dass dieses Produkt wohldefiniert ist. Die natürliche Abbildung $G \to G/N$ mit $g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern N.

2.37. Definition. Es sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Dann ist der von M erzeugte Normalteiler (M) von G der kleinste Normalteiler $N \subset G$, so dass $M \subset N$.

Man kann sich überzeugen, dass Durchschnitte von Normalteilern wieder Normalteiler sind, so dass der Begriff des kleinsten Normalteilers in der obigen Definition sinnvoll ist. Alternativ dazu geben wir (M) explizit an.

2.38. Bemerkung. Es gilt

$$(M) = \left\{ g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1} \;\middle|\; k \geq 0, g_1, \ldots, g_k \in G \text{ und } m_1, \ldots, m_k \in M \right\} . \qquad (*)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die rechte Seite eine Untergruppe von M beschreibt, und sogar einen Normalteiler, da

$$g\big(g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1}\big) g^{-1} = (gg_1) m_1^{\pm 1} (gg_1^{-1}) \cdots (gg_k) m_k^{\pm 1} (gg_k)^{-1} \ .$$

Umgekehrt enthält jeder Normalteiler, der M enthält, auch alle Produkte von Elementen der Form $gm^{\pm 1}g^{-1}$, also ist die rechte Seite von (*) tatsächlich der kleinste Normalteiler, der M enthält.

Wir formulieren und beweisen jetzt den weiter oben angekündigten Satz.

2.39. Satz (Seifert-van Kampen). *Sei (X, x) ein punktierter Raum, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X, so dass*

(1) *jede Menge $U \in \mathcal{U}$ den Basispunkt x enthält, und*
(2) *jeder Durchschnitt $U \cap V$ für U, $V \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist.*

Dann ist die von den Homomorphismen $\iota_{U*} \colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induzierte natürliche Abbildung

$$\varphi \colon \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

surjektiv. Falls darüberhinaus

(3) *jeder Durchschnitt $U \cap V \cap W$ für U, V, $W \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist,*

dann wird der Kern der Abbildung φ gegeben durch

$$\ker \varphi = \left(\left\{ (\iota_{U \cap V \to U})_*[\gamma]^{-1} \cdot (\iota_{U \cap V \to V})_*[\gamma] \;\middle|\; U, V \in \mathcal{U} \text{ und } [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x) \right\} \right) . \qquad (*)$$

Hier bezeichnen $\iota_U \colon U \to X$ und $\iota_{U \cap V \to U} \colon U \cap V \to U$ die Inklusionsabbildungen.

Beweis. Wir schreiben wieder $\alpha\beta$ für die Verkettung beliebiger Wege mit passenden Anfangs- und Endpunkten wie im Beweis von Satz 2.14.

Um zu zeigen, dass die Abbildung φ surjektiv ist, betrachten wir eine Schleife $\gamma \colon [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Da $(\gamma^{-1}(U))_{U \in \mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0, 1]$ ist, existiert nach dem Satz 1.63 von Lebesgue ein $n > 0$, so dass jeder Weg

$$\gamma_i(t) = \left(\gamma|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}\right)\left(\frac{t + i - 1}{n}\right)$$

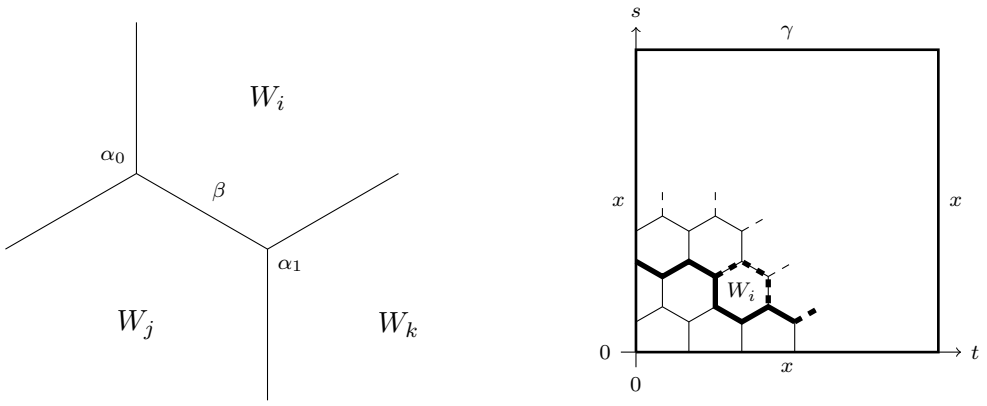


ABBILDUNG 2.4. Zerlegung des Einheitsquadrats in Waben

für $1 \leq i \leq n$ ganz in einer der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ verläuft. Nach (1) und (2) gibt es Wege α_i von x nach $\gamma(\frac{i}{n}) = \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ in $U_i \cap U_{i+1}$. Also schreiben wir γ als Verkettung

$$\gamma \sim \underbrace{\gamma_1 \alpha_1^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_1 *}} \underbrace{\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_2 *}} \cdots \underbrace{\alpha_{n-1} \gamma_n}_{\in \operatorname{im} \iota_{U_n *}} \in \operatorname{im} \varphi \ ,$$

und es folgt Surjektivität.

Wir bezeichnen die rechte Seite von (*) mit $N \subset \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x)$. Sei $\gamma \in \pi_1(U \cap V, x)$, dann ist offensichtlich

$$[e] = [\gamma][\overline{\gamma}] = \underbrace{(\iota_{U \cap V \to U})_* [\gamma]}_{\in \operatorname{im} \iota_{U *}} \cdot \underbrace{(\iota_{U \cap V \to V})_* [\gamma]^{-1}}_{\in \operatorname{im} \iota_{V *}} \in \pi_1(X, x) \ ,$$

woraus sich $N \subset \ker \varphi$ ergibt.

Sei umgekehrt $\gamma \in \ker \varphi$ dargestellt durch das Wort $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ für Schleifen γ_i in $U_i \in \mathcal{U}$. Dann existiert eine Homotopie $H \colon [0,1] \times [0,1] \to X$ von der trivialen Schleife zu γ. Nach dem Satz von Lebesgue können wir das kompakte Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ so in Waben zerlegen, dass jede Wabe $W_i \subset [0,1] \times [0,1]$ von H ganz in eine der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ abgebildet wird. Nach (3) finden wir zu jedem Eckpunkt (t, s) einen Weg α von x nach $H(t, s)$, der ganz im Durchschnitt der (maximal drei) offenen Mengen $U_i, U_j, U_k \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j, W_k verläuft. Wir können jetzt jede Kante zwischen zwei Waben wie oben durch eine Schleife $\alpha_0 \beta \alpha_1^{-1}$ beschreiben, die ganz im Durchschnitt der $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j verläuft.

Wir zerlegen die Homotopie H in eine Folge einzelner Homotopien H_i relativ zu x, die jeweils eine Wabe W_i überstreichen, siehe Abbildung 2.4. Zu Beginn der Homotopie wird der betrachtete Pfad beschrieben durch ein Wort aus Buchstaben der Form

$$\cdots \iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*} \underbrace{[\alpha_0 \beta \overline{\alpha}_1]}_{\sigma \text{ in } U_i \cap U_j} \cdots \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \ ,$$

dabei gehört U_j hier stets zu einer Wabe W_j „unterhalb“ des Pfades zu Beginn der Homotopie H_i. Fall die Kante β an die Wabe W_i angrenzt, müssen wir als erstes diesen Buchstaben durch einen Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzen. Dazu beachten wir, dass

$$w' \iota_{(U_i \cap U_j \to U_i)*} [\sigma] w'' = \Big(w' \iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*} [\sigma] w'' \Big) \Big(w''^1 \iota_{(U_i \cap U_j \to U_j)*} [\sigma]^{-1} \iota_{(U_i \cap U_j \to U_i)*} [\sigma] w'' \Big) \ .$$

Dieses Ersetzen entspricht also gerade der Multiplikation von rechts mit einem Element von N, vergleiche Bemerkung 2.38.

Wenn wir alle Buchstaben, die zu Kanten der Wabe W_i gehören, durch Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzt haben, können wir die Homotopie H_i durchführen. Dabei wird ein Produkt von Schleifen in U_i durch ein in U_i homotopes Produkt ersetzt. Nach Kürzen verändert sich das zugehörige Wort im freien Produkt der $\pi_1(U, x)$ also gar nicht.

Nach endlich vielen Schritten erreichen wir den ursprünglichen Weg $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, wobei γ aber möglicherweise durch ein anderes Wort repräsentiert wird, falls ein oder mehrere γ_i als Schleifen in anderen Umgebungen geschrieben wurden. Nochmaliges Multiplizieren mit Elementen von N behebt dieses Problem.

Da wir mit der trivialen Schleife, dargestellt durch das leere Wort, begonnen haben, haben wir also $w \in \ker \varphi$ insgesamt als Produkt von Elementen von N geschrieben, also folgt $\ker \varphi \subset N$ und daher $\ker \varphi = N$. □

2.40. Beispiel. Die Ziffer „8“ lässt sich als Vereinigung zweier Kreise schreiben. Sei „8“ $= U \cup V$, wobei U und V kleine offene Umgebungen der beiden Kreise seien, so dass die Kreise Deformations-Retrakte von U und V sind. Wähle x_0 als Schnittpunkt der beiden Kreise, dann liefert Seifert-van Kampen, dass $\pi_1(\text{„8“}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

2.41. Beispiel. Ohne die erste Voraussetzung (1) läßt sich der Satz von Seifert-van Kampen nicht formulieren. Es folgen zwei Beispiele, die zeigen, dass die anderen beiden Voraussetzungen ebenfalls nötig sind.

(1) Betrachte $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ als Vereinigung zweier zusammenziehbarer Mengen $U_\pm = S^1 \setminus \{\pm i\}$. Beide Mengen haben triviale Fundamentalgruppe, also ist auch $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1)$ trivial. Auf der anderen Seite ist $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ nichttrivial, insbesondere ist die natürliche Abbildung $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ nicht surjektiv. Das liegt daran, dass $U^+ \cap U^- = S^1 \setminus \{i, -i\}$ nicht zusammenhängend ist, also Voraussetzung (2) verletzt ist.

(2) Betrachte $Y = S^1 \cup [-1, 1] \subset \mathbb{C}$, und setze $U_x = Y \setminus \{x\}$ für $x \in \{-i, 0, i\}$. Dann sind die drei Mengen U_x jeweils homotopieäquivalent zu einem Kreis, haben also Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}$. Der Durchschnitt je zweier dieser drei Mengen ist zusammenziehbar, also gilt $N = \{e\}$ und

$$\pi_1(Y, 1) = \big(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)\big)/N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}\,,$$

denn Voraussetzung (3) folgt aus Voraussetzung (2), solange wir nur zwei offene Mengen betrachten.

Andererseits gilt

$$\big(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_0, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)\big)/N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}\,,$$

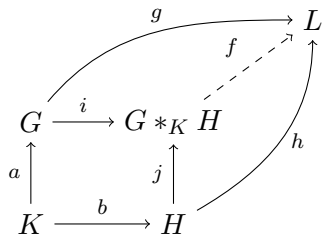
und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, etwa haben beide Gruppen unterschiedliche Abelisierungen. Da $U_i \cap U_0 \cap U_{-i}$ nicht wegzusammenhängend ist, ist Voraussetzung (3) für die Überdeckung $\{U_i, U_0, U_{-i}\}$ verletzt.

2.42. Bemerkung. Der Spezialfall $X = U \cup V$ im Satz 2.39 von Seifert-van Kampen ist besonders wichtig und etwas einfacher zu formulieren als der allgemeine Fall. Da der Beweis aber nicht wesentlich einfacher wird, haben wir gleich den allgemeinen Fall betrachtet.

Seien G, H, K Gruppen und $a\colon K \to G$, $b\colon K \to H$ Gruppenhomomorphismen, so definiert man das *amalgamierte Produkt* von G und H über K durch

$$G *_K H = G * H \,/\, \big(\{\, a(k)b(k)^{-1} \mid k \in K \,\}\big)\,.$$

Das amalgamierte Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Pushouts in der Kategorie $\mathcal{G}rp$.



Seien also $i\colon G \to G *_K H$ und $j\colon H \to G *_K H$ die natürlichen Homomorphismen, sei L eine Gruppe und seien $g\colon G \to L$, $h\colon H \to L$ Homomorphismen mit $g \circ a = h \circ b\colon K \to L$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f\colon G *_K H \to L \text{ mit } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j \ .$$

Sei $X = U \cup V$ topologischer Raum mit U, V offen. Dann können wir X ebenfalls als Pushout längs der Inklusionen $U \cap V \hookrightarrow U$ und $U \cap V \hookrightarrow V$ auffassen, vergleiche Folgerung 1.86. Wenn wir einen Basispunkt $x \in U \cap V$ festlegen, erhalten wir einen Pushout $(X, x) = (U, x) \cup_{(U\cap V, x)} (V, x)$ in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$.

Der Satz von Seifert-van Kampen besagt, dass der Funktor π_1 den Pushout in $\mathcal{T}op_+$ auf den Pushout in $\mathcal{G}rp$ abbildet, falls $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, das heißt

$$\pi_1\big((U, x) \cup_{(U\cap V, x)} (V, x)\big) \cong \pi_1(U, x) *_{\pi_1(U\cap V, x)} \pi_1(V, x) \ .$$

Man beachte: Ein beliebiger Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ muss den Pushout in $\mathcal{C}$ nicht auf den in $\mathcal{D}$ abbilden, falls beide Pushouts existieren. Das zeigt bereits Beispiel 2.41 (1). Im allgemeinen erhält man nur einen Morphismus vom Pushout der Bilder unter $\mathcal{F}$ in das Bild des Pushouts unter $\mathcal{F}$, siehe Übung 2.85.

2.43. Beispiel. Wir betrachten $S^n = U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $U_\pm = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \mp 1)\}$ wie in Beispiel 1.104 (2). Die stereographische Projektion liefert Homöomorphismen $U_+ \cong \mathbb{R}^n \cong U_-$, also sind $U_\pm$ zusammenziehbar. Schließlich ist S^{n-1} ein Deformationsretrakt von $U_+ \cap U_-$, und somit wegzusammenhängend für $n \geq 2$. Mit $x = (1, 0, \dots, 0)$ erhalten wir für $n \geq 2$, dass

$$\pi_1(S^n, x) = \pi_1(U_+, x) *_{\pi_1(U_+\cap U_-, x)} \pi_1(U_-, x) = \{e\} *_{\pi_1(S^{n-1}, x)} \{e\} = \{e\} \ ,$$

also sind Sphären einfach zusammenhängend ab Dimension 2.

Man ist versucht, das obige Beispiel so zu begründen, dass man jede Schleife in S^n für $n \geq 2$ von einem Punkt $y \in S^n$, der nicht getroffen wird, zum Basispunkt x „wegdrückt“. Beispiel 1.21 zeigt aber, dass man Schleifen konstruieren kann, die jeden Punkt in S^n treffen. Also braucht man ein komplizierteres Argument.

2.44. Beispiel. Zur Vorbereitung auf die Übungsaufgabe 2.81 zu den Borromäischen Ringen geben wir drei weitere Beispiele. Dabei betrachten wir die Fundamentalgruppen von Komplementen eines oder mehrerer Kreise im $\mathbb{R}^3$.

(1) Betrachte $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir addieren einen Punkt im Unendlichen, indem wir $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ via stereographischer Projektion in $S^3 \setminus S^1$ einbetten. Hierbei wird S^1 zu einem Großkreis, und der fehlende Punkt in S^3 sei $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Es sei V die obere Halbkugel, dann ist S^2 ein Deformationsretrakt von $U \cap V$. Also gilt nach Satz 2.39 mit $x = U \cap V$, dass

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) *_{\pi_1(S^2, x)} \pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) \ .$$

Jetzt bilden wir $S^3 \setminus S^1$ durch stereographische Projektion an einem Punkt der S^1 nach $\mathbb{R}^3$ ab und erhalten einen Homöomorphismus $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$. Aber S^1 ist ein Deformationsretrakt davon, so dass schließlich

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \,.$$

(2) Wir betrachten jetzt das Komplement zweier „unverlinkter" Kreise im Raum, genauer $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{-1,1\})$. Mit Beispiel (1) und Seifert-van Kampen folgt

$$\begin{aligned}\pi_1(Y) &\cong \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-\infty,1)) \setminus (S^1 \times \{-1\})) *_{\pi_1(\mathbb{R}^2 \times (-1,1))} \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-1,\infty)) \setminus (S^1 \times \{1\})) \\ &\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \,.\end{aligned}$$

Eine freies Produkt von k Kopien von $\mathbb{Z}$ nennt man auch die *freie Gruppe F_k mit k Erzeugern.*

(3) Wir betrachten im Gegensatz dazu das Komplement zweier „einfach verlinkter" Kreise im $\mathbb{R}^3$, nämlich

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \cos\psi + 1, \sin\psi)\varphi \in \mathbb{R}\}) \,.$$

Wie in (1) fügen wir einen Punkt im Unendlichen hinzu, dann hat Z die gleiche Fundamentalgruppe wie

$$S^3 \setminus (\{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \cos\psi, \sin\psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}) \,.$$

Ein Deformationsretrakt hiervon ist der Clifford-Torus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi) \;\middle|\; \varphi, \psi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \times S^1 \,,$$

und nach Übung 2.74 gilt

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ncong \pi_1(Y) \,.$$

Also kann die Fundamentalgruppe des Komplementes erkennen, ob man einen oder zwei Kreise entfernt hat, und ob diese „verlinkt" waren oder nicht. Auch für Knoten im $\mathbb{R}^3$ ist die Fundamentalgruppe des Komplementes eine sehr mächtige Invariante. Allerdings kann man zwei auf verschiedene Weisen definierten Gruppen nicht immer ohne weiteres ansehen, ob sie isomorph sind oder nicht.

2.e. Überlagerungen

Wir betrachten Überlagerungen $\widetilde{X} \to X$ eines gegebenen topologischen Raumes X, und vergleichen die Fundamentalgruppen von $\widetilde{X}$ und X miteinander.

Wir erinnern uns an die Definition 2.23 von Überlagerungen. Eine Überlagerung heißt universell, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.45. Beispiel. In Beispiel 2.24 hatten wir bereits eine universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ kennengelernt. Andere zusammenhängende Überlagerungen von $S^1 \subset \mathbb{C}$ sind von der Form

$$p_k\colon S^1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^1 \qquad \text{mit} \qquad z \longmapsto z^k$$

für $0 < k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\operatorname{im} p_{k*} = k\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \,.$$

Wir werden später sehen, dass das bis auf Isomorphie alle zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 sind.

Unter einem *Lift* einer Abbildung $F\colon Y \to X$ in eine Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ verstehen wir eine Abbildung $\widetilde{F}\colon Y \to \widetilde{X}$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$. Wenn wir von punktierten Räumen und Abbildungen $(Y, y_0) \to (X, x_0) \leftarrow (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ sprechen, erwarten wir von einem Lift ebenfalls, dass er y_0 auf $\tilde{x}_0$ abbildet.

Wir erinnern uns an den Homotopie-Liftungssatz 2.25 und insbesondere an den Beweis des Satzes 2.26. Dort hatten wir für $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ gesehen, dass wir jede Schleife in (X, x_0) zu einem Weg in $\tilde{X}$ mit vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig liften können, und dass relativ homotope Schleifen zu relativ homotopen Wegen liften. Das dortige Argument überträgt sich auf alle Überlagerungen.

2.46. Satz. *Sei $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, dann ist die Abbildung*

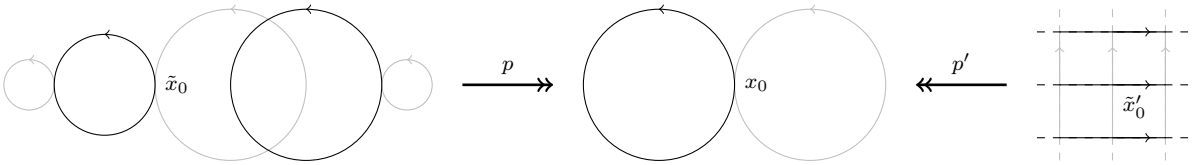
$$p_*\colon \pi_1\big(\widetilde{X}, \tilde{x}_0\big) \to \pi_1(X, x_0)$$

injektiv, und für $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ liegt $[\gamma]$ genau dann im Bild von p_*, wenn γ einen Lift $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$ besitzt.

Beweis. Sei $\tilde{\gamma}\colon S^1 \to \widetilde{X}$ eine Schleife, so dass $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ relativ zu Anfangs- und Endpunkt nullhomotop ist. Dann lässt sich die Nullhomotopie mit Satz 2.25 zu einer relativen Nullhomotopie von $\tilde{\gamma}$ liften. Also ist p_* injektiv.

Eine Schleife γ, deren Lift $\tilde{\gamma}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ wiederum eine Schleife ist, liegt im Bild von p_*, da $p_*[\tilde{\gamma}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma]$. Sei umgekehrt γ eine Schleife mit $[\gamma] \in \operatorname{im}(p_*)$. Dann ist γ homotop zu einer Schleife der Form $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}'$. Liften der Homotopie liefert eine Homotopie zwischen dem Lift $\tilde{\gamma}$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{\gamma}'$, also folgt $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{x}_0$. □

2.47. Beispiel. Die „Acht“ $X = S^1 \vee S^1$ hat sehr viele paarweise nicht isomorphe Überlagerungen, siehe [**H1**]. Wir werden sehen, dass das Bild $\operatorname{im} p_*$ der Fundamentalgruppe $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ die Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bereits bis auf Isomorphie festlegt.



Wir wollen allgemeiner fragen, wann sich eine Abbildung $F\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ zu einer Abbildung $\widetilde{F}\colon (Y, t_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$ liften lässt.

Wir erinnern uns an den Begriff „lokal wegzusammenhängend“ aus Definition 1.95. Falls Y lokal wegzusammenhängend ist, sind alle Wegzusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist Y in diesem Fall genau dann wegzusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

2.48. Satz (Liftungssatz). *Sei $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann lässt sich eine Abbildung $F\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ genau dann zu einer Abbildung $\widetilde{F}\colon (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \widetilde{F}$ liften, wenn*

$$\operatorname{im} F_* \subset \operatorname{im} p_* \subset \pi_1(X, p)\ . \tag{*}$$

In diesem Fall ist der Lift $\widetilde{F}$ durch $\widetilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$ eindeutig bestimmt.

Falls Y nicht zusammenhängend ist, müssen wir den Lift auf jeder Wegzusammenhangskomponente von Y einzeln konstruieren; eventuell benötigen wir dazu jeweils andere Basispunkte.

Beweis. Die Aussage „$\Longrightarrow$“ ist klar, da aus der Existenz von $\widetilde{F}$ bereits

$$\operatorname{im} F_* = \operatorname{im}\big(p_* \circ \widetilde{F}_*\big) \subset \operatorname{im} p_*$$

folgt.

Sei umgekehrt (*) erfüllt. Wir definieren einen Lift $\widetilde{F}$ wie folgt. Da Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, ist Y auch wegzusammenhängend. Also können wir zu jedem $y \in Y$ einen Pfad σ von y_0 nach y angeben, und finden dazu wie im Beweis von Satz 2.26 einen eindeutigen Lift $\tilde{\tau}$ von $\tau = F \circ \sigma$ mit Anfangspunkt $\tilde{\tau}(0) = x_0$. Wir setzen $\tilde{F}(y) = \tilde{\tau}(1)$. Hieraus folgt auch bereits die Eindeutigkeit von $\widetilde{F}$.

Um zu zeigen, dass $\widetilde{F}$ wohldefiniert ist, wählen wir einen weiteren Weg σ' von y_0 nach y und konstruieren einen Lift $\tilde{\tau}'$ von $\tau' = F \circ \sigma'$ wie oben. Dann ist $\tau'\bar{\tau} \in \operatorname{im} F_* \subset \operatorname{im} p_*$ nach (*), also existiert ein geschlossener Lift $\widetilde{\tau'\bar{\tau}}$ nach Satz 2.46. Das heisst, ein Lift $\widetilde{\bar{\tau}}$ von $\bar{\tau}$ startet bei $\tilde{\tau}'(1)$ und führt zu $\tilde{x}_0$. Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist $\widetilde{\bar{\tau}} = \bar{\tilde{\tau}}$, und es folgt $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}'(1)$, was zu zeigen war.

Zur Stetigkeit von $\widetilde{F}$ sei $y \in Y$, und sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x = F(y)$ in X. Dann existiert eine Umgebung $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ von $\tilde{x} = \widetilde{F}(y)$, so dass $p\colon \widetilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Hierbei können wir offensichtlich U so wählen, dass $\widetilde{U}$ als Umgebung von $\tilde{y}$ beliebig klein wird. Wegen Stetigkeit von F ist $F^{-1}(U)$ offen, und es existiert eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset F^{-1}(U)$ von y.

Sei σ ein Weg von y_0 nach y. Sei $\tilde{\tau}$ der Lift von $\tau = F \circ \sigma$ wie oben, so dass also $\tilde{\tau}(1) = \widetilde{F}(y)$. Sei $y' \in V$, und sei α ein Weg von y nach y' in V. Da $\beta = F \circ \alpha$ in U verläuft, hat β einen Lift $\tilde{\beta} = (p|_{\widetilde{U}})^{-1} \circ \beta$ in $\widetilde{U}$. Dann ist $\tilde{\tau}\tilde{\beta}$ ein Lift von $\tau\beta = F \circ (\sigma\alpha)$, und es folgt

$$\widetilde{F}(y') = (\tilde{\tau}\tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in \widetilde{U} \ .$$

Also gilt $\widetilde{F}(V) \subset \widetilde{U}$, und da $\widetilde{U}$ beliebig klein gewählt werden kann folgt die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ bei y. Da y beliebig war, ist $\widetilde{F}$ stetig. □

2.49. Bemerkung. Der lokale Wegzusammenhang wurde nur eingesetzt, um die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ nachzuweisen, er ist aber nötig für die Existenz des Liftes, siehe Übung 2.88. Zur Eindeutigkeit von $\widetilde{F}$ reicht Zusammenhang jedoch aus: Sei etwa $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend. Seien $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}'\colon (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ Lifts von F. Dann ist die Menge

$$\{\, y \in Y \mid \widetilde{F}(y) = \widetilde{F}'(y) \,\} \subset Y$$

offen, abgeschlossen und nicht leer, also stimmen die Lifts auf ganz Y überein.

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen von X. Unter Umständen trägt der Quotient X/G, dessen Punkte die Bahnen der G-Wirkung sind, wieder die Struktur eines topologischen Raumes, so dass die kanonische Abbildung $X \twoheadrightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. Wir beschreiben zunächst diese Konstruktion. Später überlegen wir uns, welche Überlagerungen von Gruppenwirkungen kommen.

2.50. Definition. Eine (*Gruppen-*) *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe Γ auf einem topologischen Raum X ist ein Gruppenhomomorphismus ρ von Γ in die Gruppe $\operatorname{Aut} X$ der Homöomorphismen von X. Schreibe ρ_γ oder kurz $\gamma\colon X \to X$ für das Bild von $\gamma \in \Gamma$.

Eine *Bahn* von ρ (oder auch kurz von Γ) ist eine Teilmenge der Form

$$\rho_\Gamma(x) = \Gamma x = \{\, \rho_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma \,\} \subset X$$

mit $x \in X$. Der *Quotient*

$$X/\Gamma = \{\, \Gamma x \mid x \in X \,\} \subset \mathcal{P}X$$

ist die Menge aller Bahnen. Es bezeichne

$$p\colon X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X/\Gamma \qquad \text{mit} \qquad p(x) = \Gamma x$$

die Projektionsabbildung. Der Raum X/Γ trage die Quotiententopologie unter p.

Es folgen zwei Bedingungen an Gruppenwirkungen, die sicherstellen, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

2.51. Definition. Eine Gruppenwirkung von Γ auf X heißt *frei*, wenn für alle $x \in X$ und alle $\gamma \in \Gamma$ aus $\gamma(x) = x$ bereits $\gamma = e$ folgt. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U in X besitzt, so dass $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ falls $\gamma(x) \neq x$.

Wenn Γ frei wirkt, kann $\gamma(x) = x$ nur für das neutrale Element gelten.

2.52. Beispiel. Wir geben verschiedene Beispiele von Gruppenwirkungen.

(1) Es sei $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ und $\gamma(x) = x+\gamma$. Dann ist der Quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homöomorph zu $S^1 \subset \mathbb{C}$ wie in Beispiel 2.24 via
$$\mathbb{Z}x \longmapsto e^{2\pi i x} .$$
Diese Wirkung ist frei und eigentlich diskontinuierlich. Wähle dazu als Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ das Intervall $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$, dann gilt $(x + n - \frac{1}{2}, x + n + \frac{1}{2}) \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(2) Es sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eingekürzter Bruch und $\gamma(z) = e^{2\pi i r\gamma} \cdot z$. Elemente $\gamma \in q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ wirken trivial, das heißt, es gilt $\gamma(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Daher ist diese Wirkung nicht frei. Sie ist aber eigentlich diskontinuierlich: zu $z \in S^1$ wähle
$$U = \left\{ e^{2\pi i\varphi} \cdot z \;\middle|\; \varphi \in \left(-\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \right) \right\} ,$$
dann gilt $U \cap \rho_n(U) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$.

Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ wirkt ebenfalls auf S^1. Der Quotient ist homöomorph zu S^1 via
$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})z \longmapsto z^q \in S^1 ,$$
und die Abbildung $S^1 \to S^1$ ist dieselbe wie in Beispiel 2.45. Diese Wirkung ist sowohl frei als auch eigentlich diskontinuierlich.

(3) Es seien X, Γ wie in (2), aber $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann liegen alle Bahnen dicht in X. Da jede offene Menge alle Bahnen schneidet, ist X/Γ jetzt eine überabzählbare Menge mit der Klumpentopologie. Die Wirkung ist zwar frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich. Denn die Bahn von $z \in S^1$ trifft jede noch so kleine Umgebung U: Zu jeder Umgebung U von $z \in S^1$ existiert also $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\rho_n(z) \in U$, insbesondere $U \cap \rho_n(U) \neq \emptyset$.

2.53. Proposition. *Es sei ρ eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe Γ auf X. Dann ist die Projektionsabbildung $p\colon X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung.*

Beweis. Es sei $y = \Gamma x \in X/\Gamma$, und es sei U eine Umgebung von x wie in Definition 2.51. Es sei $V = p(U) \in X/\Gamma$, dann folgt aus Definition 2.51, dass
$$p^{-1}(V) = \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma(U) \subset X .$$
Wir dürfen U als offen annehmen. Dann sind alle $\gamma(U)$ und somit auch ihre Vereinigung $p^{-1}(V)$ offen. Und $A \subset p^{-1}(V)$ ist genau dann offen in X, wenn alle $A \cap \gamma(U)$ offen sind. Das heißt, $B \subset V$ ist genau dann offen in der Quotiententopologie, wenn $p^{-1}(B) \cap \gamma(U)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ offen ist, und dafür reicht es, dass $p^{-1}(B) \cap U$ offen ist. Also erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus
$$p^{-1}(V) \cong \coprod_{\gamma\in\Gamma} \gamma(U) \cong \Gamma \times U ,$$
das heißt, $V \subset X/\Gamma$ ist gleichmäßig überlagert. Da das für alle $y \in X/\Gamma$ funktioniert, folgt unsere Behauptung. □

2.54. Bemerkung. Der Raum X/Γ trägt die Quotiententopologie. Nach Bemerkung 1.85 ist nicht klar, dass sich „schöne“ Eigenschaften von X auf den Quotienten vererben. Als Beispiel betrachte den normalen Raum $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Hierauf wirkt $\mathbb{Z}$ durch $n\,(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Da $(0,0) \notin X$, ist diese Wirkung frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei etwa $(x,y) \in X$, dann können wir als Umgebung U wie in Definition 2.51 von x die Menge $(2^{-1/2}x, 2^{1/2}x) \times \mathbb{R}$ wählen, falls $x \neq 0$, oder die Menge $\mathbb{R} \times (2^{-1/2}y, 2^{1/2}y)$, falls $y \neq 0$.

Allerdings ist der Quotient nicht einmal Hausdorffsch. Die Punkte $a = p(x,0)$ und $b = p(0,y) \in X/\Gamma$ lassen sich nicht trennen, denn für noch so kleine Umgebungen U von a und V von b gibt es ein hinreichend großes $n \in \mathbb{Z}$ so dass

$$U \ni p(x, 2^{-n}y) = p(2^{-n}x, y) \in V\ .$$

2.55. Definition. Eine *Decktransformation* einer Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ ist ein Homöomorphismus $F\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$, so dass $p \circ F = p$. Eine zusammenhängende Überlagerung heißt *normal*, wenn es zu je zwei $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ eine Decktransformation F mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ gibt.

Warnung: „normal“ hat hier nichts mit (T1) und (T4) zu tun, sondern mit dem Begriff des Normalteilers, siehe Folgerung 2.58.

2.56. Bemerkung. Die Decktransformationen einer gegebenen Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ bilden stets eine Gruppe Γ, die *Decktransformationsgruppe*. Sei $\tilde{X}$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Da jede Decktransformation ein Lift $\tilde{p}$ von $p\colon \tilde{X} \to X$ mit $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ist, wirkt Γ wegen der Eindeutigkeit der Lifte nach Satz 2.48 frei. Indem wir Urbilder gleichmäßig überlagerter Umgebungen von Punkten in X betrachten, sehen wir, dass Γ auch eigentlich diskontinuierlich wirkt. Falls $p\colon \tilde{X} \to X$ normal ist, folgt $X \cong \tilde{X}/\Gamma$.

Seien umgekehrt X, Γ wie in Proposition 2.53 und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist $p\colon X \to X/\Gamma$ eine normale Überlagerung, und Γ ist die Gruppe der Decktransformationen. Also beschreiben „zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende, normale Überlagerungen“ und „Quotienten zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Räume nach freien und eigentlich diskontinuierlichen Gruppenwirkungen“ das gleiche Phänomen aus zwei verschiedenen Blickwinkeln.

2.57. Beispiel. Wir haben in Beispiel 2.52 schon gesehen, dass die zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 in Beispiel 2.45 normal sind. Das linke Bild in Beispiel 2.47 besitzt keine Decktransformationen außer der Identität, ist also nicht normal. Für das rechte Bild erhalten wir eine Decktransformationsgruppe $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$, also ist dieses Beispiel normal. Dreht man aber nur bei je einer horizontalen und vertikalen Geraden in dem Bild die Pfeile um, so erhält man eine neue Überlagerung ohne nichttriviale Decktransformationen.

2.58. Folgerung (aus dem Liftungssatz 2.48). *Es sei $p\colon \tilde{X} \to X$ eine zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung, seien $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, und sei $\tilde{\gamma}$ ein Weg in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es existiert eine Decktransformation $F\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.*
(2) *Es gilt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \subset \pi_1(X, x_0)$.*
(3) *Für $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ gilt $[\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Insbesondere ist p genau dann eine normale Überlagerung, wenn $\operatorname{im} p_*$ Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist. In diesem Fall ist $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\operatorname{im}(p_*)$ isomorph zur Gruppe der Decktransformationen.

Beweis. Da Decktransformationen invertierbar sind und die Abbildung p liften, folgt die Äquivalenz von (1) und (2) unmittelbar aus Satz 2.48.

Wie im Satz 2.14 liefert $\sigma \mapsto \overline{\gamma}\sigma\gamma$ einen Isomorphismus von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Es folgt

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\gamma]\ ,$$

und daraus die Äquivalenz von (2) und (3). Da sich je zwei Wege $\tilde\gamma_1, \tilde\gamma_2$ von $\tilde x_0$ nach $\tilde x_1$ bis auf Homotopie nur bis auf Verkettung mit der Schleife $\tilde\gamma_2\overline{\tilde\gamma}_1$ am Punkt $\tilde x_0$ unterscheiden, kommt es nicht auf die Wahl von $\tilde\gamma$ an.

Wenn $\operatorname{im} p_*$ ein Normalteiler ist, gilt (3), wegen (1) existieren alle Decktransformationen, und p ist normal. Sei umgekehrt p normal, also gilt (1) für alle $\tilde x_1 \in p^{-1}(x_0)$. Da sich jede Schleife γ in X zu einem Weg $\tilde\gamma$ von $\tilde x_0$ zu einem Punkt in $p^{-1}(x_0)$ liften lässt, folgt aus (3), dass $\operatorname{im} p_*$ ein Normalteiler ist.

Um eine Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $\tilde X$ zu konstruieren, betrachten wir zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ die nach dem Liftungssatz 2.48 eindeutige Decktransformation $\rho_{[\gamma]}\colon \tilde X \to \tilde X$, die den Basispunkt $\tilde x_0$ auf den Endpunkt $\tilde\gamma(1)$ des Lifts $\tilde\gamma$ von γ mit $\tilde\gamma(0) = \tilde x_0$ abbildet.

Wir müssen zeigen, dass ρ einen Gruppenhomomorphismus liefert. Sei dazu $[\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$, und sei $\tilde\gamma_1$ der Lift von γ_1 mit $\tilde\gamma_1(0) = \tilde x_0$. Dann folgt $\rho_{[\gamma_1]}(\tilde x_0) = \tilde\gamma_1(1)$. Außerdem ist $\tilde\gamma' = \rho_{[\gamma]} \circ \tilde\gamma$ ein Lift von γ mit $\tilde\gamma'(0) = \tilde\gamma_1(1)$, also ist die Verkettung $\widetilde{\gamma_1\gamma} = \tilde\gamma_1\tilde\gamma'$ ein Lift von $\gamma_1\gamma$ mit $\widetilde{\gamma_1\gamma}(0) = \tilde x_0$. Es folgt

$$\rho_{[\gamma_1]}\big(\rho_{[\gamma]}(\tilde x_0)\big) = \rho_{[\gamma_1]}\big(\tilde\gamma(1)\big) = \tilde\gamma'(1) = \widetilde{\gamma_1\gamma}(1) = \rho_{[\gamma_1\gamma]}(\tilde x_0)\ .$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Liftungssatz 2.48 folgt $\rho_{[\gamma_1]} \circ \rho_{[\gamma]} = \rho_{[\gamma_1\gamma]}$, und wir erhalten eine Gruppenwirkung.

Da nach Satz 2.46 gerade die Elemente von $\operatorname{im} p_*$ zu Schleifen in $(\tilde X, \tilde x_0)$ liften, folgt $\ker\rho = \operatorname{im} p_*$, so dass die Gruppe $\Gamma = \pi_1(X, x_0)/\operatorname{im} p_*$ frei und wegen Bemerkung 2.56 auch eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde X$ wirkt, mit $X \cong \tilde X/\Gamma$. □

2.f. Die universelle Überlagerung

Nach Satz 2.46 bestimmt jede Überlagerung $p\colon (\widetilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ eine Untergruppe $\operatorname{im} p_*$ der Fundamentalgruppe von (X, x_0). Wir wollen zeigen, dass es für geeignete Räume X umgekehrt zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon (\widetilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ mit $\operatorname{im} p_* = G$ gibt. Dazu erinnern wir uns, dass eine Überlagerung nach Definition 2.23 universell heißt, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Eine universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ haben wir in Beispiel 2.24 bereits kennengelernt.

Wir werden später sehen, dass die universelle Überlagerung von X jede zusammenhängende Überlagerung von X überlagert, daher der Name. Außerdem kann man jede beliebige (auch nicht zusammenhängende) Überlagerung mit Hilfe der universellen Überlagerung konstruieren.

2.59. Definition. Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $\operatorname{im}(\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)) = 0$.

In Übung 2.89 geben wir ein Beispiel für einen Raum, der nicht semilokal einfach zusammenhängend ist.

2.60. Satz. *Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende topologische Raum hat genau dann eine universelle Überlagerung, wenn er semilokal einfach zusammenhängend ist.*

2.61. Bemerkung. Ein topologischer Raum muss nicht lokal wegzusammenhängend sein, um eine Überlagerung zu besitzen, die die universelle Eigenschaft aus Folgerung 2.63 unten zu hat. Allerdings können wir solch eine Überlagerung dann nicht mehr durch unsere Definition von „einfach zusammenhängend“ charakterisieren.

Beweis von Satz 2.60. Sei $\widetilde X \to X$ eine universelle Überlagerung, sei $U \subset X$ eine wegzusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x \in X$, sei $\widetilde U$ eine Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$ und sei $\tilde x \in \widetilde U$ das Urbild von x in $\widetilde U$. Dann folgt $\operatorname{im}(\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)) = \{e\}$

aus den folgenden kommutativen Diagrammen.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle p|_{\widetilde{U}}}\downarrow\cong & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \longrightarrow & X \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{U},\tilde{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}) = \{e\} \\ {\scriptstyle (p|_{\widetilde{U}})_*}\downarrow\cong & & {\scriptstyle p_*}\downarrow \\ \pi_1(U,x) & \longrightarrow & \pi_1(X,x) \end{array}$$

Für die Rückrichtung nehmen wir zunächst an, es gebe eine universelle Überlagerung. Dann wissen wir nach Satz 2.46, dass eine Schleife γ in X mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ genau dann zu einer Schleife in der universellen Überlagerung liftet, wenn sie in X nullhomotop ist. Wie immer folgt, dass zwei Wege σ, σ' von x_0 nach $x \in X$ genau dann Lifts $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ mit $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}'(0) = \tilde{x}_0$ und gleichem Endpunkt $\tilde{x} = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1)$ haben werden, wenn σ und σ' homotop sind. Also betrachten wir die Menge

$$\widetilde{X} = \big\{\, \sigma\colon [0,1] \to X \;\big|\; \sigma(0) = x_0 \,\big\}\,/\!\sim \qquad \text{und} \qquad p([\sigma]) = \sigma(1)\,,$$

wobei „$\sim$“ hier Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ bezeichne. Als Fußpunkt $\tilde{x}_0$ wählen wir die relative Homotopieklasse der konstanten Schleife am Punkt x_0.

Sei jetzt $x \in X$. Weil X semilokal einfach zusammenhängend ist, existiert eine Umgebung U von x mit $\operatorname{im}(\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)) = 0$. Wegen Funktorialität von π_1 überträgt sich diese Eigenschaft auf alle kleineren Umgebungen V von x. Weil X außerdem lokal wegzusammenhängend ist, hat x eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ aus wegzusammenhängenden Umgebungen $V \subset U$ von x.

Für einen Weg $\sigma\colon [0,1] \to X$ mit $\sigma(0) = x_0$ und $V \in \mathcal{U}_{\sigma(1)}$ betrachte

$$U([\sigma], V) = \big\{\, [\sigma\beta] \;\big|\; \beta \text{ Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = \sigma(1) \,\big\} \subset \widetilde{X}\,;$$

diese Menge hängt nur von der relativen Homotopieklasse von $[\sigma]$ ab. Dann ist die Abbildung

$$p|_{U([\sigma],V)}\colon U([\sigma],V) \longrightarrow V \qquad \text{mit} \qquad [\sigma\beta] \longmapsto \beta(1) \tag{$*$}$$

eine Bijektion. Surjektivität folgt, da V wegzusammenhängend ist, und Injektivität, da für zwei Wege β, β' in V mit gleichem Anfangspunkt x und gleichem Endpunkt die Schleife $\beta'\beta^{-1}$ in V ja in X zusammenziehbar ist, und somit also auch $[\sigma\beta] = [\sigma\beta'] \in \widetilde{X}$.

Wir definieren eine Topologie auf $\widetilde{X}$ indem wir zu jedem Punkt $[\sigma] \in \widetilde{X}$ die Umgebungsbasis

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]} = \big\{\, U([\sigma],V) \;\big|\; V \in \mathcal{U}_{\sigma(1)} \,\big\}$$

vorgeben. Insbesondere ist $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ genau dann offen, wenn für alle $[\sigma] \in \widetilde{U}$ eine Menge $U([\sigma],V) \in \widetilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]}$ mit $U([\sigma],V) \subset \widetilde{U}$ existiert. Man überlegt sich, dass die Abbildung $p\colon U([\sigma],V) \to V$ aus $(*)$ für alle $U([\sigma],V) \in \widetilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]}$ ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist p stetig, und alle $U([\sigma],V)$ sind gleichmäßig überlagert. Wir haben also eine Überlagerung konstruiert.

Der Raum $\widetilde{X}$ ist wegzusammenhängend, denn für jeden Punkt $[\sigma]$ ist $s \mapsto [\sigma|_{[0,s]}]$ ein Weg in $\widetilde{X}$ vom konstanten Weg $\tilde{x}_0$ zum Punkt $[\sigma]$. Er ist auch einfach zusammenhängend. Denn sei $\tilde{\gamma}$ eine Schleife in $\widetilde{X}$, also eine Familie von Wegen $\gamma_t\colon [0,1] \to X$, so dass $t \mapsto [\gamma_t]$ bezüglich der obigen Topologie stetig ist. Dann zerlegen wir $[0,1]$ in Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, so dass jedes Teilintervall in eine Menge der Form $U([\sigma_i], V_i)$ abgebildet wird. Durch Induktion über i schließen wir, dass $p\circ\tilde{\gamma}|_{[0,t_i]}$ in X zu γ_{t_i} homotop ist. Da $[\gamma_1] = \tilde{x}_0$ zur konstanten Schleife homotop ist, ist also $p_*[\tilde{\gamma}] = [\gamma_1] = 0 \in \pi_1(X,x_0)$. Aus Satz 2.46 folgt $\pi_1\big(\widetilde{X},\tilde{x}_0\big) = 0$. □

2.62. Bemerkung. Auf der soeben konstruierten universellen Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to X$ wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ durch $[\gamma]\cdot[\sigma] = [\gamma\sigma]$. Außerdem folgt aus obigem Beweis, dass $\widetilde{X}/\pi_1(X,x_0) \cong X$. Das passt zu Folgerung 2.58, da die Gruppe $\operatorname{im} p_* = \{e\}$ trivial und insbesondere ein Normalteiler von $\pi_1(X,x_0)$ ist.

Die universelle Überlagerung erfüllt eine universelle Eigenschaft und ist daher bis auf eindeutige Isomorphie von punktierten Überlagerungen eindeutig bestimmt.

2.63. FOLGERUNG. *Es sei (X, x_0) zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es sei $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung.*

(1) *Es sei $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine weitere Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung $r\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (Y, y_0)$ mit $p = q \circ r$, und r ist ebenfalls eine universelle Überlagerung von Y.*

(2) *Sei insbesondere $p'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ eine weitere universelle Überlagerung, dann existiert ein eindeutiger Homöomorphismus $F\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$, so dass $p = p' \circ F$.*

Wenn Y in (1) nicht zusammenhängend ist, trifft r zwar nur die Zusammenhangskomponente von y_0, ist aber nach unserer Definition 2.23 dennoch eine universelle Überlagerung.

BEWEIS. Da $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Liftes r von p aus Satz 2.48, da $\{e\} = \operatorname{im} p_* \subset \operatorname{im} q_*$. Um zu sehen, dass r eine Überlagerung ist, wählen wir zu $y \in Y$ eine wegzusammenhängende Umgebung U von $x = q(y)$, die sowohl von p als auch von q gleichmäßig überlagert wird. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$ und $q^{-1}(U)$ jeweils homöomorph zu U via p beziehungsweise q. Sei $V \subset Y$ die Wegzusammenhangskomponente von $q^{-1}(U)$, die y enthält. Da $p = q \circ r$, und da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden, ist $r^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$. Also ist r eine Überlagerung von Y, und da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, sogar eine universelle.

Die zweite Aussage zeigt man mit dem üblichen universellen Trick. □

Wir wollen diese Folgerung benutzen, um zu zeigen, dass die Kategorie aller Überlagerungen eines Raumes X mit universeller Überlagerung wie oben zu einer Kategorie äquivalent ist, die nur von $\pi_1(X, x_0)$ abhängt.

2.64. DEFINITION. Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist eine *Äquivalenz von Kategorien* , wenn er

(1) *essentiell surjektiv* ist, das heißt, wenn zu jedem $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ ein $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{F}A \cong B$ existiert, und

(2) *volltreu* ist, das heißt, wenn für alle A, $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ die Abbildung $\mathcal{F}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ eine Bijektion ist.

In dem Wort „volltreu“ steht „voll“ für die Surjektivität und „treu“ für die Injektivität der obigen Abbildung.

Es sei (X, x_0) zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Wir betrachten also eine Kategorie, deren Objekte gerade punktierte, zusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0) sind, und für $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$, $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ seien die Morphismen $F\colon p \to q$ gerade punktierte Abbildungen $r\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ mit $p = q \circ r$.

Außerdem betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ und deren Morphismen gerade die Inklusionsabbildungen sind, also

$$\operatorname{Hom}(H, G) = \begin{cases} \{H \hookrightarrow G\} & \text{falls } H \subset G, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Von der ersten in die zweite Kategorie erhalten wir einen Funktor, der $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ auf $\operatorname{im} p_* \subset \pi_1(X, x_0)$ abbildet. Für eine weitere Überlagerung $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ existiert nach dem Liftungssatz 2.48 höchstens eine punktierte Abbildung $r\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, und zwar genau dann, wenn $\operatorname{im} p_* \subset \operatorname{im} q_*$. Somit erhalten wir einen Funktor, und er ist volltreu. Er ist auch essentiell surjektiv, denn zu $G \subset \pi_*(X, x_0)$ können wir die punktierte Überlagerung $(\widetilde{X}/G, [\tilde{x}_0]) \to (X, x_0)$

betrachten. In gewissem Sinne ist $G \mapsto \big((\widetilde{X}/G, [\tilde{x}_0]) \to (X, x_0)\big)$ also invers zum obigen Funktor, und zwar bis auf eindeutige Isomorphismen.

Allgemeiner kann man auch beweisen, dass die Kategorie aller Überlagerungen äquivalent ist zur Kategorie aller Gruppenwirkungen von $\pi_1(X, x_0)$ auf (diskreten) Mengen. Diese Kategorie umfasst die Kategorie der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$, wobei man einer Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$ die Menge der Rechtsnebenklassen $M = \pi_1(X, x_0)/\Gamma$ zuordnet. Um aus einer diskreten Menge M mit $\pi_1(X, x_0)$-Wirkung eine Überlagerung zu konstruieren, betrachtet man den Quotienten

$$\tilde{X} \times_\Gamma M = (\tilde{X} \times M)/\Gamma \,,$$

wobei γ auf $\tilde{X} \times M$ durch $\gamma(\tilde{x}, m) = (\gamma\tilde{x}, \gamma m)$ wirkt. Die Bahnen der Γ-Wirkung auf M entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten der Überlagerung $\tilde{X} \times_\Gamma M$. Die obige Zuordnung läßt sich zu einem Funktor ausbauen, von dem man wieder zeigen kann, dass er eine Äquivalenz von Kategorien liefert.

Einen ähnlichen Sachverhalt lernt man in der Algebra kennen. Dort klassifizieren die Untergruppen der Galois-Gruppe genau die Zwischenkörper in einer Galois-Körpererweiterung. Die Rolle der universellen Überlagerung spielt der algebraische Abschluss eines perfekten Körpers. Es folgt ein „Wörterbuch“ zur Übersetzung zwischen Sachverhalten aus der Galois-Theorie und der Überlagerungstheorie.

Galois-Theorie	*Überlagerungstheorie*
Perfekter Körper K	Zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender, punktierter topologischer Raum (X, x_0)
Algebraische Erweiterung $L \supset K$	Zusammenhängende, punktierte Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$
Algebraischer Abschluss $\overline{K}$	Universelle Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$
Absolute Galoisgruppe $G = G(\widetilde{K}/K)$	Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$
abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$	Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$
Fixkörper von H	Quotient $(\widetilde{X}/\Gamma, \Gamma\tilde{x}_0) \to (X, x_0)$
Normale Erweiterung $L \supset K$	Normale Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$
Relative Galoisgruppe $G(L/K)$	Decktransformationsgruppe $\pi_1(X, x_0)/(\operatorname{im} q_*)$

Die Parallelen sind klar erkennbar. Entscheidender Unterschied: alle „Pfeile“ in der Kategorie der algebraischen Erweiterungen verlaufen genau andersherum als in der Kategorie der punktierten Überlagerungen. Das liegt daran, dass die entsprechenden Äquivalenzen von Kategorien in der Galois-Theorie kontravariante Funktoren sind. Wenn wir anstelle der topologischen Räume X die Algebra der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{C}$ betrachten, sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei den Körpern. Wie Sie umgekehrt im Falle von Zahlkörpern zu einer „geometrischen“ Beschreibung kommen, lernen Sie in der arithmetischen Geometrie.

2.g. CW-Komplexe

Wir erinnern uns an den Begriff „zusammenziehbar“ aus Definition 2.4.

2.65. Definition. Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenziehbar,* wenn jede Umgebung U eines Punktes x eine Umgebung V von x enthält, die sich auf x zusammenziehen lässt.

2.66. Bemerkung. (1) Lokal zusammenziehbare Räume sind insbesondere auch lokal wegzusammenhängend und (semi-) lokal einfach zusammenhängend.

(2) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, und daher lokal zusammenziehbar. Sei etwa U eine beliebige Umgebung von $x \in M$, und sei V eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung von x. Dann ist $U \cap V$ zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph, enthält also einen zusammenziehbaren Ball um x.

2.67. Satz. *CW-Komplexe sind lokal zusammenziehbar.*

Im Beweis müssen wir eine Homotopie auf einer Teilmenge eines CW-Komplexes angeben. Dazu erinnern wir uns, dass ein CW-Komplex X nach Proposition 1.108 als Quotient der disjunkten Vereinigung all seiner Zellen geschrieben werden kann, also

$$X \cong \coprod_{n\in\mathbb{N}} \coprod_{i\in I^n} D^n \,/\sim .$$

Da $[0,1]$ (lokal) kompakt ist, gilt nach Übung 1.166 dann auch

$$X \times [0,1] \cong \coprod_{n\in\mathbb{N}} \coprod_{i\in I^n} (D^n \times [0,1]) \,/\sim .$$

Also können wir auch Homotopien Zelle für Zelle definieren. Wenn die gesamte Homotopie wohldefiniert ist, dann ist sie auch stetig.

Beweis. Sei X ein CW-Komplex, sei $x_0 \in e^{n_0}_{i_0} \subset X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$, und sei $U \subset X$ eine Umgebung von x_0. Sei $V^{n_0} \subset U \cap X^{n_0}$ das Bild eines kleinen abgeschlossenen Balles in B^{n_0} unter der charakteristischen Abbildung $\Phi^{n_0}_{i_0}$. Dann konstruieren wir für alle $n > n_0$ induktiv abgeschlossene Mengen $V^n \subset U \cap X^n$, so dass $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$ Deformationsrektrakt von V^n und $\mathring{V}^n$ Umgebung von x_0 in X^n ist. Für alle $i \in I^n$ sei dazu

$$\big(\Phi^n_i\big)^{-1}(V^n) = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \frac{x}{|x|} \in \big(\varphi^n_i\big)^{-1}\big(V^{n-1}\big) \text{ und } |x| \geq 1 - \varepsilon^n_i \right\} \subset \big(\Phi^n_i\big)^{-1}(U) .$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon^n_i \in (0,1)$; dieses finden wir, da $\big(\varphi^n_i\big)^{-1}\big(V^{n-1}\big)$ kompakt und $\big(\Phi^n_i\big)^{-1}(U)$ offen ist. Anschliessend setzen wir $V = \bigcup V^n$.

Wir können jetzt eine Homotopie $H\colon V \times [0,1] \to V$ von der Identität zur konstanten Abbildung auf $x_0 \subset V$ konstruieren. Wir definieren zunächst für $n > n_0$ eine Homotopie $H^n\colon V^n \times [0,1] \to V^n$ zwischen der Identität und einer Retraktion auf V^{n-1} durch

$$H^n\big(\Phi^n_i(x), t\big) = \Phi^n_i\left(\frac{x}{|x|^t}\right)$$

für alle $x \in V^n \cap e^n_i$. Hier nutzen wir aus, dass $\varepsilon^n_i < 1$, also $|x| > 0$ für alle $x \in (\Phi^n_i)^{-1}(V^n)$. Außerdem definieren wir $H^{n_0}\colon V^{n_0} \times [0,1] \to V^{n_0}$ durch

$$H^{n_0}\big(\Phi^{n_0}_{i_0}(x), t\big) = \Phi^{n_0}_{i_0}\Big((1-t)\,x + t\,\big(\Phi^{n_0}_{i_0}\big)^{-1}(x_0)\Big) .$$

Wir schreiben $P^n = H(\,\cdot\,,1)\colon V^n \to V^{n-1}$ und definieren $H\colon V \times [0,1] \to V$ für $x \in V^n$ durch

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq t \leq 2^{n_0-n-1}, \text{ und} \\ H^{n'}\big((P^{n'+1} \circ \cdots \circ P^n)(x), 2^{n'+1-n_0}\,t - 1\big) & \text{für } 2^{n_0-n'-1} \leq t \leq 2^{n_0-n'} . \end{cases}$$

Für die Stetigkeit von H reicht es nach Vorbemerkung, dass $H(\Phi^n_i(\,\cdot\,),\,\cdot\,)\colon V^n \times [0,1] \to X$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$ stetig ist. Wir schreiben $[0,1]$ als CW-Komplex mit den 1-Zellen

$$[0,1] = \big[0, 2^{n_0-n-1}\big] \cup \big[2^{n_0-n-1}, 2^{n_0-n}\big] \cup \cdots \cup \big[2^{-1}, 2^0\big]$$

und benötigen mit einem ähnlichen Argument nur die Stetigkeit von $H(\Phi^n_i(\,\cdot\,),\,\cdot\,)$ auf dem Produkt des kompakten Raums $V^n \cap e^n_i$ mit den einzelnen Teilintervallen, aber die folgt direkt aus der

Konstruktion der H^n und H. Man beachte, dass wir trotz beliebig hoher „Kontraktionsgeschwindigkeiten“ nahe $t = 0$ aufgrund der Quotiententopologie auf X keine Probleme mit der Stetigkeit bei $t = 0$ bekommen. □

2.68. Bemerkung. Sei M eine Familie von *Erzeugern* von G, und sei $R \subset *_{m\in M}\mathbb{Z}$ eine Menge von *Relationen* in der von den Elementen von M erzeugten freien Gruppe F. Dann sei $N = (R)$ der von den Relationen erzeugte Normalteiler von F. Wir schreiben

$$G = F/N = \langle\, M \mid R \,\rangle\ ,$$

diese Darstellung heißt auch eine *Präsentation* der Gruppe G. Jede Gruppe besitzt eine Präsentation. Zum Beispiel könnten wir $M = G$ setzen, dann ist F die Menge aller Wörter in M (wobei wir die Gruppenstruktur von G vergessen haben). Dann wählen wir $R = \ker(F \to G)$, wobei wir jedes Wort in F auf das entsprechende Produkt in G abbilden.

Jetzt haben wir also eine Möglichkeit, jede Gruppe durch Erzeuger und Relationen zu beschreiben. Allerdings sind die folgenden Probleme im Allgemeinen nicht algorithmisch lösbar.

(1) *Wortproblem.* Stellt ein Wort w in $\langle\, M \mid R \,\rangle$ das neutrale Element dar?
(2) *Isomorphieproblem.* Sind zwei Gruppen $\langle\, M_1 \mid R_1 \,\rangle$ und $\langle M_2 \mid R_2 \,\rangle$ isomorph?

Unter einem *maximalen Baum* in einem punktierten CW-Komplex (X, x_0) mit $x_0 \in X^0$ verstehen wir einen maximalen einfach zusammenhängenden Unterkomplex $Y \subset X^1$ mit $x_0 \in Y$.

2.69. Satz. *Sei X ein wegzusammenhängender CW-Komplex und $x_0 \in X^0$.*

(1) *Dann existiert $J^1 \subset I^1$, so dass*

$$Y = X^0 \cup \bigcup_{j\in J^1} e^1_j$$

ein maximaler Baum in X ist.
(2) *Für J^1 wie in* (1) *gilt*

$$\pi_1(X^1, x_0) \cong \langle\, I^1 \setminus J^1 \,\rangle \cong \coprod_{i\in I^1\setminus J^1} \mathbb{Z}\ .$$

(3) *Es sei $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann gilt*

$$\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^1, x_0)/(\{\varphi^2_{i*}[\sigma] \mid i \in I^2\})\ .$$

(4) *Es gilt*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X^2, x_0) \cong \left\langle\, \{\, [\sigma_i] \mid i \in I^1 \setminus J \,\} \;\middle|\; \{\, \varphi^2_{i*}[\sigma] \mid i \in I^2 \,\} \right\rangle\ .$$

Dieser Satz ist zwar nicht einfach zu formulieren, und auch der Beweis ist kompliziert, da der Satz von Seifert-van Kampen mit offenen Teilmengen arbeitet, während die natürlicherweise auftretenden Unterkomplexe im Beweis abgeschlossen sind — ein Großteil des Beweises besteht darin, dieses Problem zu umgehen. Dafür läßt sich die Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen CW-Komplexes mit Hilfe dieses Satzes auf rein algebraische Rechnungen mit Erzeugern und Relationen zurückführen. Das werden wir in Folgerung 2.70 und Beispiel 2.71 ausnutzen.

Beweis. Zu (1) betrachten wir die Menge $\mathcal{Y}$ aller Bäume in X^1, das heißt, aller einfach zusammenhängenden Unterkomplexe von X, die den Punkt x_0 enthalten. Diese Menge ist durch Inklusion halb geordnet, und jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$ hat als obere Schranke die Vereinigung aller zu $\mathcal{Y}'$ gehörigen Unterkomplexe von X^1. Die Vereinigung ist wieder einfach zusammenhängend, denn jede Schleife trifft nach Satz 1.112 nur endlich viele Zellen, ist also bereits vollständig in einem der Unterkomplexe enthalten, und nach Voraussetzung in diesem auch zusammenziehbar. Nach dem

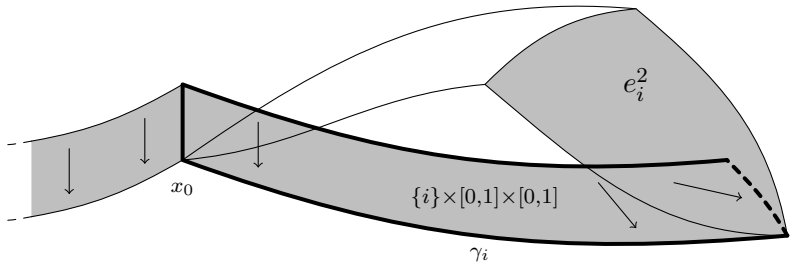


ABBILDUNG 2.5. Der Raum $\overline{X}^n$

Lemma von Zorn existiert also ein maximaler Baum $Y \subset X^1$. Es seien $J^0 \subset I^0$ und $J^1 \subset I^1$ die Indexmengen der an Y beteiligten 0- und 1-Zellen von X^1.

Wenn X wegzusammenhängend ist, folgt $J^0 = I^0$. Denn gäbe es einen Punkt $z \in X^0 \setminus Y^0$, dann gäbe es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ von x_0 nach z. Es sei $t_0 \in [0,1]$ maximal mit $\gamma(t_0) \in Y$, dann befindet sich $\gamma(t_0+\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ klein genug innerhalb einer Kante von $X^1 \setminus Y$, die von Y zu einem Punkt führt, der nicht in Y enthalten ist, und wir können Y als Baum vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität.

Zu (2) betrachten wir die offenen Teilmengen

$$U_0 = X^1 \setminus \left\{ \Phi_i^1(0) \;\middle|\; i \in I^1 \setminus J^1 \right\} \qquad \text{und} \qquad U_k = U_0 \cup e_k^1 \subset X^1$$

für alle $k \in I^1 \setminus J^1$. Die Menge U_0 hat Y als Deformationsretrakt und ist daher einfach zusammenhängend. Für jede Menge U_k finden wir eine Schleife durch den Punkt x_k, die nicht zusammenziehbar ist. Man kann jetzt zeigen, dass sich U_k auf diese Schleife zusammenziehen lässt, und erhält insbesondere $\pi_1(U_k, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Alle Durchschnitte zweier oder mehr der Mengen U_k ergeben die Menge U_0, sind also einfach zusammenhängend. Aus dem Satz 2.39 von Seifert-van Kampen folgt die Behauptung.

Auch die Schritte (3) und (4) basieren auf dem Satz von Seifert-van Kampen. Um induktiv von $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$ zu $\pi_1(X^n, x_0)$ für $n \geq 2$ zu gelangen, vergrößern wir X^n zu $\overline{X}^n$, siehe Abbildung 2.5. Dazu wählen wir für jedes $i \in I^n$ einen Weg γ_i von x_0 zum Bild x_i des Basispunktes von S^{n-1} unter der Verklebeabbildung φ_i. Wir verkleben $I^n \times [0,1] \times [0,1]$ wie folgt mit X^n.

(1) Wir identifizieren alle Strecken $\{(i,0)\} \times [0,1]$ miteinander und kleben $[(i,0,0)]$ an den Punkt x_0.
(2) Wir verkleben $\{i\} \times [0,1] \times \{0\}$ entlang von $\gamma_i\colon [0,1] \times \{0\}$ mit X^{n-1}.
(3) Wir kleben $\{1\} \times [0,1]$ auf eine Strecke in e_i^n vom Punkt x_i ins Innere der Zelle bis zum Radius $1/2$.

Dann ist X^n ein Deformationsretrakt von $\overline{X}^n$, indem wir jedes Quadrat $\{i\} \times [0,1] \times [0,1]$ auf das Bild von $\{i\} \times ([0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1])$ zusammenziehen.

Wir betrachten die folgenden offenen Teilmengen. Es sei

$$U_0 = \overline{X}^n \setminus \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n\left(D_{1/2}^n\right) ,$$

wobei $D_{1/2}^n \subset D^n$ den abgeschlossenen Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ bezeichne, siehe Abbildung 2.6. Dann ist X^{n-1} ein Deformationsretrakt von U_0.

Nach Satz 2.67 existiert eine zusammenziehbare Umgebung von x_0 in $X^n \cap U_0$. Es sei $V_0 \subset \overline{X}^n$ ihr Urbild unter der Retraktion $r_n\colon \overline{X}^n \to X^n$, dann ist V_0 ebenfalls zusammenziehbar. Für $i \in I^n$ setze

$$U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0,1] \times (0,1]) \cup e_i^n \; .$$

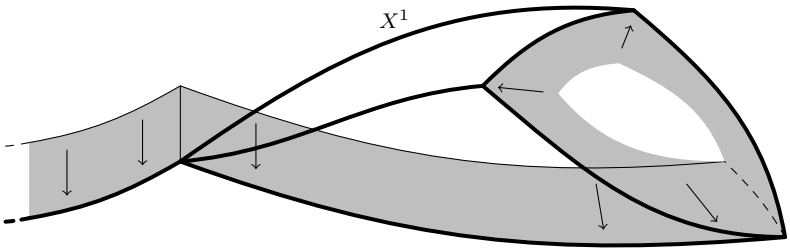


ABBILDUNG 2.6. Die Umgebung U_0 von X^{n-1}

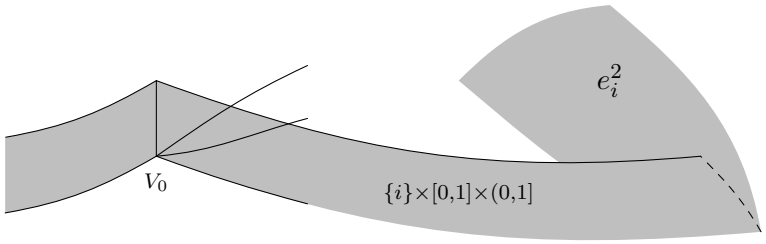


ABBILDUNG 2.7. Der Raum U_i

Man überzeugt sich, dass U_i ebenfalls zusammenziehbar ist, siehe Abbildung 2.7.

Für $i \neq j \in I^n$ ist $U_i \cap U_j = V_0$ zusammenziehbar, also insbesondere wegzusammenhängend. Außerdem ist

$$U_0 \cap U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0,1] \times (0,1]) \cup \Phi_i^n(B^n \setminus D_{1/2}^n)$$

wegzusammenhängend mit Deformationsretrakt $\Phi_i^n(S_{3/4}^{n-1})$. Analog sieht man, dass auch dreifache Durchschnitte von $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{\, U_i \mid i \in I^n \,\}$ wegzusammenhängend sind.

Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1(U_0 \cap U_i, x_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}\,,$$

wobei ein Erzeuger $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$ auf eine Schleife abgebildet wird, die in U_0 zu $\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i$ homotop ist, siehe Abbildung 2.8. Behauptung (3) folgt jetzt aus Satz 2.39, da

$$\begin{aligned}\pi_1(X^2, x_0) = \pi_1(\overline{X}^2, x_0) &= \Big(\pi_1(U_0, x_0) * \coprod_{i \in I^n} \pi_1(U_i, x_0)\Big) \Big/ \big(\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}\big) \\ &= \pi_1(X_1, x_0) \,/\, \big(\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}\big)\,.\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Erzeuger $[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\overline{\gamma}_i]$ nach Satz 2.14 vom Weg γ_i abhängen. Da aber verschiedene Wege zueinander konjugierte Erzeuger liefern, hängt der erzeugte Normalteiler nach Bemerkung 2.38 nicht von der Wahl von γ_i ab.

Der Beweis von Behauptung (4) beginnt damit, dass $U_0 \cap U_i \sim S^{n-1}$ für $n \geq 3$ nach Beispiel 2.43 einfach zusammenhängend ist und somit $\pi_1(X^n, x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}, x_0)$ analog zur obigen Überlegung. Jetzt liefert die Inklusion $\iota\colon X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen der Fundamentalgruppen. Denn sei γ eine Schleife in X, dann verläuft γ in einem Gerüst X^n nach Satz 1.112, also ist die Abbildung

$$\iota_*\colon \pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Falls γ nullhomotop ist, verläuft aus dem gleichen Grund eine Homotopie H zur trivialen Schleife ganz in einem X^n (wobei n jetzt größer sein kann), also ist ι_* auch injektiv. Damit ist der Satz bewiesen. □

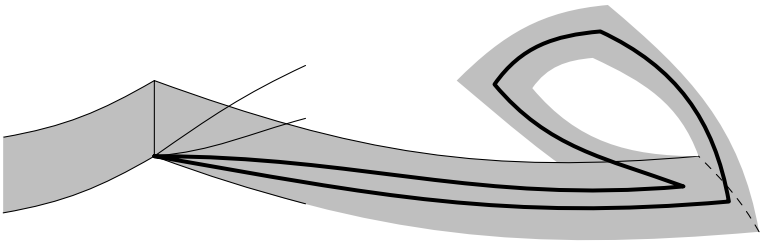


ABBILDUNG 2.8. Die Fundamentalgruppe von $U_0 \cap U_i$

Wir halten also fest, dass wir die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes berechnen können. Außerdem hat ein CW-Komplex nach Satz 2.67 eine universelle Überlagerung. Wir können mit den Ergebnissen aus dem vorigen Abschnitt also auch alle Überlagerungen eines CW-Komplexes beschreiben.

2.70. FOLGERUNG. *Sei G eine Gruppe, dann existiert ein CW-Komplex X mit $\pi_1(X) \cong G$.*

BEWEIS. Sei G durch Erzeuger $M \subset G$ und Relationen R gegeben. Wir konstruieren einen CW-Komplex X. Sei $X^0 = \{x_0\}$ das 0-Skelett, bestehend aus einer 0-Zelle x_0.

Wir wählen $I^1 = M$, das heißt, für jeden Erzeuger $m \in M$ sei e^1_m eine 1-Zelle, deren zwei Endpunkte notwendigerweise an x_0 angeklebt sind. Dann ist $\{x_0\} \subset X^1$ ein maximaler Baum, also ist $F = \pi_1(X^1, x_0)$ die von den Schleifen $\{\, e^1_m \mid m \in M \,\}$ erzeugte freie Gruppe. Wir identifizieren den zu e^1_m gehörigen Erzeuger mit $m \in M$.

Wir wählen $I^2 = R$, und für jede Relation $r = m_1 \cdots m_k \in R$ wählen wir eine 2-Zelle e^2_r, so dass die Verklebeabbildung $\varphi^2_r \colon S^1 \to X^1$ gerade das Element $m_1 \cdots m_k \in \pi_1(X^1, x_0)$ repräsentiert.

Aus Satz 2.69 folgt jetzt

$$\pi_1(X^2, x_0) = \langle\, M \mid R \,\rangle = G\,. \qquad \square$$

2.71. BEISPIEL. Wir betrachten Flächen, genauer, kompakte, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2.

(1) Eine orientierbare Fläche X_g vom *Geschlecht* $g \geq 0$ lässt sich als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $2g$ Kanten $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ und einer 2-Zelle schreiben. Die zugehörige Verklebeabbildung φ^2 entspreche der Schleife $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$, und wir erhalten die Präsentation

$$\pi_1(X_g, x_0) \cong \langle\, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \,\rangle\,.$$

Für $g = 0$ erhalten wir die Sphäre S^2, für $g = 1$ den Torus T^2. Da die Relation ein Produkt von Kommutatoren ist, erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(X_g, x_0)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}\,.$$

(2) Eine nicht orientierbare Fläche Y_g vom Geschlecht $g \geq 0$ lässt sich analog schreiben als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $g+1$ Kanten $a_0, \ldots, a_g$ und einer 2-Zelle. Die Verklebeabbildung sei gegeben durch die Schleife $a_0^2 \cdots a_g^2$, also gilt

$$\pi_1(Y_g, x_0) \cong \langle a_0, \ldots, a_g \mid a_0^2 \cdots a_g^2 \rangle\,.$$

Für $g = 0$ erhalten wir $\mathbb{R}P^2$, für $g = 1$ die Kleinsche Flasche. In diesem Fall erhalten wir die Abelisierung

$$\pi_1(Y_g, x_0)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g+1} / \langle (2, \ldots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,,$$

wobei die rechte Darstellung zu den Erzeugern $a_1, \ldots, a_g$ und $a_0 + \cdots + a_g$ gehört.

Wir sehen also, dass man die unterschiedlichen Flächen anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden kann.

2.h. Übungen zu Kapitel 2

Übungen zu Abschnitt 2.a.

2.72. Übung. Sei (X, A) ein Paar und Y ein Raum. Zeigen Sie: Homotopie relativ zu A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von X nach Y.

2.73. Übung. Seien X, Y, Z topologische Räume, und seien $F\colon X \to Y$ und $G\colon Y \to Z$ Homotopieäquivalenzen, dh., es existieren Abbildungen P, Q mit $P \circ F \sim \mathrm{id}_X$, $F \circ P \sim \mathrm{id}_Y \sim Q \circ G$ und $G \circ Q \sim \mathrm{id}_Z$. Konstruieren Sie Homotopien

$$(P \circ Q) \circ (G \circ F) \sim \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad (G \circ F) \circ (P \circ Q) \sim \mathrm{id}_Z \ .$$

Insbesondere ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Übungen zu Abschnitt 2.b.

2.74. Übung. Seien X, Y topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1\big(X \times Y, (x, y)\big) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \ .$$

2.75. Übung. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

(1) Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
(2) Jede Abbildung $F\colon S^1 \to X$ lässt sich zu einer Abbildung $\overline{F}\colon D^2 \to X$ mit $\overline{F}|_{\partial D^2} = F$ ausdehnen.
(3) Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ sind für alle $x \in X$ trivial.
(4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten x, $y \in X$ sind homotop.

2.76. Übung. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X genau dann abelsch ist, wenn für alle x, $y \in X$ der Isomorphismus

$$\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) \ , \qquad [\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0]$$

nicht vom Weg γ_0 von x nach y abhängt.

2.77. Übung.
(1) Sei $\circ$ eine Verknüpfung auf einer Menge G und $e \in G$. Dann sind äquivalent:
   (a) $(G, \circ, e)$ ist eine Gruppe.
   (b) Es gibt eine Kategorie $\mathcal{G}$ in der jeder Morphismus invertierbar ist (siehe Bemerkung 2.5) mit $\mathrm{Obj}(\mathcal{G}) = \{*\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$ mit Verknüpfung $\circ$ und $\mathrm{id}_* = e$.
(2) Seien G, H Gruppen, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ Kategorien wie in (1) und sei $F\colon G \to H$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
   (a) F ist ein Gruppenhomomorphismus.
   (b) Es gibt einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ mit $\mathcal{F}* = *$ und $\mathcal{F} = F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(*, *)$.

Übungen zu Abschnitt 2.c.

2.78. Übung. Seien T (Toast), S (Schinken) und A (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die jede der drei Teilmengen T, S und A in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

Hinweis: Zu jedem $v \in S^2$ existiert (mindestens) ein $d = d_v$, so dass die Hyperebene

$$\big\{ x \bigm| \langle x, v \rangle = d \big\}$$

das gesamte Sandwich $T \cup S \cup A$ in zwei gleichgrosse Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen t, s und $a\colon S^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$t(v) = \mathrm{vol}\big\{\, x \in T \;\big|\; \langle x, v\rangle \le d_v \,\big\}$$

und s, a analog nicht von der Wahl von d_v wie oben, sondern nur von v abhängen, und in v stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.

2.79. Übung. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra wie folgt. Sei $P = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n z^0\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie: Für $R > \max\big\{1, \sum_{i=1}^n |a_i|\big\}$ ist der Pfad

$$\gamma\colon S^1 \to S^1\,, \qquad z \mapsto \gamma(z) := \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

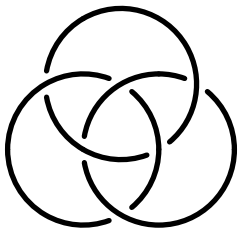
in S^1 homotop zu $\gamma_0 : S^1 \to S^1, \gamma_0(z) = z^n$. Folgern Sie: P hat mindestens eine Nullstelle z_0 mit $|z_0| \le R$.

Übungen zu Abschnitt 2.d.

2.80. Übung. Seien G, H Gruppen. Zeigen Sie:

(1) Das Zentrum $Z(G * H) = \{\, z \in G * H \mid zw = wz \text{ für alle } w \in G * H \,\}$ von $G * H$ ist die triviale Gruppe $\{e\} = \{\emptyset\} \subset G * H$;
(2) alle Torsionselemente (Elemente $w \in G * H$ mit $w^N = e$ für ein $N > 0$) sind von der Form $w = vgv^{-1}$ oder $w = vhv^{-1}$ mit $v \in G * H$ und $g \in G$ bzw. $h \in H$ mit $g^N = e$ bzw. $h^N = e$.

2.81. Übung. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.44 (2), dass die Borromäischen Ringe R_1, R_2, $R_3 \subset \mathbb{R}^3$ sich im umgebenden $\mathbb{R}^3$ nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse $[\gamma] \in \pi_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ eines Weges γ, der R_3 parametrisiert.



2.82. Übung. Es sei

$$X = \bigcup_{n \ge 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos\varphi + 1, \sin\varphi) \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass X überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede $\mathbb{Z}$-wertige Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ genau a_n-mal umläuft.

2.83. Übung. Es sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ schreibe $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$. Dann definiert man die Abelisierung von G als

$$G^{\mathrm{ab}} = G \,/\, \big(\{\, [g, h] \mid g, h \in G \,\}\big)\,.$$

Es sei $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ die Projektion auf den Quotienten. Zeigen Sie:

(1) Die Gruppe G^{ab} ist abelsch (kommutativ).
(2) Sei H eine abelsche Gruppe und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\overline{f}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H$, so dass $f = \overline{f} \circ p$.

2.84. Übung. Seien G, H Gruppen, $p\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$, $q\colon H \to H^{\mathrm{ab}}$ wie in Aufgabe 2.83, und $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

(1) Es gibt genau einen Homomorphismus $f^{\mathrm{ab}}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$, so dass $q \circ f = f^{\mathrm{ab}} \circ p$.
(2) Dadurch wird Abelisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.
(3) Folgern Sie, dass die freien Gruppen F_k und F_l für $k \neq l$ nicht isomorph sind.

2.85. Übung. Es seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, in denen es alle Produkte „$\times$“, Koprodukte „$\sqcup$“ und Pushouts „$\cup$“ gibt, und sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften Morphismen in $\mathcal{D}$, und zwar

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A \times B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B), \\ \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \sqcup B), \\ \mathcal{F}(A) \cup_{\mathcal{F}(C)} \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \cup_C B), \end{aligned}$$

für alle Objekte A, B, C von $\mathcal{C}$ und Morphismen $f\colon C \to A$, $g\colon C \to B$.

Übungen zu Abschnitt 2.e.

2.86. Übung. Seien $p\colon \widetilde{X} \to X$, $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ und $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie:

(1) sei $A \subset X$ eine Unterraum und $\widetilde{A} = p^{-1}A \subset \widetilde{X}$, dann ist $p|_{\widetilde{A}}\colon \widetilde{A} \to A$ eine Überlagerung;
(2) die natürliche Abbildung $p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ ist eine Überlagerung.

2.87. Übung. Sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, wobei X zusammenhängend sei. Zeigen Sie:

(1) die Mengen $p^{-1}(\{x\}) \subset \widetilde{X}$ sind für alle $x \in X$ gleichmächtig;
(2) der Raum $\widetilde{X}$ ist genau dann kompakt, wenn X kompakt ist und $p^{-1}(\{x_0\})$ endlich ist für ein $x_0 \in X$.

2.88. Übung. Wir betrachten den topologischen Raum

$$Y := \left\{ \left(2 + \sin \tfrac{\pi}{t}\right) e^{2\pi i t} \;\middle|\; \varphi \in (0,1] \right\} \cup [1,3] \subset \mathbb{C}\,.$$

(1) Skizzieren Sie Y, und zeigen Sie, dass $\pi_1(Y) = 0$.
(2) Beweisen Sie, dass die Radialprojektion $F\colon Y \to S^1 \subset \mathbb{C}$ dennoch keinen Lift $\widetilde{F}\colon Y \to \mathbb{R}$ zulässt.

Übungen zu Abschnitt 2.f.

2.89. Übung. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung aller Kreise um $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ mit Radius $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ wie in Übung 2.82, und X trage die vom $\mathbb{R}^2$ induzierte Unterraumtopologie. Skizzieren Sie X und zeigen Sie, dass X keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

2.90. Übung. Überlagerungstheorie benötigt keine Trennungseigenschaften. Sei $X = ((-1,1) \times \{1,-1\})/\sim$ der Ihnen wohlbekannte, nicht Hausdorffsche Raum aus Beispiel 1.28, wobei die Äquivalenzrelation „$\sim$“ erzeugt werde von $(t,1) \sim (t,-1)$ für alle $t \neq 0$.

(1) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.
(2) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von X.
(3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X.

KAPITEL 3

Homotopiegruppen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Fundamentalgruppe aus der Topologie und erhalten höhere Homotopiegruppen. Wir lernen einige Berechnungsmethoden kennen, unter anderem die lange exakten Sequenzen für Paare und für Faserungen.

Als Beispiel zeigen wir, dass eine stetige Abbildung der n-dimensionalen Sphäre S^n in sich durch ihren Abbildungsgrad in $\mathbb{Z}$ bis auf Homotopie eindeutig bestimmt wird, mit anderen Worten gilt $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Als Anwendung beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz 0.2. Höhere Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ der Sphären lassen sich geometrisch als sogenannte gerahmte Bordismusgruppen k-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+k}$ interpretieren.

Da wir zur Berechnung der Homotopiegruppen nur wenige Werkzeuge haben, führen wir außerdem stabile Homotopiegruppen ein. Die höheren stabilen Homotopiegruppen der Sphären sind zwar leichter zu bestimmen als die $\pi_k(S^n)$, sind aber dennoch bis zum heutigen Tage noch nicht vollständig bekannt.

3.a. Höhere Homotopiegruppen

Wir betrachten zunächst die Kategorie $\mathcal{T}op_+$ der punktierten topologischen Räume aus Definition 2.17. Da wir in diesem Kapitel fast nur punktierte Räume betrachten, schreiben wir statt (X, x_0) auch manchmal nur kurz X. Eine Homotopie zwischen zwei punktierten Abbildungen $f,\ g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$, siehe Definitionen 2.2 und 2.7. Falls eine solche Homotopie existiert, nennen wir f und g homotop in $\mathcal{T}op_+$ und schreiben wieder kurz $f \sim g$. Wie in Bemerkung 2.3 erhalten wir eine Äquivalenzrelation, die mir der Verkettung von stetigen Abbildungen verträglich ist.

Indem wir als Morphismen zwischen punktierten Räumen nicht einzelne punktierte stetige Abbildungen, sondern punktierte Homotopieklassen betrachten, erhalten wir die punktierte Homotopiekategorie $\mathcal{HT}op_+$, siehe Definition 2.17. Streng genommen sollten wir hier nur gut punktierte Räume zulassen, siehe Definition 3.55. Wir schreiben dafür kurz

$$[X, Y] = [(X, x_0), (Y, y_0)] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op_+}\big((X, x_0), (Y, y_0)\big) \ .$$

In Satz 2.19 haben wir bereits gesehen, dass die Fundamentalgruppe einen kovarianten Funktor $\pi_1\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{G}rp$ definiert. Wir wollen jetzt weitere Funktoren π_n auf $\mathcal{HT}op_+$ definieren. Für $n = 0$ erhalten wir nur punktierte Mengen, für $n \geq 2$ erhalten wir abelsche Gruppen.

Es seien $A \subset X$ topologische Räume, dann bezeichne $X/A \in \mathcal{T}op_+$ den Quotientenraum mit Basispunkt A/A. Er trage die Quotiententopologie aus Definition 1.82, die zugrundeliegende Äquivalenzrelation hat dann also A als eine Äquivalenzklasse, alle Punkte von $X \setminus A$ hingegen bilden je einpunktige Äquivalenzklassen. Falls $A = \emptyset$ und X kompakt ist, definieren wir

$$X/\emptyset = X_+ \cong X \sqcup \{*\} \in \mathcal{T}op_+ \ ,$$

wir fügen also zu X einen zusätzlichen Basispunkt $*$ mit der Topologie der disjunkten Vereinigung (Definition 1.77) hinzu. Übrigens ist der Funktor $\cdot_+\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op_+$ linksadjungiert zum vergesslichen Funktor $\mathcal{T}op_+ \to \mathcal{T}op$, das heißt, für einen unpunktierten Raum X und einen punktierten Raum Y

gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_+}(X_+, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) \ .$$

Es sei $I = [0,1]$ das Einheitsintervall und I^k der k-dimensionale Einheitswürfel, dann bezeichne

$$\partial I^k = I^k \setminus (0,1)^k$$

den (*geometrischen*) *Rand* des Einheitswürfels. Im Falle $k = 0$ ist $\partial(I^0) = \partial \mathrm{pt} = \emptyset$ leer, dabei ist pt ein fester einpunktiger Raum. Nach Übung 3.104 gibt es für alle k einen Homöomorphismus

$$I^k/\partial I^k \cong S^k \ .$$

Den Basispunkt, also die Äquivalenzklasse des Randes ∂I^k, identifizieren wir mit dem Nordpol.

3.1. Definition. Für einen punktierten Raum X und $k \geq 0$ definieren wir die *k-te Homotopiegruppe*

$$\pi_k(X) = \big([I^k/\partial I^k, X], 0\big) \ ,$$

dabei sei $0 \in \pi_k(X)$ die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1, \ldots, t_k) = x_0$. Sei $F\colon X \to Y$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir $\pi_k F\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f] \ .$$

Sei schließlich $k \geq 1$ und $a = [f]$, $b = [g] \in \pi_k(X)$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X)$, wobei

$$(fg)(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} f([2t_1, t_2, \ldots, t_k]) & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g([2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k]) & \text{falls } t_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wie in Bemerkung 2.3 und Satz 2.13 folgt, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $k = 0$ erhalten wir keine Gruppe, da wir keine Verknüpfung definiert haben, so dass wir hier eigentlich nur 0-te *Homotopiemenge* sagen dürften. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz F_*, und für ab schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 2$.

3.2. Bemerkung. Wir können $\pi_k(X)$ auch wie folgt beschreiben.

(1) Für $k = 0$ ist $I^0/\partial I^0 \cong \{0\}/\emptyset \cong S^0$ ein diskreter Raum aus zwei Punkten $*$ (Basispunkt, Nordpol) und 0 (Südpol). Die Menge der punktierten Abbildungen $f\colon S^0 \to X$ entspricht genau den Punkten $x \in X$, wobei $f(*) = x_0$ und $f(0) = x$. Eine Homotopie h zwischen solchen Abbildungen bildet $\{*\} \times I$ konstant auf x_0 ab, und

$$\gamma = h|_{\{0\}\times I}\colon I \to X \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) = h(0,t)$$

beschreibt einen Weg von $f(0)$ nach $g(0)$. Umgekehrt liefert jeder Weg $\gamma\colon I \to X$ von $f(0)$ nach $g(0)$ eine punktierte Homotopie h zwischen f und g mit

$$h(s,t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } s = 0, \text{ und} \\ x_0 & \text{falls } s = *. \end{cases}$$

Somit ist $\pi_0(X)$ gerade die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X, und $0 \in \pi_0(X)$ bezeichnet die Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes x_0.

(2) Für $k = 1$ ist eine punktierte Abbildung $f\colon S^1 \to X$ gerade eine Schleife am Basispunkt x_0, und 0 bezeichnet die konstante Schleife. Die Verkettung entspricht der üblichen Verkettung von Schleifen. Also ist $\pi_1(X)$ genau die Fundamentalgruppe von X aus Abschnitt 2.b.

(3) Da es für alle k einen Homöomorphismus $I^k/\partial I^k \to (S^k, *)$ gibt, gibt es eine natürliche Bijektion

$$\pi_k(X) \cong [S^k, X] \ .$$

3.3. Definition. Es seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien und F, $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariante (kontravariante) Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\tau\colon F \to G$ ordnet jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ einen Morphismus $\tau_X\colon F(X) \to G(X)$ in $\mathcal{D}$ so zu, dass für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{Ff} & F(Y) \\ {\scriptstyle\tau_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{Gf} & G(Y) \end{array} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xleftarrow{Ff} & F(Y) \\ {\scriptstyle\tau_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_Y} \\ G(X) & \xleftarrow{Gf} & G(Y) \end{array}$$

kommutiert. Wenn τ_X für alle X ein Iso-/Mono-/Epimorphismus ist, spricht man entsprechend von einem *natürlichen* Iso-/Mono-/Epimorphismus.

Oftmals wird das Adjektiv „natürlich“ benutzt, ohne die beteiligten Funktoren im einzelnen zu spezifizieren. In der obigen Bemerkung 3.2 (3) erhalten wir beispielsweise einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren π_k und $[S^k, \cdot\,]\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{S}et_+$. Auch die Abbildung ι_X aus Lemma 1.75 in der Konstruktion der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist eine natürliche Transformation zwischen dem Identitätsfunktor und dem Funktor $B\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$.

3.4. Beispiel. Der einpunktige Raum pt ist initiales (kofinales) und terminales (finales) Objekt in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$. Das heißt, zu jedem punktierten Raum (X, x_0) gibt es genau eine punktierte Abbildung $\mathrm{pt} \to X$, nämlich $* \mapsto x_0$ (pt ist *initial*), und genau eine Abbildung $X \to \mathrm{pt}$, nämlich die konstante Abbildung (pt ist *terminal*). Ein initiales und terminales Objekt heißt auch *Nullobjekt.*

Insbesondere sei $X = S^k$. Wegen Bemerkung 3.2 (3) gilt

$$\pi_k(\mathrm{pt}) \cong [S^k, \mathrm{pt}] = \{e\} = 0\ .$$

Für unser nächstes Zwischenergebnis benötigen wir drei weitere Kategorien. Die Kategorie $\mathcal{S}et_+$ der *punktierten Mengen* hat als Objekte Paare (A, a_0) aus einer Menge A mit einem ausgezeichneten Element $a_0 \in A$. Manchmal schreiben wir wieder kurz A für (A, a_0). Wie bei den punktierten Räumen definieren wir

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et_+}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et_+}((A, a_0), (B, b_0)) = \left\{\, f\colon A \to B \;\middle|\; f(a_0) = b_0 \,\right\}\ .$$

Außerdem sei $\mathcal{G}rp$ die Kategorie der Gruppen, mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen, und $\mathcal{A}b$ sei die Kategorie der abelschen Gruppen, wiederum mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Wir erhalten „vergessliche“ Funktoren

$$\mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{G}rp \longrightarrow \mathcal{S}et_+\ .$$

Da jede abelsche Gruppe insbesondere eine Gruppe ist, ist der erste Funktor eine Einbettung. Die Kategorie $\mathcal{A}b$ ist sogar eine *volle Unterkategorie* von $\mathcal{G}rp$, das heißt, für zwei Objekte A, $B \in \mathcal{A}b$ gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(A, B)\ .$$

Der zweite Funktor $\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et_+$ ordnet jeder Gruppe A mit neutralem Element e die punktierte Menge (A, e) zu. Da jeder Gruppenhomomorphismus die neutralen Elemente aufeinander abbildet, ist er auch ein Morphismus punktierter Mengen.

3.5. Satz. *Die Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

(1) *Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{S}et_+$ ein Funktor.*
(2) *Für alle $k \geq 1$ ist $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{G}rp$ ein Funktor.*
(3) *Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{A}b$ ein Funktor.*

Damit sind die wichtigsten elementaren Eigenschaften der π_k bereits zusammengefasst. Insbesondere sind die Homotopiegruppen homotopieinvariant, verträglich mit punktierten Abbildungen, und für $k \geq 2$ sogar abelsche Gruppen.

Beweis. Der Beweis von (1) und (2) ist ähnlich wie bei der Fundamentalgruppe, siehe Satz 2.13 und Satz 2.19.

Wir beginnen mit (1) für $k \geq 0$ beliebig, dabei hilft Bemerkung 3.2 (1), den Fall $k = 0$ besser zu verstehen. Seien $F\colon X \to Y$ und $f_0 \sim f_1\colon I^k/\partial I^k \to X$ punktiert homotope punktierte Abbildungen. Wie in Bemerkung 2.3 (2) sind dann auch $F \circ f_0$ und $F \circ f_1\colon I^k/\partial I^k \to Y$ punktiert homotop, so dass

$$\pi_k F([f_0]) = [F \circ f_0] = [F \circ f_1] = \pi_k F([f_1]) \ .$$

Wir erhalten also in der Tat eine Abbildung

$$\pi_k F\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y) \ .$$

Es gilt offensichtlich $\pi_k \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\pi_k(X)}$. Für $F\colon X \to Y$, $G\colon Y \to Z$ und $f\colon I^k/\partial I^k \to X$ folgt außerdem

$$\pi_k(G \circ F)([f]) = [G \circ F \circ f] = \pi_k G([F \circ f]) = \pi_k G\big(\pi_k F([f])\big) \ ,$$

also gilt auch $\pi_k(G \circ F) = (\pi_k G) \circ (\pi_k F)$, und π_k ist insbesondere ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{T}op_+$ in die Kategorie $\mathcal{S}et_+$ der punktierten Mengen.

Seien jetzt $F_0 \sim F_1\colon X \to Y$ punktiert homotop, und sei $f\colon I^k/\partial I^k \to X$ eine punktierte Abbildung. Dann sind $F_0 \circ f$, $F_1 \circ f$ nach Bemerkung 2.3 (2) punktiert homotop, also gilt

$$\pi_k F_0([f]) = [F_0 \circ f] = [F_1 \circ f] = \pi_k F_1([f]) \ .$$

Somit ist π_k mit Homotopie verträglich und liefert daher eine Abbildung

$$\pi_k\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op_+}(X, Y) = [X, Y] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et_+}\big(\pi_k(X), \pi_k(Y)\big) \ .$$

Also ist π_k sogar ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{HT}op_+$ in die Kategorie $\mathcal{S}et_+$ der punktierten Mengen. Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) sei $k \geq 1$. Punktierte Homotopien H_1, $H_2\colon (I^k/\partial I^k) \times I \to X$ zwischen f_1 und g_1 beziehungsweise f_2 und $g_2\colon I^k/\partial I^k \to X$ lassen sich zusammensetzen zu einer Homotopie H zwischen $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ mit

$$H\big([t_1, \ldots, t_k], s\big) = \begin{cases} H_1\big([2t_1, t_2 \ldots, t_k], s\big) \ , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2\big([2t_1 - 1, t_2 \ldots, t_k], s\big) \ , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Genauso wie in Definition 3.1 behandeln wir also die Variable t_1 so, wie die Variable t in Definition 2.12 und im Beweis von Satz 2.13. Mit dem gleichen Trick lassen sich die Homotopien aus dem Beweis von Satz 2.13 zum Beweis der Gruppenaxiome auf die hiesige Situation übertragen.

Außerdem gilt wie im Beweis von Satz 2.19 für $F\colon X \to Y$ und f, $g\colon I^k/\partial I^k \to X$, dass

$$\pi_k F([f])\pi_k F([g]) = (F \circ f)(F \circ g) = F \circ (fg) = \pi_k F([fg]) \ ,$$

also ist $\pi_k F$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Funktoraxiome

$$\pi_k \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\pi_k(X)} \qquad \text{und} \qquad \pi_k(F \circ G) = \pi_k F \circ \pi_k G$$

folgen bereits aus (1), also ist (2) bewiesen.

Zum Beweis von (3) benötigen wir die Variablen t_1 und t_2. Wir definieren eine punktierte Homotopie H zwischen fg und gf durch

$$H\big([t_1,\dots,t_k],s\big) = \begin{cases} f\big(\big[2t_1, \frac{t_2}{1-2s}, t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[0,\frac14\big]\,,\quad t_1\in\big[0,\frac12\big]\,,\quad t_2\in\big[0,1-2s\big]\,,\\ g\big(\big[2t_1-1, \frac{t_2-2s}{1-2s}, t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[0,\frac14\big]\,,\quad t_1\in\big[\frac12,1\big]\,,\quad t_2\in\big[2s,1\big]\,,\\ f\big(\big[2(t_1-s)+\frac12, 2t_2,\dots\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac14,\frac34\big]\,,\quad t_1\in\big[s-\frac14,s+\frac14\big]\,,\quad t_2\in\big[0,\frac12\big]\,,\\ g\big(\big[2(t_1+s)-\frac32, 2t_2-1,\dots\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac14,\frac34\big]\,,\quad t_1\in\big[\frac34-s,\frac54-s\big]\,,\quad t_2\in\big[\frac12,1\big]\,,\\ f\big(\big[2t_1-1, \frac{t_2}{2s-1}, t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac34,1\big]\,,\quad t_1\in\big[\frac12,1\big]\,,\quad t_2\in\big[0,2s-1\big]\,,\\ g\big(\big[2t_1, \frac{t_2+2s-2}{2s-1}, t_3,\dots,t_k\big]\big) & \text{für } s\in\big[\frac34,1\big]\,,\quad t_1\in\big[0,\frac12\big]\,,\quad t_2\in\big[2-2s,1\big]\,,\\ x_0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Hieraus folgt, dass $\pi_k(X)$ abelsch ist für $k\geq 2$. Nach (2) ist $\pi_k F\colon \pi_k(X)\to\pi_k(Y)$ für alle stetigen Abbildungen $F\colon X\to Y$ ein Homomorphismus, der nach (1) nur von der punktierten Homotopieklasse von F abhängt, also erhalten wir einen Funktor $\pi_k\colon \mathcal{HT}op_+\to\mathcal{A}b$. □

3.6. Bemerkung. Nach Bemerkung 2.5 sind Isomorphismen in der Homotopiekategorie $\mathcal{HT}op_+$ gerade punktierte Homotopieäquivalenzen. Ein topologischer Raum ist nach Definition 2.4 genau dann zusammenziehbar, wenn er zum einpunktigen Raum pt homotopieäquivalent ist. Da ein Funktor isomorphe Objekte auf isomorphe Objekte abbildet, folgt aus Beispiel 3.4, dass

$$X \text{ zusammenziehbar} \qquad\Longrightarrow\qquad \pi_k(X)=0 \text{ für alle } k\geq 0\,.$$

Wir werden später im Satz von Whitehead sehen, dass für eine große Klasse topologischer Räume auch die Umkehrung gilt.

3.7. Proposition. *Für alle $k\geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden von x_0 nach x_1 einen Isomorphismus*

$$\cdot.[\gamma]\colon \pi_k(X,x_0)\to\pi_k(X,x_1) \qquad \textit{mit} \qquad [f].[\gamma]=[f.\gamma]\,,$$

$$\textit{wobei}\qquad f.\gamma = \begin{cases} f\big(2t_1-\frac12,\dots,2t_k-\frac12\big) & \textit{für } \frac14\leq t_1,\dots,t_k\leq\frac34, \textit{ und}\\ \gamma\big(4\max\big\{\big|t_1-\frac12\big|,\dots,\big|t_k-\frac12\big|\big\}-1\big) & \textit{sonst.}\end{cases}$$

Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von rechts auf $\pi_k(X)$ durch Gruppenautomorphismen.

Für $k=1$ erhalten wir innere Automorphismen von $\pi_1(X)$, siehe Bemerkung 2.15.

Beweis. Mit ähnlichen Methoden wie im vorangegangenen Beweis überprüft man die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung $f.\gamma$ ist stetig.
(2) Relativ homotope Pfade γ_0, γ_1 von x_0 nach x_1 und punktiert homotope Abbildungen f_0, $f_1\colon I^k/\partial I^k\to(X,x_0)$ liefern punktiert homotope Abbildungen $f_0.\gamma_0$, $f_1.\gamma_1$. Wenn wir Schleifen an x_0 betrachten, erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X)\times\pi_k(X)\to\pi_k(X)$.
(3) Es gilt $(f.\gamma_0).\gamma_1\sim f.(\gamma_0\gamma_1)$, und für den konstanten Pfad e gilt $f.e\sim f$. Wenn wir Schleifen an x_0 betrachten, ist die obige Abbildung also eine Gruppenwirkung.
(4) Die obige Abbildung ist mit den Gruppenstrukturen auf $\pi_k(X,x_i)$ für $=0$, 1 verträglich.

□

Wir wollen uns jetzt die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{HT}op}(S^n, X) = [S^n_+, X]$ der *freien Homotopieklassen* von Abbildungen von S^n nach X anschauen.

3.8. Folgerung (aus Proposition 3.7). *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $k \geq 1$. Dann steht die Menge $[S^n_+, X]$ der freien Homotopieklassen nicht punktierter Abbildungen $S^n \to X$ in natürlicher Bijektion zur Menge $\pi_k(X)/\!\!/\pi_1(X)$ der Orbiten der $\pi_1(X)$-Wirkung auf $\pi_k(X)$.*

Wir schreiben hier $\pi_k(X)/\!\!/\pi_1(X)$ um deutlich zu machen, dass es sich nicht um den Quotienten nach einer Untergruppe handelt.

Beweis. Fixiere $x_0 \in X$. Es sei $f\colon S^k \to X$ gegeben, dann wählen wir einen Weg γ in X von $f(e_1)$ nach x_0 und erhalten nach Proposition 3.7 ein Element $[f.\gamma] \in \pi_k(X, x_0)$. Für einen weiteren Weg γ' gilt dann

$$[f.\gamma'] = [f.\gamma].[\bar{\gamma}\gamma'] \,,$$

der Orbit von $[\gamma.f]$ unter der $\pi_1(X, x_0)$-Wirkung hängt also nicht von der Wahl von γ ab.

Sei h eine freie Homotopie zwischen f und $g\colon S^n \to X$, dann setzen wir $\gamma(t) = h(e_1, t)$. Mit Hilfe von h lässt sich eine punktierte Homotopie zwischen $f.\gamma$ und g konstruieren, so dass der obige Orbit auch nicht von der freien Homotopieklassen von f abhängt. Also ist die obige Zuordnung wohldefiniert. Sie ist auch natürlich im Sinne von Definition 3.3, denn sei $F\colon X \to Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [S^n_+, X] & \longrightarrow & \pi_k(X)/\!\!/\pi_1(X) \\ {\scriptstyle F\circ}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F_*} \\ [S^n_+, Y] & \longrightarrow & \pi_k(Y)/\!\!/\pi_1(Y) \,. \end{array}$$

Surjektivität ist klar, da wir jede punktierte Abbildung als nicht punktierte Abbildung auffassen können. Zur Injektivität bleibt zu zeigen, dass f, $g\colon S^k \to X$ frei homotop sind, wenn $[f.\gamma] = [g.\gamma']$ für geeignete Wege γ, γ' gilt. Aber das folgt, da $f.\gamma$ stets frei homotop zu f ist. □

3.9. Definition. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $k \geq 1$. Wir definieren den *k-ten Schleifenraum* von (X, x_0) durch

$$\Omega^k(X) = \Omega^k(X, x_0) = \left\{ f\colon I^k \to X \;\middle|\; \partial I^k \subset f^{-1}(x_0) \right\} \subset C(I^k, X) \,,$$

wobei $C(I^k, X)$ die kompakt-offene und $\Omega^k(X, x_0)$ die Unterraumtopologie trage. Nach Satz 1.83 über die Quotiententopologie gilt

$$\Omega^k(X) = C\big(I^k/\partial I^k, X\big) \cong C\big(S^k, X\big) \,,$$

wobei wir für die letzte Darstellung einen festen Basispunkt in S^k wählen müssen. Als Basispunkt von $\Omega^k(X, x_0)$ fixieren wir die konstante Abbildung auf x_0.

3.10. Bemerkung. Für k, $\ell \geq 0$ gilt $\pi_k(\Omega^\ell(X)) \cong \pi_{k+\ell}(X)$ (Übung 3.106).

3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares

Ein *punktiertes Paar* (X, A) besteht aus einem punktierten topologischen Raum X mit Basispunkt x_0 und einer Teilmenge $A \subset X$, so dass $x_0 \in A$. Eine *Abbildung* zwischen punktierten Paaren (X, A), (Y, B) ist eine punktierte Abbildung $f\colon X \to Y$, so dass $f(A) \subset B$. Die punktierten Paare mit ihren Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{P}air_+ \,.$$

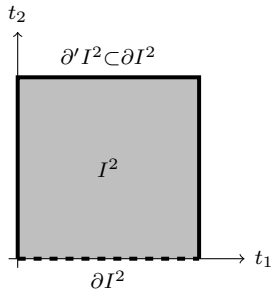


ABBILDUNG 3.1. Das Tripel $\partial' I^2 \subset \partial I^2 \subset I^2$

Zwei Abbildungen $f,\ g\colon (X,A) \to (Y,B)$ punktierter Paare heißen (*als Abbildungen punktierter Paare*) *homotop,* wenn es eine punktierte Homotopie $h\colon X \times I \to Y$ zwischen ihnen gibt, so dass

$$A \times I \subset h^{-1}(B)\ . \tag{3.1}$$

Insbesondere fordern wir nicht, dass h eine Homotopie relativ zu A sei. Die punktierten Paare mit Homotopieklassen von Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{HP}air_+\ .$$

Für $k \geq 1$ bezeichne

$$\partial' I^k = \partial I^k \setminus \big((0,1)^{k-1} \times \{0\}\big)$$

den Rand von I^k ohne eine (offene) Seite, siehe Abbildung 3.1. Da wir im Folgenden manche Abbildungen auf $(0,1)^{k-1} \times \{0\}$ nicht festlegen, nennen wir $I^{k-1} \times \{0\}$ die „freie Seite“ von I^k.

3.11. DEFINITION. Für ein punktiertes Paar (X,A) und $k \geq 1$ definieren wir

$$\pi_k(X,A) = \big(\big[\big(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k\big), (X,A)\big], 0\big)\ ,$$

dabei bezeichne wieder 0 die konstante Abbildung auf $x_0 \in A$. Seien $a = [f]$, $b = [g] \in \pi_k(X,A)$ und $k \geq 2$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X,A)$ wie in Definition 3.1. Außerdem bezeichnen wir die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1,\dots,t_k) = x_0$ mit $0 = [c] \in \pi_k(X,A)$. Sei schließlich $F\colon (X,A) \to (Y,B)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann definieren wir $\pi_k F\colon \pi_k(X,A) \to \pi_k(Y,B)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f]\ .$$

Für $k = 0$ setzen wir

$$\pi_0(X,A) = \pi_0(X)/\pi_0(A)\ ,$$

wobei der Quotient als Quotient punktierter Mengen zu verstehen ist. Für eine Abbildung F punktierter Paare sei $\pi_0 F\colon \pi_0(X,A) \to \pi_0(Y,B)$ die von $\pi_0 F\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ induzierte Abbildung.

Man beachte, dass wir aufgrund der Sonderrolle der Koordinate t_k in der Definition von $\partial' I^k$ eine gesonderte Definition für π_0 benötigen und im Falle $k = 1$ keine Gruppenstruktur erhalten. Wie in Bemerkung 2.3 folgt wieder, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz F_*, und für ab schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 3$.

3.12. BEMERKUNG. Wenn in der obigen Definition $A = \{x_0\}$ gilt, dann wird $\partial I^k/\partial' I^k$ auf x_0 abgebildet. Nach der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie in Satz 1.83 entprechen solche Abbildungen $f\colon I^k/\partial' I^k \to (X,x_0)$ genau den Abbildungen aus Definition 3.1. Es folgt

$$\pi_k(X,\{x_0\},x_0) = \pi_k(X,x_0)$$

sogar für alle $k \geq 0$, aber für $k = 1$ fehlt der linken Seite die Gruppenstruktur.

3.13. Bemerkung. Nach Übung 3.104 gibt es für alle $k \geq 1$ einen Homöomorphismus

$$\big(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k\big) \cong (D^k, S^{k-1}) \; .$$

Dabei liegt der Basispunkt auf dem Rand S^{k-1} der Einheitskreissscheibe. Wir erhalten also für $k \geq 1$ natürliche Bijektionen

$$\pi_k(X, A, x_0) = [(D^k, S^{k-1}, *), (X, A, x_0)] \; .$$

3.14. Proposition. *Die relativen Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

(1) *Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k \colon \mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{S}et_+$ ein Funktor.*
(2) *Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k \colon \mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{G}rp$ ein Funktor.*
(3) *Für alle $k \geq 3$ ist $\pi_k \colon \mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{A}b$ ein Funktor.*

Beweis. Völlig analog zum Beweis von Satz 3.5, wobei wir aber, da die Variable t_k eine Sonderrolle spielt, $k \geq 2$ in (2) und $k \geq 3$ in (3) fordern müssen. □

3.15. Proposition. *Für alle $k \geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden in A von x_0 nach x_1 einen Isomorphismus*

$$\cdot.[\gamma] \colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(X, A, x_1) \qquad \textit{mit} \qquad [f].[\gamma] = [f.\gamma] \; ,$$

$$\textit{wobei} \quad f.\gamma = \begin{cases} f\big(2t_2 - \frac{1}{2} \ldots, 2t_{k-1} - \frac{1}{2}, 2t_k\big) & \textit{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \ldots, t_{k-1} \leq \frac{3}{4} \; , \;\; t_k \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma\big(4 \max\big\{\big|t_1 - \frac{1}{2}\big|, \ldots, \big|t_{k-1} - \frac{1}{2}\big|, \big|\frac{t_k}{2}\big|\big\} - 1\big) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(A)$ von rechts auf allen $\pi_k(X, A)$, und für $k \geq 2$ durch Gruppenautomorphismen.

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 3.7. □

3.16. Bemerkung. Für $k \geq 1$, $\ell \geq 0$ gilt (Übung 3.107, siehe Bemerkung 3.10)

$$\pi_k\big(\Omega^\ell(X), \Omega^\ell(A)\big) \cong \pi_{k+\ell}(X, A) \; .$$

Für $k = 0$ ist die Behauptung falsch, wie man am Beispiel (D^1, S^0) mit $\ell = 1$ sehen kann.

Wir definieren exakte Sequenzen hier in $\mathcal{S}et_+$. Sei $f \colon (A, a_0) \to (B, b_0)$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir ihren *Kern* als

$$\ker f = f^{-1}\{b_0\} \subset A \; .$$

Außerdem sei $0 = \mathrm{pt} = \{*\}$ eine feste einpunktige Menge. Mit dieser Notation sieht alles genauso aus wie in der Kategorie der Gruppen oder R-Moduln, die wir später noch betrachten werden. Allerdings folgt in $\mathcal{S}et_+$ aus $\ker f = \{a_0\} \cong \{*\}$ noch nicht, dass f injektiv ist.

3.17. Definition. Eine *Sequenz* in $\mathcal{S}et_+$ ist eine Familie $(f_i \colon M_i \to M_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ punktierter Abbildungen zwischen punktierten Mengen. Eine *Sequenzabbildung* von $(f_i \colon M_i \to M_{i-1})$ nach $(g_i \colon N_i \to N_{i-1})$ vom Grad $d \in \mathbb{Z}$ ist eine Familie punktierter Abbildungen $(k_i \colon M_i \to N_{i+d})_{i \in \mathbb{Z}}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longleftarrow & M_{i-1} & \xleftarrow{f_i} & M_i & \xleftarrow{f_{i+1}} & M_{i+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle k_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle k_i} & & \downarrow{\scriptstyle k_{i+1}} & & \\ \cdots & \longleftarrow & N_{i+d-1} & \xleftarrow{g_{i+d}} & N_{i+d} & \xleftarrow{g_{i+d+1}} & N_{i+d+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

kommutiert, das heißt, es gilt $k_{i-1} \circ f_i = g_{i+d} \circ k_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Eine Sequenz $(f_i \colon M_i \to M_{i-1})$ heißt *exakt an der Stelle* M_i, wenn $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i+1} \subset M_i$ gilt. Sie heißt (*lange*) *exakte Sequenz,* wenn sie an allen Stellen exakt ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow A' \longleftarrow A \longleftarrow A'' \longleftarrow 0 \; .$$

Völlig analog definieren wir Sequenzen und exakte Sequenzen in den Kategorien $\mathcal{G}rp$ und $\mathcal{A}b$.

Kurze exakte Sequenzen denken wir uns nach links und rechts fortgesetzt durch $0 = \{*\}$ beziehungsweise durch die einelementige Gruppe. Wir werden Diagramme zu Sequenzen teils wie oben mit Pfeilen von rechts nach links darsellen, teils aber auch die Richtung der Pfeile umdrehen:

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

3.18. Bemerkung. Die *Nullabbildung* bildet alle Elemente aus dem Definitionsbereich auf den Basispunkt ab. Wenn in einer exakten Sequenz von Gruppen eine der Abbildungen die Nullabbildung ist, dann erlaubt es Rückschlüsse über die benachbarten Gruppen und Abbildungen, siehe Übung 3.109. Das passiert insbesondere dann, wenn eine der Gruppen trivial ist.

Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar. Dann haben wir natürliche Inklusionen in $\mathcal{T}op_+$ beziehungsweise $\mathcal{P}air_+$,

$$i\colon (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \qquad \text{und} \qquad j\colon (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, \{x_0\}) \ .$$

3.19. Satz (Homotopiesequenz eines Paares). *Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar. Für $k \geq 1$ und $[f] \in \pi_k(X, A, x_0)$ mit $f\colon I^k/\partial' I^k \to X$ definiere $\partial[f] = [\partial f] \in \pi_{k-1}(A, x_0)$ durch*

$$\partial f = f|_{(I^{k-1}\times\{0\})/(\partial I^{k-1}\times\{0\})}\colon I^{k-1}/\partial I^{k-1} \to A \ .$$

Dann erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \{*\} \longleftarrow \pi_0(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_0(X) \xleftarrow{i_*} \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_1(X) \xleftarrow{i_*} \pi_1(A) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

punktierter Mengen, von rechts bis einschließlich $\pi_1(X)$ sogar von Gruppen. Die Gruppe $\pi_1(A, x_0)$ wirkt von rechts durch Sequenzabbildungen, wobei sie auf $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$ und $\pi_0(X, A)$ trivial wirke. Diese Wirkung auf der punktierten Menge $\pi_1(X, A)$ lässt sich so auf die Gruppe $\pi_1(X)$ ausdehnen, dass $[c].[\gamma] = j_*[\gamma]$ für die konstante Kurve c und alle $[\gamma] \in \pi_1(X)$ gilt, und eine natürliche Bijektion $\pi_1(X/A)/\pi_1(X) \cong \operatorname{im}\partial \subset \pi_0(A)$ existiert.

Die Abbildung ∂ nennt man auch den *Verbindungshomomorphismus*. Die Sequenz setzt sich durch $\{*\}$ unendlich weit nach links fort. Eine Verallgemeinerung für Tripel steht in Übung 3.112.

Beweis. Zunächst einmal ist die Einschränkung ∂f wie gefordert eine punktierte Abbildung. Außerdem ist ∂ mit punktierten Homotopien von Abbildungen von Paaren verträglich und respektiert die Gruppenstruktur, falls $k \geq 2$. Also ist die Abbildung $\partial\colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}(A, x_0)$ wohldefiniert.

Sei $F\colon (X, A, x_0) \to (Y, A, y_0)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann induziert F eine Sequenzabbildung von der Sequenz des Paares (X, A, x_0) in die des Paares (Y, A, y_0). Somit ist die Sequenz natürlich, das heißt, i_*, j_* und ∂ sind natürliche Transformationen zwischen Funktoren $\mathcal{HP}air_+ \to \mathcal{S}et_+$ im Sinne von Definition 3.3.

Schließlich sind die Gruppenwirkungen aus den Propositionen 3.7 und 3.15 ebenfalls mit i_*, j_* und δ verträglich; dabei wirkt $g \in \pi_1(A)$ als i_*g auf $\pi_k(X)$. Die Wirkung von $\pi_1(X)$ auf $\pi_1(X, A)$ behandeln wir in Übung 3.108

Zur Exaktheit sind sechs Inklusionen zu beweisen. Wir überprüfen nur zwei davon, der Rest ist Übung 3.110. Zu einer Abbildung $f\colon I^k/\partial I^k \to X$ wie in Definition 3.1 oder $f\colon I^k/\partial' I^k \to X$ wie in Definition 3.11 bezeichne dabei $\bar{f}$ die entsprechende Abbildung auf I^k. Wenn wir umgekehrt nur $\bar{f}$ angeben, so lässt sich mit der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie aus Satz 1.83 (2) die Stetigkeit der zugehörigen Abbildung f überprüfen. Im Folgenden sei stets $k \geq 1$.

„$\operatorname{im} j_* \subset \ker \partial$“. Gegeben sei $f\colon I^k/\partial I^k \to X$. Da $I^{k-1} \times \{0\} \subset \partial I^k$, ist $\partial(j \circ \bar{f}) = f|_{I^{k-1}\times\{0\}}$ die konstante Abbildung auf den Basispunkt, also $\partial j_*[f] = 0 \in \pi_{k-1}(A)$.

„$\ker\partial \subset \operatorname{im} j_*$“. Es sei $f\colon I^k/\partial' I^k \to X$ gegeben, und es sei $h\colon (I^{k-1}/\partial I^{k-1}) \times I \to A$ eine Nullhomotopie von ∂f in A. Betrachte $\bar g\colon I^k \to X$ mit

$$\bar g(t_1,\dots,t_k) = \begin{cases} \bar h(t_1,\dots,t_{k-1},1-2t_k) & \text{für } t_k \le \frac12, \text{ und} \\ \bar f(t_1,\dots,t_{k-1},2t_k-1) & \text{für } t_k \ge \frac12. \end{cases}$$

Betrachte die Homotopie $\bar k\colon I^k \times I \to X$ zwischen $j\circ\bar g$ und $\bar f$ mit

$$\bar k(t_1,\dots,t_k,s) = \bar g\Big(t_1,\dots,t_{k-1},\frac{s+(2-s)t_k}{2}\Big)\,.$$

Da $\bar g$ ganz $\partial' I^k$ auf x_0 abbildet, bildet sie $\partial' I^k \times I$ auf x_0 ab. Da h Werte in A annimmt, erhalten wir

$$\bar k(t_1,\dots,t_{k-1},0,s) = \bar g\Big(t_1,\dots,t_{k-1},\frac{s}{2}\Big) = \bar h(t_1,\dots,t_{k-1},1-s) \in A\,.$$

Somit $j_*[g] = [f] \in \pi_k(X,A)$. □

Das folgende Lemma ist sehr hilfreich im Umgang mit exakten Sequenzen.

3.20. Lemma (Vierer- und Fünferlemma). *Gegeben sei eine Sequenzabbildung*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longleftarrow & B & \longleftarrow & C & \longleftarrow & D & \longleftarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ A' & \longleftarrow & B' & \longleftarrow & C' & \longleftarrow & D' & \longleftarrow & E' \end{array}$$

in $\mathcal{S}et_+$. Beide Zeilen seien exakt. Außerdem seien C, C' Gruppen und c ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

(1) *seien b, d surjektiv und $\ker a = \{a_0\}$, und die Abbildung $C' \to B'$ lasse sich so zu einer Gruppenwirkung fortsetzen, dass $C' \ni x' \mapsto b'_0 \cdot x'$. Dann ist c surjektiv;*
(2) *seien d injektiv, e surjektiv und $\ker b = \{b_0\}$. Dann ist c injektiv;*
(3) *unter den Voraussetzungen aus (1) und (2) ist c bijektiv.*

Die Bedingung an die Abbildung $C' \to B'$ in (1) ist automatisch erfüllt, wenn es sich um einen Gruppenhomorphismus handelt.

Beweis. Man beweist (1) und (2) durch Diagrammjagd. Es folgt (3). □

In der Topologie hat man es häufig mit exakten Sequenzen von Gruppen (oder Moduln oder Vektorräumen) zu tun, bei denen sich Terme von drei verschiedenen Typen abwechseln. Eine Sequenzabbildung zwischen Ihnen hat dann die Form

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{-1} & \xleftarrow{\partial} & A_0 & \longleftarrow & B_0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{\partial} & A_1 & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle c_{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle a_0} & & \downarrow{\scriptstyle b_0} & & \downarrow{\scriptstyle c_0} & & \downarrow{\scriptstyle a_1} & & \\ \cdots & \longleftarrow & C'_{-1} & \xleftarrow{\partial} & A'_0 & \longleftarrow & B'_0 & \longleftarrow & C'_0 & \xleftarrow{\partial} & A'_1 & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Wenn man weiß, dass alle $a_\bullet$ und alle $b_\bullet$ Isomorphismen sind, sind nach dem Fünferlemma auch alle $c_\bullet$ Isomorphismen. Analog schließt man, wenn alle $a_\bullet$ und alle $c_\bullet$, oder alle $b_\bullet$ und alle $c_\bullet$ Isomorphismen sind. Für diese Anwendung reicht die einfachst mögliche Formulierung der Aussage (3) aus.

Es gibt aber auch etwas kompliziertere Situationen. Beispielsweise könnte es sein, dass alle a_i und alle c_i mit $i < n$ Isomorphismen sind, während a_n und c_n nur noch surjektiv sind; solche Abbildungen betrachten wir im nächsten Abschnitt. In diesem Fall dürfen wir schließen, dass auch die b_i für $i < n$ Isomorphismen sind, und c_n immerhin surjektiv ist. Später betrachtet man auch

Fälle, in denen a_i und c_i für alle $i > n$ Isomorphismen sind, während a_n und c_n nur noch injektiv sind. Dann gilt das entsprechende auch für die b_i.

Zu guter Letzt gibt es in der Topologie auch exakte Sequenzen, in denen alle Objekte mit Indizes $i > 0$ Gruppen sind, alle Objekte mit Index 0 jedoch nur noch punktierte Mengen, und die bei 0 abbrechen, das heißt, es gibt keine Objekte mit negativen Indizes. Als Beispiele betrachte die Sequenzen aus Satz 3.19 mit $A_1 = \pi_1(X)$ und aus Satz 3.25 mit $A_1 = \pi_1(B)$. In solchen Sequenzen gibt es anstelle eines Gruppenhomomorphismus oft eine Gruppenwirkung der „letzten“ Gruppe A'_1 auf der punktierten Menge C'_0, so dass $\partial a = *.a$ für den Basispunkt $* \in C'_0$ und alle $a \in A'_1$ gilt (Gruppenhomomorphismen haben — wie gesagt — immer diese Eigenschaft). Lemma 3.20 ist so formuliert, dass wir für jeden „senkrechten“ Gruppenhomomorphismus unter geeigneten Annahmen an die benachbarten senkrechten Pfeile zeigen können, dass er ein Gruppenisomorphismus ist, insbesondere sogar noch für a_1. Als Beispiel wenden wir das Fünferlemma auf die Sequenz aus Satz 3.19 an.

3.21. Folgerung. *Es sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Wenn f und $f|_A$ für alle $k \geq 0$ bijektive Abbildungen $\pi_k(X, A) \to \pi_k(Y, B)$ beziehungsweise $\pi_k(A) \to \pi_k(B)$ induzieren, dann ist $f_*\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ ebenfalls bijektiv für alle $k \geq 1$.* □

Analoge Folgerungen gelten für $(f_A)_*\colon \pi_k(A) \to \pi_k(B)$ für $k \geq 1$ sowie für $f_*\colon \pi_k(X, A) \to \pi_k(Y, B)$ für $k \geq 2$, falls jeweils alle anderen „vertikalen“ Abbildungen bijektiv sind.

3.c. Faserungen

Die lange exakte Sequenz aus Satz 3.19 ist in der vorliegenden Form noch nicht wirklich hilfreich, um Homotopiegruppen zu bestimmen. Hier formulieren wir sie um in eine lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen. Später werden wir noch eine (nicht so lange, aber noch wichtigere) exakte Sequenz für Kofaserungen kennenlernen.

3.22. Definition. Eine Abbildung $p\colon E \to B$ hat die *Homotopieliftungseigenschaft* bezüglich eines Raumes X und Abbildungen $\tilde{f}\colon X \to E$ und $h\colon X \times I \to B$ mit

$$h(\,\cdot\,, 0) = p \circ \tilde{f}\colon X \to B\ ,$$

wenn eine Abbildung $\tilde{h}\colon X \times I \to E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{h} = h \qquad \text{und} \qquad \tilde{h}(\,\cdot\,, 0) = \tilde{f}\colon X \to E\ .$$

Sie hat die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich eines Raumes X, wenn Obiges für alle Abbildungen $\tilde{f}\colon X \to E$ und $h\colon X \times I \to B$ mit $h(\,\cdot\,, 0) = p \circ \tilde{f}$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ {\scriptstyle \times\{0\}}\big\downarrow & \overset{\tilde{h}}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Die Abbildung p heißt *Serre-Faserung,* wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich I^k für alle $k \geq 0$ besitzt. Sie heißt *Hurewicz-Faserung,* wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft sogar bezüglich aller topologischen Räume X besitzt.

Wenn die Abbildung p überdies punktiert ist, nennen wir sie eine punktierte Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserung, und $p^{-1}(b_0) \subset E$ ihre *Faser.*

3.23. Bemerkung. Nach Übung 3.113 sind die Paare $(I^k, I^{k-1} \times \{0\})$ und $(I^k, \partial' I^k)$ homöomorph. Also ist eine Abbildung $p\colon E \to B$ genau dann eine Serre-Faserung, wenn für alle $k \geq 1$ und alle Abbildungen $f\colon I^k \to B$ und $\tilde{g}\colon \partial' I^k \to E$ mit

$$f|_{\partial' I^k} = p \circ \tilde{g}\colon \partial' I^k \to B$$

eine Abbildung $\tilde{f}\colon I^k \to E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{f} = f \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}|_{\partial' I^k} = \tilde{g}\ .$$

Das gleiche geht selbstverständlich auch, wenn man eine andere offene Seite aus ∂I^k entfernt.

$$\begin{array}{ccc} \partial' I^k & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\ \big\downarrow & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \big\downarrow p \\ I^k & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

3.24. Proposition. *Es sei $p\colon E \to B$ eine punktierte Serre-Faserung mit Faser F. Dann induziert p für alle $k > 0$ einen Isomorphismus*

$$p_*\colon \pi_k(E, F) \to \pi_k(B, \{b_0\}) \cong \pi_k(B)\ .$$

Für $k = 0$ ist diese Aussage falsch: die Abbildung $p_*\pi_0(E, F) = \pi_0(E)/\pi_0(F) \to \pi_0(B)$ muss weder injektiv noch surjektiv sein. Allerdings hat sie trivialen Kern, siehe Satz 3.25.

Beweis. Zur Surjektivität betrachte eine punktierte Abbildung $f\colon I^k/\partial I^k \to (B, b_0)$, aufgefasst als Abbildung $(I^k, \partial I^k) \to (B, \{b_0\})$. Die Abbildung $\tilde{g}\colon \partial' I^k \to \{e_0\} \subset E$ sei konstant. Dann liefert Bemerkung 3.23, angewandt auf $\bar{f}\colon I^k \to B$, das gesuchte Urbild $\tilde{\bar{f}}$, denn $\tilde{f}|_{\partial' I^k} = \tilde{g}$ ist die konstante Abbildung, und auf der „freien Seite“ $I^{k-1} \times \{0\}$ nimmt $\tilde{f}$ Werte in $F = p^{-1}(e_0)$ an.

Zur Injektivität seien $\tilde{f}_0,\ \tilde{f}_1\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (E, F)$ mit $p_*[\tilde{f}_0] = p_*[\tilde{f}_1]$ gegeben. Dann bilden $p \circ \tilde{f}_i$ den gesamten Rand nach b_0 ab. Es sei $h\colon (I^k/\partial I^k) \times I \to B$ eine punktierte Homotopie zwischen $p \circ \tilde{f}_0$ und $p \circ \tilde{f}_1$ in B. Definiere $\tilde{g}\colon \partial I^{k+1} \setminus \big((0,1)^{k-1} \times \{0\} \times (0,1)\big) \to E$ durch

$$\tilde{g}(t_1, \ldots, t_{k+1}) = \begin{cases} \tilde{\bar{f}}_i(t_1, \ldots, t_k) & \text{falls } t_{k+1} = i \in \{0,1\}, \text{ und} \\ e_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, siehe Abbildung 3.2. Nach Bemerkung 3.23, angewandt auf $\bar{h}$, existiert eine Abbildung $\tilde{\bar{h}}$, die $\tilde{g}$ fortsetzt, und auf der „freien Seite“ $t_k = 0$ Werte in F annimmt, da $\bar{h}$ dort auf b_0 abbildet. Also ist $\tilde{h}$ eine punktierte Homotopie von Paaren zwischen $\tilde{f}_0$ und $\tilde{f}_1$, was zu zeigen war. □

Es ist nicht ungewöhnlich, dass Injektivität ähnlich wie Surjektivität bewiesen wird: „Injektivität bis auf Homotopie ist Surjektivität für Homotopien“.

3.25. Satz (Homotopiesequenz für Serre-Faserungen). *Es sei $p\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine punktierte Serre-Faserung, und es sei $i\colon F = p^{-1}(b_0) \to E$ die Inklusion der Faser. Dann existiert für alle $k \geq 1$ ein Verbindungshomomorphismus $\partial\colon \pi_k(B) \to \pi_{k-1}(F)$, so dass die Sequenz*

$$\pi_0(B) \xleftarrow{p_*} \pi_0(E) \xleftarrow{i_*} \pi_0(F) \xleftarrow{\partial} \pi_1(B) \xleftarrow{p_*} \pi_1(E) \longleftarrow \ldots$$

exakt und natürlich ist. Es handelt sich bis einschließlich $\pi_1(B)$ um eine Sequenz von Gruppen, und es gibt eine Rechtswirkung von $\pi_1(B)$ auf $\pi_0(F)$ mit $\partial[\gamma] = [e_0].[\gamma]$, so dass eine natürliche Bijektion $\pi_0(F)/\pi_1(B) \cong \operatorname{im} i_* \subset \pi_0(E)$ existiert.

Im Gegensatz zur Homotopiesequenz 3.19 eines Paares bricht diese Sequenz bei $\pi_0(B)$ ab.

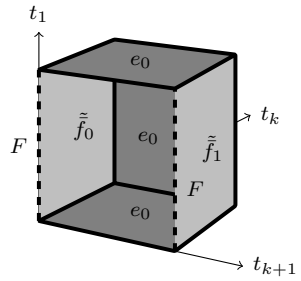


ABBILDUNG 3.2. Der Definitionsbereich von $\tilde{g}$

BEWEIS. Mit Proposition 3.24 erhalten wir eine Sequenzabbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F,e_0) & \xleftarrow{\partial'} & \pi_k(E,F,e_0) & \xleftarrow{j_*} & \pi_k(E,e_0) & \longleftarrow & \dots \\ & & \| & & p_*\downarrow\cong & & \| & & \\ \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F,e_0) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B,b_0) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E,e_0) & \longleftarrow & \dots\,, \end{array}$$

hierbei sei ∂' der Verbindungshomomorphismus aus Satz 3.19. In der Tat kommutiert das rechte Quadrat, da $p \circ j = \mathrm{id}_{(B,\{b_0\})} \circ p$. Das linke Quadrat nehmen wir als Definition für den Verbindungshomomorphismus $\partial = \partial' \circ (p_*)^{-1}$. Da die obere Sequenz exakt ist, ist es die untere auch.

Da nicht notwendigerweise $\pi_0(E,F) \cong \pi_0(B)$ gilt, bleibt Exaktheit bei $\pi_0(E,e_0)$ zu prüfen. Sei zunächst $f\colon S^0 \to (F,e_0)$ gegeben, dann bildet $p\circ i\circ f$ konstant auf b_0 ab, also gilt $\operatorname{im} i_* \subset \ker p_*$. Sei umgekehrt $f\colon S^0 \to (E,e_0)$ mit $[f] \in \ker p_*$ gegeben, dann existiert eine punktierte Nullhomotopie von $p \circ f$ in B, also ein Pfad von $p(f(0))$ nach b_0. Mit der Homotopieliftungseigenschaft erhalten wir einen Pfad von $f(0)$ nach F, also eine punktierte Homotopie von f zu einem Element in $\operatorname{im} i_*$.

Zur Natürlichkeit betrachte ein kommutatives Diagramm punktierter Serre-Faserungen

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & D \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow{f} & C\,. \end{array}$$

Seien $F = p^{-1}(b_0)$ und $G = q^{-1}(c_0)$ die Fasern, dann bildet $g|_F$ die Faser F auf G ab. Betrachte jetzt die zugehörigen langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(E) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(F) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E) & \longleftarrow & \dots \\ & & {\scriptstyle g_*}\downarrow & & {\scriptstyle g|_{F*}}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(D) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(G) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(C) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(D) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Die äußeren Quadrate kommutieren, da die entsprechenden punktierten Abbildungen ebenfalls kommutieren. Nach Definition des Verbindungshomomorphismus kommutiert das innere Quadrat, da die Sequenz aus Satz 3.19 natürlich ist. Die Konstruktion der Wirkung von $\pi_1(B)$ auf $\pi_0(F)$ behandeln wir in Übung 3.116. □

3.26. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.48). *Es sei $p\colon (\widetilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist die Abbildung*

$$p_* = \pi_k p\colon \pi_k(\widetilde{X},\tilde{x}_0) \to \pi_k(X,x_0)$$

ein Isomorphismus für alle $k \geq 2$. Außerdem haben wir eine exakte Sequenz

$$\pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(\widetilde{X}) \longleftarrow \pi_0(p^{-1}(x_0)) \longleftarrow \pi_1(X) \xleftarrow{\pi_1 p} \pi_1(\widetilde{X}) \longleftarrow 0 \ .$$

Die Injektivität von $\pi_1 p$ kennen wir bereits aus Satz 2.46.

BEWEIS. Nach dem Homotopieliftungssatz 2.25 sind alle Überlagerungen Hurewicz-Faserungen, also erst recht Serre-Faserungen. Dabei ist die Faser $F = p^{-1}(x_0)$ einer Überlagerung diskret, und S^k ist zusammenhängend für $k \geq 1$, folglich sind alle stetigen punktierten Abbildungen $S^k \to F$ konstant. Es folgt $\pi_k(F) = 0$ für alle $k \geq 1$. Mit Satz 3.25 und Bemerkung 3.18 folgen die Behauptungen. □

3.27. BEISPIEL. Die universelle Überlagerung von S^1 ist $\mathbb{R}$ nach Beispiel 2.24, also zusammenziehbar. Wegen den Bemerkungen 3.2 (1) und 3.6, Satz 2.26 und Folgerung 3.26 gilt daher

$$\pi_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.28. BEISPIEL. Es sei $E = B \times F$ ein Produkt punktierter Räume und $p\colon E \to B$ die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist p nach Übung 3.114 eine Hurewicz-, also auch eine Serre-Faserung. Es gilt $\pi_k(E) = \pi_k(B) \times \pi_k(F)$, siehe Übung 3.105. Also hat die Homotopiesequenz die Form

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(F) \xleftarrow{\partial} \pi_k(B) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_k(B) \times \pi_k(F)}_{\cong \pi_k(E)} \xleftarrow{i_*} \pi_k(F) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(B) \longleftarrow \dots$$

Die Abbildung p_* ist die Projektion auf $\pi_k(B)$, und $i_*(a) = (0, a) \in \pi_k(B) \times \pi_k(F)$ für alle $a \in \pi_k(F)$. Die Sequenz ist offensichtlich bei $\pi_k(E)$ exakt. Da p_* surjektiv und i_* injektiv ist, folgt aus der Exaktheit an den anderen Stellen, dass

$$\ker \partial = \operatorname{im} p_* = \pi_k(B) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{im} \partial = \ker i_* = 0 \ ,$$

also ist der Verbindungshomomorphismus $\partial = 0$ für alle k.

3.29. BEMERKUNG. Allgemeiner sei $p\colon E \to B$ eine Faserung. Unter einem *Schnitt* von p verstehen wir ein Rechtsinverses von p, also eine Abbildung $s\colon B \to E$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Mit anderen Worten ist $\operatorname{im} B \subset E$ in diesem Fall ein Retrakt von E. Im obigen Beispiel $E = B \times F$ liefert jeder Punkt $f \in F$ einen Schnitt s_f mit $s_f(b) = (b, f)$.

Wenn p einen Schnitt besitzt, gibt es in der Homotopiesequenz 3.25 ein Rechtsinverses s_* von p_*. Aus $p_* \circ s_* = \mathrm{id}_{\pi_k(B)}$ folgt die Surjektivität von $p*$, somit gilt $\partial = 0$. Also können wir ∂ als *Hindernis* gegen die Existenz eines Schnittes auffassen.

In Übung 5.71 werden wir sehen, dass die Homotopiesequenz 3.25 ab $k \geq 2$ dann genau die gleiche Gestalt wie im obigen Beispiel hat. Im Falle $k = 1$ können wir lediglich folgern, dass $\pi_1(E)$ isomorph zu einem semidirekten Produkt $\pi_1(B) \ltimes \pi_1(F)$ ist.

3.30. DEFINITION. Ein *Faserbündel* mit *typischer Faser* F ist eine stetige Abbildung $p\colon E \to B$, so dass jeder Punkt b eine Umgebung $U \subset B$ besitzt, für die ein Homöomorphismus $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times F$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & U \times F \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_U} & \\ & U & \end{array}$$

kommutiert, wobei pr_U die Projektion auf den ersten Faktor bezeichne. Dann heißt E der *Totalraum,* B die *Basis,* und φ eine *lokale Trivialisierung* oder *Bündelkarte* von $p\colon E \to B$.

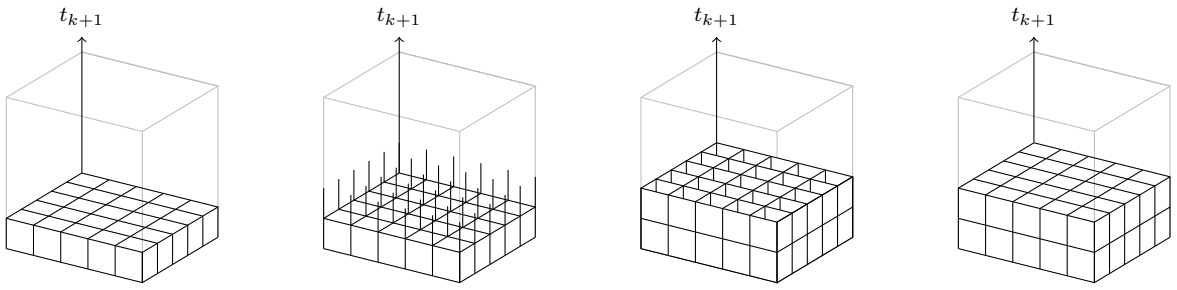


ABBILDUNG 3.3. Schichtweise Konstruktion von $\tilde{h}$

Ein Produkt wie in Beispiel 3.28 heißt auch *triviales Faserbündel,* daher die Terminologie.

3.31. PROPOSITION. *Es sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung, und jeder Punkt $b \in B$ besitze eine Umgebung $U \subset B$, so dass $p\colon p^{-1}(U) \to U$ eine Serre-Faserung ist. Dann ist p ebenfalls eine Serre-Faserung.*

3.32. FOLGERUNG. *Jedes Faserbündel $p\colon E \to B$ ist eine Serre-Faserung.* □

Faserbündel über parakompakten Räumen sind sogar Hurewicz-Faserungen [**tD2**, Section 13.4], aber das zeigen wir hier nicht.

BEWEIS von Proposition 3.31. Es sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von B durch Mengen U, über denen p eine Serre-Faserung ist. Es sei $X = I^k$ für $k \geq 0$, und $h\colon X \times I \to B$ und $\tilde{f}\colon X \to E$ seien Abbildungen wie in Definition 3.22. Dann ist $\{\, h^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U} \,\}$ eine offene Überdeckung von I^{k+1}. Nach dem Satz 1.63 von Lebesgue können wir I^{k+1} für ein geeignetes $N \gg 1$ in N^{k+1} Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ unterteilen, so dass jeder dieser Würfel ganz in einer der Mengen $h^{-1}(U)$ mit $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

Um $\tilde{h}$ zu konstruieren, setzen wir $\tilde{f}$ von $I^k \times \{0\}$ Schicht für Schicht auf I^{k+1} fort. Wir konstruieren in jeder Schicht $\tilde{h}$ zunächst auf den Strecken über allen Ecken, dann auf den Quadraten über allen Kanten, und so weiter, und zum Schluss auf den $k+1$-dimensionalen Würfeln selbst, siehe Abbildung 3.3. Dabei müssen wir in jedem Schritt von einer Menge der Form $\partial' I^i$ auf I^i fortsetzen. Dazu benutzen wir Bemerkung 3.23 und die Tatsache, dass wir stets über einer der offenen Mengen $U \subset B$ arbeiten, für die $p^{-1}(U) \to U$ eine Serre-Faserung ist. □

3.33. BEISPIEL. Der *komplex projektive Raum* $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als Quotientenraum

$$\mathbb{C}P^n = \big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim\,,$$

wobei $(z_0, \ldots, z_n) \sim (w_0, \ldots, w_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{C}^\times$ mit $a \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (w_0, \ldots, w_n)$ gibt, siehe Übung 1.167. Man schreibt für die Äquivalenzklassen auch gern $(z_0 : \cdots : z_n) = q(z_0, \ldots, z_n)$. Der $\mathbb{C}P^n$ wird überdeckt von den $n+1$ Teilmengen $U_0, \ldots, U_n$ mit

$$U_k = \big\{\, (z_0 : \cdots : z_n) \;\big|\; z_k \neq 0 \,\big\} = \mathrm{im}(q|_{\mathbb{C}^k \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-k}})\,.$$

Wir betrachten die sogenannte *Hopf-Faserung*

$$p\colon S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{q} \mathbb{C}P^n\,.$$

Über jedem U_k erhalten wir als lokale Trivialisierung den Homöomorphismus

$$\varphi\colon p^{-1}(U_k) \to U_k \times S^1 \qquad \text{mit} \qquad \varphi(z_0, \ldots, z_n) = \big((z_0 : \cdots : z_n), \tfrac{z_k}{|z|_k}\big)$$

$$\text{und} \qquad \varphi^{-1}\big((z_0 : \cdots : z_n), w\big) = \frac{w(z_k^{-1}z_0, \ldots, 1, \ldots, z_k^{-1}z_n)}{\big\|(z_k^{-1}z_0, \ldots, 1, \ldots, z_k^{-1}z_n)\big\|}\,.$$

Also ist die Hopf-Faserung ein Faserbündel mit typischer Faser $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$.

Es gilt $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ (Riemannsche Zahlenkugel). Also erhalten wir als Spezialfall insbesondere die klassische Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$ mit Faser S^1. Die zugehörige exakte Homotopiesequenz 3.25 hat die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(S^1)}_{=0 \text{ für } k\neq 2} \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^2) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_k(S^1)}_{=0 \text{ für } k\neq 1} \longleftarrow \cdots$$

Also gilt $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$ für alle $k \geq 3$.

3.34. Beispiel. Der *quaternionisch projektive Raum* $\mathbb{H}P^n$ ist definiert als Quotient

$$\mathbb{H}P^n = \big(\mathbb{H}P^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim\,,$$

wobei $(q_0, \ldots, q_n) \sim (r_0, \ldots, r_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{H}^\times$ mit $a \cdot (q_0, \ldots, q_n) = (r_0, \ldots, r_n)$ gibt. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir die *quaternionische Hopf-Faserung*

$$p\colon S^{4n+3} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$$

als Faserbündel mit typischer Faser $S^3 \subset \mathbb{H}^\times$.

Es gilt $S^4 \cong \mathbb{H}P^1$, also existiert ein Faserbündel $p\colon S^7 \to S^4$ mit typischer Faser S^3. Die zugehörige Homotopiesequenz hat die Gestalt

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^4) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^7) \xleftarrow{i_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(S^4) \longleftarrow \cdots$$

3.d. Der Ausschneidungssatz

Für kleine k ist es manchmal möglich, die k-te Homotopiegruppe eines Raumes aus den k-ten Homotopien von Unterräumen (genauer, von Unterraum-Paaren) zusammenzusetzen, ähnlich wie im Satz 2.39 von Seifert und van Kampen. Einen direkter Vergleich mit diesem Ergebnis nehmen wir später vor.

3.35. Definition. Ein Raum $X \neq \emptyset$ heißt *n-zusammenhängend,* wenn $\pi_k(X, x) = 0$ für alle $x \in X$ und alle $0 \leq k \leq n$.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $X \neq \emptyset$ heißt *n-zusammenhängend,* wenn für alle $x \in X$ die induzierte Abbildung $f_*\colon \pi_k(X, x) \to \pi_k(Y, f(x))$ ein Isomorphismus ist für alle $0 \leq k < n$ und surjektiv für $k = n$.

Ein Paar (X, A) mit $A \neq \emptyset$ heißt *n-zusammenhängend,* wenn die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine n-zusammenhängende Abbildung ist.

Eine Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ von Paaren mit $A, B \neq \emptyset$ heißt *n-zusammenhängend,* wenn für alle $x \in A$ und alle $0 \leq k < n$ die induzierte Abbildung $f_*\colon \pi_k(X, A, x) \to \pi_k(Y, B, f(x))$ ein Isomorphismus ist, und eine Surjektion für $k = n$.

Für einen Raum bedeutet 0-zusammenhängend das gleiche wie wegzusammenhängend, siehe Bemerkung 3.2 (1), und 1-zusammenhängend bedeutet wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend nach Bemerkung 3.2 (2). Ein Paar (X, A) ist 0-zusammenhängend, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von X einen Punkt von A enthält.

3.36. Bemerkung. Für einen Raum X sind äquivalent:

(1) der Raum X ist n-zusammenhängend;
(2) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $S^k \to X$ zu einer Abbildung $D^{k+1} \to X$ fortsetzen;
(3) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $\partial I^{k+1} \to X$ zu einer Abbildung $I^{k+1} \to X$ fortsetzen.

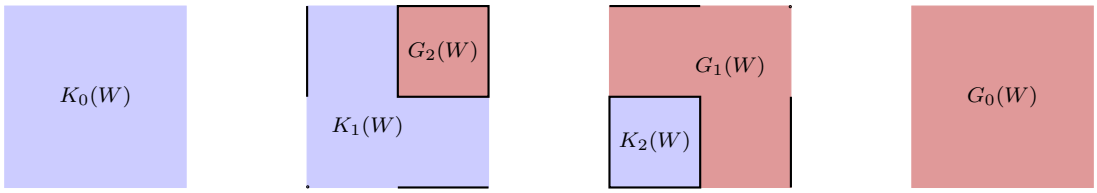


ABBILDUNG 3.4. Die Mengen $K_r(W)$ und $G_r(W)$

Die Äquivalenz von (2) und (3) ist offensichtlich, da die Paare (D^{k+1}, S^k) und $(I^{k+1}, \partial I^{k+1})$ homöomorph sind.

Zur Äquivalenz von (1) und (2) sei $f\colon S^k = I^k/\partial I^k \to X$ gegeben. Eine Nullhomotopie h von f ist eine Fortsetzung von f auf $I^{k+1}/\partial' I^{k+1}$ und umgekehrt, und das Paar $(I^{k+1}/\partial' I^{k+1}, I^k/\partial I^k)$ ist homöomorph zu (D^{k+1}, S^k).

3.37. BEMERKUNG. Für ein Paar (X, A) und $n \geq 0$ sind äquivalent:

(1) das Paar (X, A) ist n-zusammenhängend;
(2) für alle $k \leq n$ und alle $x \in A$ gilt $\pi_k(X, A, x) = 0$;
(3) für alle $1 \leq k \leq n$ ist jede Abbildung $(I^k, \partial I^k) \to (X, A)$ als Abbildung von Paaren homotop zu einer Abbildung $(I^k, \partial I^k) \to (A, A)$.
(4) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\}) \to (X, A)$ zu einer Abbildung $(I^{k+1}, I^k \times \{0\}) \to (X, A)$ fortsetzen.

Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (X, A).

Zu (2) $\Rightarrow$ (3) überlegt man sich, dass die Paare $(I^k, \partial I^k)$, (D^k, S^{k-1}) und $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$ paarweise homöomorph sind.

Wie in Bemerkung 3.23 existiert ein Homöomorphismus $g\colon I^{k+1} \to I^{k+1}$, der $\partial' I^{k+1}$ auf $I^k \times \{0\}$ abbildet und umgekehrt. Zu (3) $\Rightarrow$ (4) sei $h\colon (I^{k+1}, \partial' I^{k+1}) \to (X, A)$ die Homotopie aus (3) zu $f \circ g^{-1}|_{I^k \times \{0\}}$. Dann ist $h \circ g$ die gesuchte Fortsetzung.

Für (4) $\Rightarrow$ (2) betrachte $f\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (X, A)$. Da das Paar $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$ zu $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\})$ homöomorph ist, ist f relativ zum Rand $\partial I^k/\partial' I^k$ homotop zu einer Abbildung $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (A, A)$, liegt also im Bild von $\pi_k(A, A, x) = 0$.

3.38. SATZ (Ausschneidungssatz, Blakers-Massey). *Es sei X ein topologischer Raum und U, $V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V \neq \emptyset$. Das Paar $(U, U \cap V)$ sei p-zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei q-zusammenhängend mit $p, q \geq 0$, dann ist $i\colon (U, U \cap V) \to (X, V)$ eine $(p+q)$-zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

Der Name rührt daher, dass wir die abgeschlossene Menge $V \setminus U$ aus X „ausschneiden“ können, ohne die ersten $p+q-1$ Homotopiegruppen zu verändern. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir später einige nichttriviale Homotopiegruppen ausrechnen und viele wichtige Resultate beweisen.

Wir kopieren den Beweis von Puppe, siehe [**tD2**, Abschnitt 6.9]. Als erstes bringen wir die Repräsentanten von Homotopieklassen oder Homotopien zwischen ihnen in eine spezielle Form (Propositionen 3.39, 3.40), siehe Abbildung 3.6. Anschließend können wir den Anteil mit Werten in $V \setminus U$ wegdeformieren (Proposition 3.41).

Dazu betrachten wir achsenparallele Würfel der Form

$$W(a, \delta, J) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i \in [a_i, a_i + \delta] \text{für } i \in J, \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

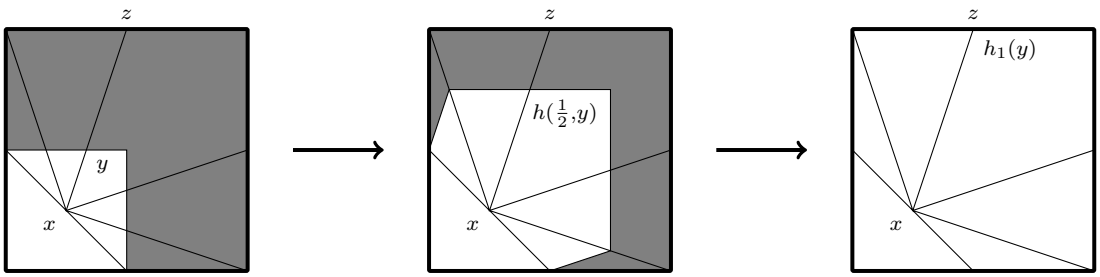


ABBILDUNG 3.5. Die Homotopie h_1

für $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ und $J \subset \{1, \dots, n\}$. Für $W = W(a, \delta, J)$ und $0 \le r$ definieren wir Teilmengen $K_r(W)$ und $G_r(W) \subset W$ — wie in Abbildung 3.4 angedeutet — durch

$$\begin{aligned} K_r(W) &= \left\{ x \in W \;\middle|\; x_i \in \left(a_i, a_i + \tfrac{\delta}{2}\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}, \\ G_r(W) &= \left\{ x \in W \;\middle|\; x_i \in \left(a_i + \tfrac{\delta}{2}, a_i + \delta\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Inbesondere gilt $K_r(W) = G_r(W) = \emptyset$ falls $r > \dim W = \#J$. Unter den Seiten von $W(a, \delta, J)$ verstehen wir alle Würfel $W(a', \delta, J')$ mit $J' \subset J$ und mit $a'_i \in \{a_i, a_i + \delta\}$ für alle $i \in J \setminus J'$ und $a'_i = a_i$ sonst. Die Vereinigung aller echten Seiten W heißt wieder der (*geometrische*) *Rand* ∂W von W.

3.39. PROPOSITION. *Es seien $r \le \dim W$, $f\colon W \to X$ und $A \subset X$ gegeben, so dass*

$$f^{-1}(A) \cap W' \subset K_r(W')$$

für alle echten Seiten W' von W gilt. Dann ist f homotop relativ zu ∂W zu einer Abbildung $g\colon W \to X$ mit $g^{-1}(A) \subset K_r(W)$. Eine entsprechende Aussage gilt, wenn man K_r überall durch G_r ersetzt.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei $W = I^k$ ein Einheitswürfel. Wir definieren eine Abbildung $h = h_1\colon I^k \to I^k$ homotop zur Identität und ersetzen f durch die homotopie Abbildung $f \circ h$. Dazu fixieren wir $x = \left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}\right)$. Für jeden Strahl s am Punkt x sei y der Schnittpunkt von s mit $\partial[0, \frac{1}{2}]^k$, und z sei der Schnittpunkt von s mit ∂I^k. Dann bilde h_1 die Strecke xy affin auf die Strecke xz, und die Strecke yz konstant auf den Punkt z ab, siehe Abbildung 3.5. Diese Abbildung ist stetig, eine Homotopie zur Identität wird gegeben durch $h_t = (1-t)\,\mathrm{id}_W + t\,h_1$, und man sieht leicht, dass $g = f \circ h_1$ die gestellte Bedingung erfüllt. □

Wir betrachten jetzt eine Abbildung $f\colon I^k \to X$. Nach dem Satz 1.63 können wir I^k für ein geeignetes N so in N^k Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ zerlegen, dass jeder dieser Würfel entweder in $f^{-1}(U)$ oder in $f^{-1}(V)$ liegt.

3.40. PROPOSITION. *Das Paar $(U, U \cap V)$ sei p-zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei q-zusammenhängend für p, $q \ge 0$. Dann existiert zu jeder Abbildung $f\colon I^k \to X$ eine Homotopie h von f zu $g\colon I^k \to X$, die für alle Seiten W von Würfeln der obigen Zerlegung folgendes erfüllt:*

1. *falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, gelte $h(x,t) = f(x)$ für alle $x \in W$, $t \in I$;*
2. *falls $W \subset f^{-1}(U)$, gelte $h(x,t) \subset U$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(U \setminus V) \cap W \subset K_{p+1}(W)$;*
3. *falls $W \subset f^{-1}(V)$, gelte $h(x,t) \subset V$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(V \setminus U) \cap W \subset G_{q+1}(W)$.*

BEWEIS. Wir konstruieren h der Reihe nach für alle Ecken der Würfel W, dann für alle Kanten, und so weiter, und zum Schluss für die Würfel W selbst.

Sei also zunächst $W = \{x\}$ eine Ecke. Falls $f(x) \in U \cap V$, definieren wir $h|_{W\times I}$ durch (1). Sei also $f(x) \in U \setminus V$. Da $\pi_0(U, U \cap V) = 0$, finden wir einen Weg von x zu einem Punkt in $U \cap V$; dieser sei unsere Homotopie. Genauso verfahren wir, falls $f(x) \in V \setminus U$.

Sei jetzt W ein Würfel der Dimension $n \geq 1$. Nach Induktion ist h auf $\partial W \times I$ bereits konstruiert und wird auf $W \times \{0\}$ durch $f|_W$ gegeben. Falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, definieren wir $h|_{W\times I}$ wieder durch (1). Gelte also $W \subset f^{-1}(U)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(V)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Falls $n \leq p$, gilt $\pi_n(U, U \cap V) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $h(x, t) \in U$ und $h(x, 1) \in U \cap V$ für alle $x \in \partial W$ und alle $t \in I$. Wir setzen $f|_{W\times\{0\}}$ und $h|_{\partial W\times I}$ gemäß Bemerkung 3.37 (4) zu einer Abbildung $h\colon W \times I \to U$ so fort, dass $h(x, 1) \in U \cap V$ für alle $x \in W$. Es folgt

$$g^{-1}(U \setminus V) = \emptyset = K_{p+1}(W) \; .$$

Falls $n > p$, konstruieren wir h und g mit Hilfe von Proposition 3.39. Analog verfahren wir, falls $W \subset f^{-1}(V)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(U)$. □

3.41. Proposition. *Es sei $1 \leq k \leq p+q$ und $f\colon (I^k, \partial' I^k) \to (X, U)$ eine Abbildung mit $I^{k-1} \times \{0\} \subset f^{-1}(V)$. Dann existiert eine Homotopie $h\colon I^{k+1} \to X$ von f zu einer Abbildung $g\colon I^k \to U$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Wenn f eine Seite $W \subset \partial' I^k$ von I^k nach $U \cap V$ abbildet, gelte $h(x, t) = f(x)$ für alle $t \in I$ und alle $x \in W$.*
(2) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in \partial' I^k$ gelte $h(x, t) \in U$.*
(3) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in I^{k-1} \times \{0\}$ gelte $h(x, t) \in V$.*

Beweis. Wir wenden Proposition 3.40 an und erhalten eine zu f homotope Abbildung $I^k \to X$. Die Bedingungen (1)–(3) in Proposition 3.40 stellen sicher, dass diese Homotopie die obigen Eigenschaften (1)–(3) erfüllt. Wir dürfen daher ohne Einschränkung für alle W annehmen, dass

$$f^{-1}(U \setminus V) \subset K_{p+1}(W) \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(V \setminus U) \subset G_{q+1}(W) \; .$$

Betrachte jetzt die orthogonale Projektion $P\colon I^k \to I^{k-1} \times \{0\}$. Sei W' das Bild unter p eines Würfels W der obigen Zerlegung. Da wir die Kontrolle über eine Koordinate verlieren, gilt

$$K_{p+1}(W) \subset P^{-1}\big(K_p(W')\big) \qquad \text{und} \qquad G_{q+1}(W) \subset P^{-1}\big(G_q(W')\big) \; .$$

Da $k - 1 < p + q$, sind die Mengen $K_p(W')$ und $G_q(W')$ nach Konstruktion (3.2) disjunkt, siehe Abbildung 3.4. Wegen Proposition 3.40 (2) und (3) sind dann auch die kompakten Mengen

$$A = \big\{\, P(x) \;\big|\; x \in f^{-1}(U \setminus V) \,\big\} \qquad \text{und} \qquad B = \big\{\, P(x) \;\big|\; x \in f^{-1}(V \setminus U) \,\big\} \subset I^{k-1}$$

disjunkt. Da $\partial' I^k$ auf U abgebildet wird, ist insbesondere B auch disjunkt zu ∂I^{k-1}. Nach Urysohns Lemma 1.29 existiert eine stetige Funktion $u\colon I^{k-1} \to I$ mit $u|_{A\cup\partial I^{k-1}} = 0$ und $u|_B = 1$.

Insbesondere liegt $f^{-1}(U \setminus V)$ oberhalb des Graphen von u in I^k, und $f^{-1}(V \setminus U)$ unterhalb, siehe Abbildung 3.6. Wir konstruieren eine Homotopie relativ zu $\partial' I^k$ durch

$$h(x_1, \ldots, x_k, t) = f\big(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + (1 - x_k)tu(x_1, \ldots, x_{k-1})\big) \; .$$

Diese Homotopie bildet ganz $\partial I^k \times I$ nach V ab, und die Abbildung $g = h(\,\cdot\,, 1)$ nimmt Werte in U an. Zusammen mit der Homotopie aus Proposition 3.40 ist die Behauptung bewiesen. □

Beweis des Ausschneidungssatzes 3.38. Es sei $k = 0$. Jede Wegzusammenhangskomponente von U und V enthält Punkte von $U \cap V$, da p, $q \geq 0$. Es folgt

$$\pi_0(X, V) = \{*\} = \pi_0(U, U \cap V) \; .$$

Sei $x \in U \cap V$. Zur Surjektivität der Abbildung

$$i_*\pi_k(U, U \cap V, x) \to \pi_k(X, V, x)$$

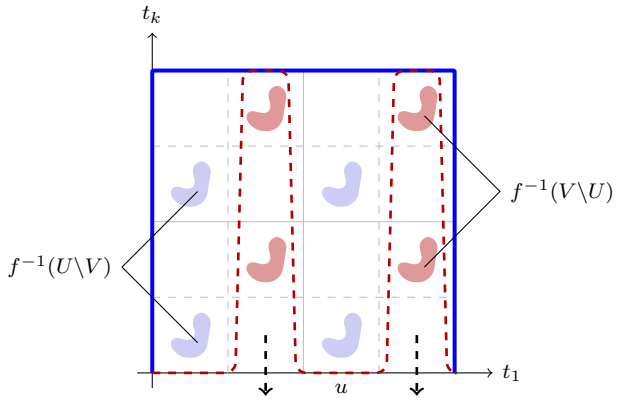


ABBILDUNG 3.6. Die Urbilder von $V \setminus U$ und $U \setminus V$ in I^k

seien $1 \leq k \leq p+q$ und $f\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (X, V)$ gegeben. Wir wenden Proposition 3.41 auf $\bar{f}\colon I^k \to X$ an. Es folgt $[f] = [g] \in \pi_k(X, V)$ und $[g] \in \mathrm{im}(i_*)$. Damit ist Surjektivität von i_* bewiesen.

Der Beweis der Injektivität verläuft ähnlich. Sei $2 \leq k \leq p+q$, und seien f_0, $f_1 \in \pi_{k-1}(U, U \cap V, x)$ mit $i_* f_0 = i_* f_1$ repräsentiert durch $\bar{f}_j\colon (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (U, U \cap V)$, so dass $\partial' I^{k-1} \subset \bar{f}_j^{-1}(\{x\})$ für $j = 0, 1$. Dann existiert eine Homotopie $\bar{h}\colon (I^k, \partial I^{k-1} \times I) \to (X, V)$ zwischen $\bar{f}_0$ und $\bar{f}_1$, wobei ganz $\partial' I^{k-1} \times I$ auf x abgebildet wird. Insbesondere bildet $\bar{h}$ die Seite $\partial I^{k-2} \times \{0\} \times I$ nach V ab, alle anderen Seiten von I^k werden nach U abgebildet. Wir werden Proposition 3.41 auf $\bar{h}$ an und erhalten eine neue Abbildung $\bar{k}\colon I^k \to U$. Dabei wird zunächst f_j durch eine in $(U, U \cap V)$ punktiert homotope Abbildung $g_j = k(\,\cdot\,, j)$ ersetzt, und k ist eine punktierte Homotopie zwischen g_0 und g_1 in $(U, U \cap V)$. Es folgt $[f_0] = [g_0] = [g_1] = [f_1] \in \pi_{k-1}(U, U \cap V)$, und wir erhalten die Injektivität von i_* in den Graden $0, \ldots, p+q-1$. Zusammen mit der obigen Surjektivität ist $i\colon (U, U \cap V) \to (X, V)$ also eine $(p+q)$-zusammenhängende Abbildung von Paaren. □

3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Homotopiegruppen von Sphären. Die Homotopiegruppen der S^1 kennen wir bereits aus Beispiel 3.27.

Für $n \geq 1$ bezeichne $e_1 \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den Basispunkt. Wir zerlegen $S^n = U \cup V$ mit $U = S^n \setminus \{-e_2\}$ und $V = S^n \setminus \{e_2\}$; beide Teilmengen sind zusammenziehbar. Mit Bemerkung 3.6 liefert die lange exakte Sequenz des Paares (S^n, V) Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(V)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(S^n, V) \xleftarrow[\cong]{j_*} \pi_k(S^n) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(V)}_{=0} \longleftarrow \cdots \tag{3.3}$$

für alle k. Der Durchschnitt $U \cap V$ ist homotopieäquivalent zu einer S^{n-1}. Mit Folgerung 3.21 aus dem Fünferlemma 3.20 schließen wir, dass die jeweiligen Inklusionen der „oberen“ und „unteren“ Hemisphären in die S^n für alle k Isomorphismen

$$\pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \qquad \text{und} \qquad \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(V, U \cap V) \tag{3.4}$$

induzieren. Der Raum D^n ist zusammenziehbar. Die Homotopiesequenz 3.19 des Paares (D^n, S^{n-1}) liefert also Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(D^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_{k-1}(S^{n-1}) \xleftarrow[\cong]{\partial} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(D^n)}_{=0} \longleftarrow \cdots \tag{3.5}$$

für alle k.

3.42. Satz (Brouwer, Hopf). *Für alle $n \geq 1$ gilt:*

(1) *der Raum S^n ist $(n-1)$-zusammenhängend;*
(2) *das Paar (D^n, S^{n-1}) ist $(n-1)$-zusammenhängend;*
(3) *es gilt*
$$\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \cong \mathbb{Z}\,,$$
dabei werden beide Gruppen von der jeweiligen Identität erzeugt;
(4) *die Abbildung*
$$\pi_{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\partial^{-1}} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U\cap V) \xrightarrow{i_*} \pi_k(S^n, V) \xrightarrow[\cong]{j_*^{-1}} \pi_k(S^n)$$
ist ein Isomorphismus für alle $1 \leq k < 2n-2$, und surjektiv, falls $1 \leq k = 2n-2$.

In (3) haben wir $I^n/\partial I^n$ gemäß Bemerkung 3.2 (3) mit S^n und $(I^n/\partial' I^n, \partial I^n/\partial' I^n)$ gemäß Bemerkung 3.13 mit (D^n, S^{n-1}) identifiziert.

Aussage (1) kann man auch elementar (ohne Ausschneidung) beweisen, allerdings ist der Beweis immer noch etwas aufwändig. Dazu stellt man ein Element von $\pi_k(S^n)$ mit $k < n$ durch eine punktierte Abbildung $f\colon I^k/\partial I^k \to S^n$ dar. Diese Abbildung kann surjektiv sein, siehe Beispiel 1.21. Indem man f im Inneren von I^k geschickt glättet, erhält man eine punktiert homotope Abbildung, die einen Punkt in S^n nicht trifft, ohne Einschränkung den Südpol x. Dann zieht man $S^n \setminus \{x\}$ auf den Nordpol zusammen und erhält so eine Nullhomotopie von f.

Beweis. Wir beweisen zunächst (1), (2) und (4) durch Induktion über n. Für $n = 1$ gelten die Behauptungen, denn S^1 ist zusammenhängend, es gilt $\pi_0(D^1, S^0) = \{*\}$, und Aussage (4) ist leer.

Sei jetzt $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\pi_k(S^{n-1}) = 0$ für $k \leq n-2$. Aus (3.5) folgt $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ für alle $k \leq n-1$, also ist (D^n, S^{n-1}) ein $(n-1)$-zusammenhängendes Paar nach Bemerkung 3.37, und (2) ist gezeigt.

Wegen (3.4) sind auch die Paare $(U, U\cap V)$ und $(V, U\cap V)$ jeweils $(n-1)$-zusammenhängend. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 ist $(U, U\cap V) \to (S^n, V)$ eine $(2n-2)$-zusammenhängende Abbildung. Es folgt Behauptung (4).

Für $n \geq 2$ ist $2n-2 \geq n$, und für $k < n$ erhalten wir
$$0 = \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U\cap V) \cong \pi_k(S^n, V) \cong \pi_k(S^n)\,.$$
Damit sind (1), (2) und (4) für alle n gezeigt.

Für $n = 1$ folgt (3) aus Satz 2.26. Für $n = 2$ betrachten wir die Homotopiesequenz der Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Wegen (1) hat sie die Form
$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=0} \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\cong\mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial} \pi_2(S^2) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$
Mit (4) und (3.5) erhalten wir die Isomorphismen in (3) induktiv für alle n.

Wir konstruieren induktiv Homöomorphismen
$$\varphi_k\colon I^k/\partial I^k \xrightarrow{\cong} S^k \qquad \text{und} \qquad \psi_k\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \xrightarrow{\cong} (D^k, S^{k-1})$$
wie in den Bemerkung 3.2 (3), und zeigen, dass $[\mathrm{id}_{S^n}] = [\varphi_n]$ und $[\mathrm{id}_{(D^{n+1},S^n)}] = [\psi_{n+1}]$ jeweils Erzeuger von $\pi_n(S^n)$ beziehungsweise $\pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ sind. Für $\pi_1(S^1)$ folgt das aus Satz 2.26.

Sei also $n \geq 2$ und $[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_{n-1}(S^{n-1})$. Dann können wir ψ_n konstruieren, indem wir
$$\psi_n|_{(I^{n-1}\times\{0\})/(\partial I^{n-1}\times\{0\})} = \varphi_{n-1}$$

auf $(I^n/\partial' I^n, \partial I^n/\partial' I^n)$ fortsetzen. Nach Satz 3.19 und (3.5) ist dann $[\psi_n] = \partial^{-1}[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_n(D^n, S^{n-1})$.

Mit dem Ausschneidungssatz 3.38 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_n(U, U \cap V) \longrightarrow \pi_n(S^n, V) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

(für $n = 2$ ist diese Abbildung wegen (4) zunächst nur surjektiv, aber die einzigen surjektiven Gruppen-Endomorphismen von $\mathbb{Z}$ sind $a \mapsto \pm a$, also bijektiv). Das Bild von $[\psi_n]$ ist Erzeuger von $\pi_n(S^n)$.

Das Bild von $[\psi_n]$ in $\pi_n(S^n, V)$ entspricht einer Abbildung, die das Innere von I^n homöomorph auf die Hemisphäre $\{\, x \in S^n \mid x_2 > 0 \,\}$ abbildet. In $\pi_n(S^n, \{e_1\}) \cong \pi_n(S^n)$ entspricht das einer Abbildung, die das Innere von I^n homöomorph auf $S^n \setminus \{e_1\}$ abbildet; diese sei unsere neue Abbildung φ_n. □

3.43. Beispiel. Wir betrachten die Hopf-Faserungen aus den Beispielen 3.33 und 3.34.

(1) Da $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$ für $n \geq 1$ nach Satz 3.42 (1), ist die Inklusion $i\colon S^1 \to S^{2n+1}$ der Faser in der Hopf-Faserung $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ homotop zur konstanten Abbildung; es folgt $\pi_k i = 0$ für alle k. Somit zerfällt die lange exakte Sequenz in eine Folge kurzer exakter Sequenzen der Form

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^1) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{C}P^n) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^{2n+1}) \longleftarrow 0 \,.$$

Aus Beispiel 3.27 folgt jetzt

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1}) \text{ für alle } k \neq 2 \,.$$

Wegen Satz 3.42 (3) gilt für $k \neq 2$ also auch

$$\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{Z} \,, \qquad \text{insbesondere} \qquad \pi_3(S^2) \cong \pi_3(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z} \,.$$

Erzeuger dieser Gruppe $\mathbb{Z}$ ist übrigens die Hopf-Faserung selbst, denn

$$[p] = [p \circ \mathrm{id}_{S^{2n+1}}] = p_*[\mathrm{id}_{S^{2n+1}}] \,.$$

Interessanterweise kann man also eine Sphäre in eine Mannigfaltigkeit M kleinerer Dimension nicht-nullhomotop abbilden.

(2) Genauso ist in der quaternionischen Hopf-Faserung $i\colon S^3 \to S^{4n+3}$ homotop zur konstanten Abbildung, und wir erhalten eine Folge kurzer exakter Sequenzen

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{H}P^n) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^{4n+3}) \longleftarrow 0 \,.$$

Im Gegensatz zur S^1 gilt $\pi_k(S^3) \neq 0$ für unendlich viele $k \geq 3$. Für $k = 4n + 3$ sehen wir aber immerhin, dass die Klasse $[p] = p_*[\mathrm{id}_{S^{4n+3}}]$ der quaternionischen Hopf-Faserung unendliche Ordnung in der Gruppe $\pi_{4n+3}(\mathbb{H}P^n)$ hat. Im Spezialfall $n = 1$ folgt daraus, dass $\pi_7(S^4)$ eine unendliche Gruppe ist.

In der Tat enthält $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ stets $\mathbb{Z}$ als direkten Summanden für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber das können wir jetzt noch nicht beweisen. Ansonsten ist $\pi_k(S^n)$ endlich für $k > n$, und wir sehen, dass die Bedingung in Satz 3.42 (4) scharf ist, denn $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \to \pi_{4n}(S^{2n+1})$ ist sicher nicht injektiv.

Der Satz 3.42 von Brouwer-Hopf hat viele topologische und geometrische Anwendungen. Einige fassen wir hier zusammen, weitere folgen in Übung 3.121.

3.44. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Für $n \geq 0$ hat jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ einen Fixpunkt.*

Der Fall $n = 1$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, siehe Bemerkung 2.27, und $n = 2$ haben wir bereits in Satz 2.29 behandelt.

BEWEIS. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen, es sei also $n \geq 1$. Wie im Beweis von Satz 2.29 im Fall $n = 2$ nehmen wir an, dass die Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ keinen Fixpunkt hat, und konstruieren dann eine Retraktion $r\colon D^n \to S^{n-1} = \partial D^n$ wie in Abbildung 2.2. Sei $i\colon S^{n-1} \to D^n$ die Inklusion, dann gilt also $r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Wie in Bemerkung 2.28 folgt für jeden kovarianten Funktor Φ von der Kategorie $\mathcal{T}op_+$ in eine Kategorie $\mathcal{C}$, dass $\Phi r \circ \Phi i = \mathrm{id}_{\Phi S^{n-1}}$. Der Funktor $\pi_{n-1}\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{S}et_+$ liefert jetzt einen Widerspruch, da $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \neq \{*\} = \pi_{n-1}(D^n)$. □

Wir wollen jetzt freie Homotopieklassen von Abbildungen von S^n nach S^n betrachten und erinnern uns an Folgerung 3.8. Für die Spären S^n mit $n \geq 1$ wirkt $\pi_1(S^n)$ trivial auf $\pi_k(S^n)$, denn $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist abelsch und alle anderen $\pi_k(S^1)$ verschwinden, und für $n > 1$ ist $\pi_1(S^n)$ trivial. Daher identifizieren wir $[S^k_+, S^n]$ mit $\pi_k(S^n)$.

3.45. DEFINITION. Sei $\deg\colon [S^n_+, S^n] \cong \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus Satz 3.42 (3). Für eine Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ heißt $\deg f = \deg[f] \in \mathbb{Z}$ der *Abbildungsgrad* von f.

Später werden wir diesen Begriff verallgemeinern auf Abbildungen zwischen orientierten topologischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension.

3.46. FOLGERUNG (aus Satz 3.42). *Zwei Abbildungen f, $g\colon S^n \to S^n$ sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben.* □

3.47. BEISPIEL. Es sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ für $n \geq 1$, dann hat die Abbildung $f_A\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ mit

$$f_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

den Abbildungsgrad $\deg f_A = \operatorname{sign} \det A \in \{1, -1\}$.

Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, auf denen die Determinante unterschiedliches Vorzeichen hat. Ein Weg γ zwischen zwei Elementen A, $B \in GL(n, \mathbb{R})$ liefert eine Homotopie

$$h(x, t) = \frac{\gamma(t)x}{\|\gamma(t)x\|}$$

zwischen f_A und f_B. Da $\deg f_{E_n} = \deg \mathrm{id} = \operatorname{sign} \det E_n$ gilt, reicht es, ein Element A mit $\deg f_A = \operatorname{sign} \det A = -1$ anzugeben. Aus dem Beweis von Satz 3.5 schließen wir, dass folgende Matrix das Gewünschte leistet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} .$$

Unter einem Vektorfeld auf S^n verstehen wir eine Abbildung $f\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass x und $f(x)$ für alle x aufeinander senkrecht stehen.

3.48. SATZ (Satz vom Igel). *Die Sphäre S^n trägt genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

BEWEIS. Sei $n = 2k - 1$ ungerade. Ein nicht verschwindendes Vektorfeld wird gegeben durch

$$f(z) = iz \qquad \text{für alle } z \in S^n \subset \mathbb{C}^k .$$

Umgekehrt sei f ein nirgends verschwindendes Vektorfeld. Indem wir $f(x)$ durch $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ ersetzen, dürfen wir $\|f(x)\| = 1$ für alle $x \in S^n$ annehmen. Dann erhalten wir eine Homotopie zwischen id und $-\mathrm{id}$ durch

$$h(x, t) = \cos(\pi t)\, x + \sin(\pi t)\, f(x) .$$

Es folgt

$$1 = \deg \mathrm{id} = \deg(-\mathrm{id}) = \operatorname{sign} \det(-E_{n+1}) = (-1)^{n+1} ,$$

also ist n ungerade. □

Wir beweisen noch die Invarianz der Dimension. Dabei ist interessant, dass wir mit Hilfe eines homotopieinvarianten Funktors Eigenschaften nachweisen können, die nicht homotopieinvariant sind. Wir erinnern uns an den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit aus Definition 1.103, siehe auch Bemerkung 1.105 (4). Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $x \in X$, $x \neq x_0$. Dann schreiben wir $X|x = (X, X \setminus \{x\}) = (X, X \setminus \{x\}, x_0)$.

3.49. Beispiel. Bis auf Homöomorphie gibt es nur zwei zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeiten: den Kreis S^1 und das offene Intervall $\mathbb{R}$. In diesem Fall erhalten wir für jeden Punkt x Bijektionen $\pi_0(S^1|x) = \pi_0(\mathbb{R}|x) = \{*\}$, sowie mit Folgerung 3.21 auch

$$\pi_1(S^1|x) \cong \pi_1(S^1, \{x_0\}) \cong \mathbb{Z}\,, \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathbb{R}|x) \cong \pi_1(D^1, S^0) \cong \pi_0(S^0) \cong \{0, *\}\,.$$

3.50. Proposition. *Es sei M eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, und es sei $x \in M$. Dann gilt*

(1) *Für $0 \leq k \leq n-1$ ist $\pi_k(M|x) = 0$.*
(2) *Die Gruppe $\pi_n(M|x)$ enthält eine Kopie von $\mathbb{Z}$ als Untergruppe.*

Falls M nicht zusammenhängend ist, gilt die Aussage, falls wir den Basispunkt in der gleichen Zusammenhangskomponente wie x wählen.

Beweis. Es sei $U \subset M$ eine offene Umgebung von x, die zu B^n (oder äquivalent zu $\mathbb{R}^n$) homöomorph ist. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir annehmen, dass sich der Homöomorphismus zu einem Homöomorphismus $\overline{U} \cong D^n$ fortsetzt.

Wir zerlegen

$$M = U \cup (M \setminus \{x\})\,.$$

Da M zusammenhängend ist, ist $(M \setminus \{x\}, U \setminus \{x\})$ ein 0-zusammenhängendes Paar. Da U zusammenziehbar und $U \setminus \{x\}$ zu S^{n-1} homotopieäquivalent ist, ist $U|x = (U, U \setminus \{x\})$ ein $(n-1)$-zusammenhängendes Paar. Aus dem Ausschneidungssatz folgt für $k \leq n-1$, dass

$$\pi_k(M|x) = \pi_k(M, M \setminus \{x\}) \cong \pi_k(U, U \setminus \{x\}) = \pi_k(U|x) = 0\,.$$

Betrachte jetzt die Inklusion $U \to M$ und die Quotientenabbildung

$$q\colon M \to M/(M \setminus U) \cong S^n\,.$$

Wie im Beweis von Satz 3.42 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\pi_n(q \circ i)\colon \pi_n(U|x) \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_n(S^n)\,.$$

Wie in Bemerkung 2.28 folgt die Injektivität von $\pi_n i$. □

3.51. Satz (Invarianz der Dimension, Brouwer). *Es seien M, N topologische Mannigfaltigkeiten. der Dimensionen m, $n \in \mathbb{N}$. Wenn M und N homöomorph sind, gilt $m = n$.*

Beweis. Wir betrachten als erstes den Spezialfall, dass $m = 0$. In diesem Fall trägt M die diskrete Topologie. Wenn M und N homöomorph ist, trägt auch N die diskrete Topologie, also gilt auch $n = 0$. Andernfalls können wir mit Beispiel 3.49 und Proposition 3.50 die Dimension von M charakterisieren als

$$m = \inf\{\, k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(M|x) \neq 0 \,\}\,.$$

Wenn M und N homöomorph sind, folgt $m = n$. □

3.52. Definition. Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit mit Rand* der *Dimension* $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ oder zu $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ ist.

Der (*geometrische*) *Rand* ∂M von M ist die Teilmenge derjenigen Punkte, die von Homöomorphismen $U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ wie oben auf Punkte in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ abgebildet werden.

3.53. Bemerkung. Für einen Punkt x in einer Mannigfaltigkeit M mit Rand gibt es genau zwei Möglichkeiten, siehe Übung 3.122.

(1) Für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$; in diesem Fall heißt x ein *innerer Punkt* von M, oder
(2) Es gibt keine offene Umgebung von x in M, die zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, und für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$; in diesem Fall heißt x ein *Randpunkt* von M.

3.54. Beispiel. Wir kennen bereits einige topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand.

(1) Jede topologische Mannigfaltigkeit M im Sinne von Definition 1.103 ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \emptyset$.
(2) Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit Rand $N \subset M$ ist topologische Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = N$.
(3) Der Halbraum $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.
(4) Der abgeschlossene Ball D^n ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand S^{n-1}.
(5) Der Einheitswürfel I^n ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand ∂I^n, denn es gilt $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^{n-1})$.

3.f. Kofaserungen und Quotienten

Wenn man in einem Diagramm alle Pfeile umdreht, erhält man ein dazu duales Diagramm. In diesem Sinne sind Produkte dual zur disjunkten Vereinigung (Sätze 1.78 und 1.53), Unterräume sind dual zu Quotienten (Sätze 1.50 und 1.83). Solange man nur abstrakt mit universellen Eigenschaften arbeitet, lassen sich alle Argumente übertragen. Aber bereits die Existenz von Produkten oder disjunkten Vereinigungen lässt sich nicht rein abstrakt zeigen, man braucht konkrete Überlegungen.

Eckmann-Hilton-Dualität ist die Idee, dass es auch zu jedem homotopietheoretischen Begriff einen dualen Begriff geben sollte. In diesem Abschnitt geht es um den dualen Begriff zu den Faserungen aus Abschnitt 3.c, der tatsächlich mindestens so wichtig ist wie das Original. Im Hinblick auf später betrachten wir in diesem Abschnitt auch Räume ohne Basispunkt. Wir bilden das duale Diagramm zum Diagramm zur Homotopieliftungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde f} & E \\ {\scriptstyle\times\{0\}}\big\downarrow & \overset{\tilde h}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Y\times I & \xrightarrow{h} & B \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{f} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_0}\big\uparrow & \overset{H}{\swarrow} & \big\uparrow{\scriptstyle i} \\ C(I,Y) & \xleftarrow{h} & A \end{array} \tag{3.6}$$

Hier ist nach dem Exponentialgesetz 1.101 (2) das Produkt mit dem festen, lokalkompakten Raum I dual zum Wegeraum $C(I,\,\cdot\,)$: anstelle von Homotopien von Abbildungen von Y nach B oder E betrachten wir Homotopien von Abbildungen von A oder X nach Y. Das rechte Diagramm führt zu unserem neuen Begriff.

3.55. Definition. Eine Abbildung $i\colon A \to X$ ist eine (*Hurewicz-*) *Kofaserung,* wenn i für jeden Raum Y die *Homotopieausdehnungseigenschaft* besitzt, das heißt, wenn es zu jedem Raum Y, jeder Abbildung $f\colon X \to Y$ und jeder Homotopie $h\colon A \times I \to Y$ mit

$$h(a,0) = f(i(a)) \qquad \text{für alle } a \in A \tag{1}$$

eine Homotopie $H\colon X \times I \to Y$ gibt, so dass

$$H(x,0) = f(x) \qquad \text{und} \qquad H(i(a),t) = h(a,t) \qquad \text{für alle } x \in X,\ a \in A \text{ und } t \in I\,. \tag{2}$$

Wir nennen ein Paar (X, A) eine *Kofaserung,* wenn die Inklusion $i\colon A \to X$ eine Kofaserung ist. Wir nennen einen punktierten Raum (X, x_0) *gut punktiert* und x_0 einen *guten* oder *nicht entarteten Basispunkt,* wenn $\{x_0\}$ in X abgeschlossen und $(X, \{x_0\})$ eine Kofaserung ist.

3.56. Beispiel. Zunächst wollen wir etwas besser verstehen, was wir gerade definiert haben. Wir beginnen mit einigen trivialen Beispielen.

(1) Die Identität id_X ist eine Kofaserung.
(2) Die triviale Abbildung $\emptyset \to X$ ist eine Kofaserung in $\mathcal{T}op$, das Analogon $\mathrm{pt} \to X$ in $\mathcal{T}op_+$ jedoch nicht immer, denn
(3) Das Paar $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \cup \{0\}, \{0\}\right)$ ist keine Kofaserung.

Weitere Beispiele gibt es in den Übungen 3.126 und 3.133.

3.57. Definition. Es sei $f\colon Y \to X$ eine Abbildung. Wir definieren den *Abbildungszylinder*

$$Zf = (Y \times I \sqcup X)/\sim\ ,$$

wobei „$\sim$“ die von $(y, 0) \sim f(y)$ für alle $y \in Y$ erzeugte Äquivalenzrelation sei.

3.58. Bemerkung. Zunächst liefert uns das Exponentialgesetz 1.101 eine natürliche Bijektion $C(X \times I, Y) \cong C(X, C(I, Y))$, so dass wir h und H als Abbildungen $A \times I \to Y$ beziehungsweise $X \times I \to Y$ auffassen dürfen.

Wir betrachten in Definition 3.55 den Spezialfall $Y = Zi$ und $F = \mathrm{id}_{Zi}$ mit den zugehörigen Abbildungen f und h. Wenn i eine Kofaserung ist, existiert eine Abbildung $H\colon X \times I \to Zi$, so dass für alle $x \in X$, $a \in A$ und $t \in I$ gilt

$$H(i(a), t) = [a, t] \in Zi \qquad \text{und} \qquad H(x, 0) = x \in X \subset Zi\ .$$

Hieraus folgt zunächst die Injektivität von i, und wir dürfen A als Teilmenge von X auffassen. Dann ist auch $Zi = A \times I \cup X \times \{0\}$ eine Teilmenge von $X \times I$. Es sei $\bar{\imath}\colon Zi \to X \times I$ die Inklusionsabbildung. Die Abbildung $H\colon X \times I \to Zi$ erfüllt $H \circ \bar{\imath} = \mathrm{id}_{Zi}$, ist also eine Rektraktion. Wir schließen, dass $Zi \subset X \times I$ und $A \subset X$ jeweils die Unterraumtopologie tragen, siehe Übung 3.128.

Sei jetzt umgekehrt $i\colon A \to X$ eine Einbettung, und es existiere eine Retraktion $\bar{r}\colon X \times I \to Zi$. Dann ist i eine Kofaserung. Denn für beliebige Räume Y entspricht ein Paar von Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $h\colon A \times I \to Y$ wie in Definition 3.55 (1) nach der charakteristischen Eigenschaft 1.83 (2) der Quotiententopologie genau einer stetigen Abbildung $F\colon Zi \to Y$. Dann erfüllt $H = F \circ \bar{r}\colon X \times I \to Y$ gerade die Bedingungen in Definition 3.55 (2).

Da jede Kofaserung eine Einbettung ist, können wir uns also auf Paare (X, A) beschränken. In diesem Fall ist $Zi = X \times \{0\} \cup A \times I$ also ein Retrakt von $X \times I$. Wenn X ein Hausdorff-Raum ist, ist $A \subset X$ abgeschlossen (Übung 3.129).

3.59. Proposition. *Es sind äquivalent:*

(1) (X, A) *ist ein* Umgebungsdeformationsretrakt, *das heißt, es gibt eine Abbildung* $u\colon X \to I$ *und eine Homotopie* $h\colon X \times I \to X$*, so dass*

$$A \subset u^{-1}(0)\ , \tag{a}$$

$$h|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = \pi_X|_{X \times \{0\} \cup A \times I}\ , \tag{b}$$

$$h(x, t) \in A \text{ für alle } x \in X \text{ mit } u(x) < t\ ; \tag{c}$$

(2) $X \times \{0\} \cup A \times I$ *ist starker Deformationsretrakt von* $X \times I$*;*
(3) $X \times \{0\} \cup A \times I$ *ist Retrakt von* $X \times I$*;*
(4) (X, A) *ist eine Kofaserung.*

Der Begriff Umgebungsdeformationsretrakt bedeutet, dass sich eine Umgebung $U = u^{-1}([0,1))$ von A in X (aber nicht notwendigerweise in U) auf A zusammenziehen lässt. Aus (c) schließen wir, dass $u^{-1}(0)$ gerade der Abschluss von A ist. Wenn A abgeschlossen ist, folgt also $A = u^{-1}(0)$.

Beweis. Nach Bemerkung 3.58 sind (3) und (4) äquivalent, und (3) folgt offensichtlich aus (2). Es gelte (1), dann folgt (2) mit der Deformationsretraktion $r\colon X \times I \times I \to X \times I$,

$$r(x,t,s) = \begin{cases} \big(h(x,st),(1-s)t\big) & \text{falls } t \le u(x), \text{ und} \\ \big(h(x,st),t-su(x)\big) & \text{falls } t \ge u(x). \end{cases}$$

Es gelte jetzt (3), und $r\colon X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ sei Retraktion. Es seien $\pi_X\colon X \times I \to X$ und $\pi_I\colon X \times I \to I$ die Projektionen. Dann definiere u und h durch

$$\begin{aligned} u(x) &= \sup_{t\in I}\big(t - \pi_I r(x,t)\big)\ , \\ h(x,t) &= \pi_X r(x,t)\ . \end{aligned}$$

Die Funktion u ist stetig, da I kompakt ist. Die Eigenschaften (a)–(c) sind leicht zu prüfen, also folgt (1). □

3.60. Bemerkung. Mit diesem Ergebnis erhalten wir weitere Beispiele von Kofaserungen.

(1) Nach Bemerkung 3.23 ist das Paar $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$ eine Kofaserung für $n \ge 0$.
(2) Allgemeiner sei M topologischer Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$, dann ist $(M, \partial M)$ eine Kofaserung. Hierzu ist allerdings noch zu zeigen, dass ∂M in M eine Umgebung der Gestalt $\partial M \times [0,1)$ besitzt.

3.61. Folgerung (aus Proposition 3.59). *Es seien (X,A) und (Y,B) Kofaserungen mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ Kofaserung.*

Beweis. Wir nehmen an, dass (X,A) mit $u\colon X \to I$ und $h\colon X \times I \to X$ sowie (Y,B) mit $v\colon Y \to I$ und $k\colon Y \times I \to I$ zu Umgebungsdeformationsrektrakten wie in Proposition 3.59 (1) werden. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ ein Umgebungsdeformationsrektrakt mit $w\colon X \times Y \to I$ und $\ell\colon X \times Y \times I \to X \times Y$, wobei

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \min\big(u(x),v(y)\big)\ , \\ \ell(x,y,t) &= \Big(h\big(x,\min(t,v(y))\big),k\big(y,\min(t,u(x))\big)\Big)\ . \end{aligned}$$

Wir benötigen A und B abgeschlossen, um $\ell(x,y,t) \in A \times Y \cup X \times B$ aus $t > w(t)$ zu folgern. □

Wir benutzen als nächstes die Homotopieausdehnungseigenschaft, um interessante Aussagen über Kofaserungen zu beweisen.

3.62. Proposition. *Es sei (X,A) eine Kofaserung. Falls A zusammenziehbar ist, ist die Quotientenabbildung $X \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Es bezeichne $F\colon X \to X/A$ die Quotientenabbildung. Es sei $h\colon A \times I \to A$ eine Homotopie zwischen id_A und der konstanten Abbildung auf den Punkt $a_0 \in A \subset X$. Mit der Homotopieausdehnungseigenschaft für $\iota \circ h$ erhalten wir eine Homotopie $H\colon X \times I \to X$ mit $H|_{A\times I} = h$ und $H(\,\cdot\,,0) = \mathrm{id}_X$. Da $H(a,1) = a_0$ für alle $a \in A$, induziert $H(\,\cdot\,,1)$ eine Abbildung $G\colon X/A \to X$. Da $G(F(x)) = H(x,1)$ für alle $x \in X$, ist H eine Homotopie zwischen id_X und $G \circ F$.

Da $H(a,t) = h(a,t) \in A$ für alle $a \in A$, induziert H eine Abbildung $\bar{H}\colon (X/A) \times I \to X/A$, und es gilt $\bar{H}(\,\cdot\,,1) = F \circ G$. Also ist $\bar{H}$ eine Homotopie zwischen $\mathrm{id}_{X/A}$ und $F \circ G$. □

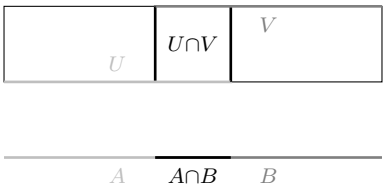


ABBILDUNG 3.7. Der Raum $Y = U \cup V$

In Folgerung 1.86 haben wir Pushouts kennengelernt. Wenn $A \subset X$ Teilmenge und $f\colon A \to B$ stetig ist, schreiben wir hier $X \cup_f B$ statt $B \cup_f X$. Dieser Begriff ist übrigens dual zum Faserprodukt oder Pullback aus Übung 3.114. Ein Spezialfall des Pullbacks ist die Faser, das duale Diagramm liefert die Kofaser einer Kofaserung $A \to X$, nämlich den Quotienten X/A.

3.63. BEISPIEL. Es sei $A \subset X$ Teilmenge und $f\colon A \to \mathrm{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $X \cup_f \mathrm{pt}$ homöomorph zum Quotienten X/A.

Das nächste Resultat ist eine wichtige Übung, siehe 3.130.

3.64. PROPOSITION. *Es sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und $f\colon A \to B$ stetig. Dann ist auch $(X \cup_f B, B)$ eine abgeschlossene Kofaserung.* □

Weitere Aussagen über Kofaserungen folgen in den nächsten Abschnitten. Anstelle beliebiger Paare betrachtet man in der Homotopietheorie besonders gern Kofaserungen. Daher wollen wir ein wichtiges Resultat auf eine Kofaserungs-Situation übertragen.

3.65. FOLGERUNG (Ausschneidungssatz für Kofaserungen). *Es seien A, $B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \emptyset$, so dass $(A, A \cap B)$ eine p-zusammenhängende und $(B, A \cap B)$ eine q-zusammenhängende Kofaserung ist, mit p, $q \geq 0$. Dann ist (X, B) ebenfalls eine Kofaserung, und $i\colon (A, A \cap B) \to (X, B)$ ist eine $(p+q)$-zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

BEWEIS. Wir betrachten die Teilmenge

$$Y = (A \times \{0\}) \cup \big((A \cap B) \times I\big) \cup (B \times \{1\}) \subset X \times I\,,$$

siehe Abbildung 3.7. Nach Proposition 3.59 (2) existieren Homotopien $H\colon A \times I^2 \to A \times I$ zwischen $\mathrm{id}_{A\times I}$ und einer Retraktion auf $A \times \{0\} \cup (A \cap B) \times I$, und $K\colon B \times I^2 \to B \times I$ zwischen $\mathrm{id}_{B\times I}$ und einer Retraktion auf $B \times \{1\} \cup (A \cap B) \times I$. Da $(A \cap B) \times I$ abgeschlossen ist, dürfen wir H und K verkleben und sehen, dass Y Deformationsretrakt von $X \times I$ ist. Insbesondere induziert die Projektion $X \times I \to X$ eine Homotopieäquivalenz $Y \to X$.

Wir zerlegen jetzt Y in offene Teilmengen $U = Y \cap \big(X \times [0, 1)\big)$ und $V = Y \cap \big(X \times (0, 1]\big)$. Dann induziert die obige Projektion Homotopieäquivalenzen $U \to A$, $V \to B$ und $U \cap V \to A \cap B$. Jetzt folgt die Aussage aus dem Ausschneidungssatz 3.38. □

3.g. Konstruktionen mit gut punktierten Räumen

Wir wollen den Ausschneidungssatz benutzen, um Aussagen über Quotienten von Paaren topologischer Räume zu machen. Dazu führen wir zuerst das Koprodukt und ein neues "Produkt" punktierter topologischer Räume ein.

3.66. DEFINITION. Das *Bouquet* oder *Wedge-Produkt* einer Familie $(X_i, x_i)_{i\in I}$ punktierter topologischer Räume ist der punktierte Raum

$$\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) = \coprod_{i\in I} X_i \Big/ \{\, x_i \mid i \in I \,\}$$

mit der Quotiententopologie. Sei $\iota_i\colon (X_i,x_i)\to\big(\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i),x_0\big)$ die natürliche Inklusion.

3.67. Bemerkung. Beim Wedge-Produkt identifizieren wir also in der disjunkten Vereinigung alle Basispunkte. Analog zur disjunkten Vereinigung in der Kategorie *Top* erfüllt das Wedge-Produkt die universelle Eigenschaft eines Koproduktes in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$. Das ergibt sich aus der Konstruktion und den Sätzen 1.78 (3) und 1.83 (2). Wenn alle X_i gut punktiert sind, dann ist auch ihre Bouquet gut punktiert; das zeigt am besten mit dem Diagramm am Anfang von Abschnitt 3.f.

Das kartesische Produkt punktierter Räume erfüllt die universelle Eigenschaft des Produkts in $\mathcal{T}op_+$, siehe Übung 3.105. Insbesondere gibt es eine natürliche Abbildung

$$\iota\colon \bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)\longrightarrow\prod_{i\in I}(X_i,x_i)\ ,$$

so dass

$$\pi_i\circ\iota\circ\iota_j=\begin{cases}\mathrm{id}_{X_i} & \text{für } i=j, \text{ und}\\ c_{x_i} & \text{für } i\neq j,\end{cases}$$

dabei bezeichne c_{x_i} die konstante Abbildung auf den Basispunkt $x_i\in X_i$. Im Folgenden identifizieren wir $\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)$ vermöge ι mit einer Teilmenge von $\prod_{i\in I}(X_i,x_i)$.

3.68. Definition. Das *reduzierte* oder *Smash-Produkt* einer Familie $(X_i,x_i)_{i\in I}$ punktierter topologischer Räume ist der Quotient punktierter Räume

$$\bigwedge_{i\in I}(X_i,x_i)=\prod_{i\in I}(X_i,x_i)\Big/\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)\ .$$

Seien (X,A), (Y,B) punktierte Paare, dann setzen wir

$$(X,A)\wedge(Y,B)=(X\wedge Y,A\wedge Y\cup X\wedge B)\ .$$

Seien $f\colon X_1\to X_2$, $g\colon Y_1\to Y_2$ punktierte Abbildungen von Räumen oder Paaren, dann definieren wir ihr reduziertes Produkt als

$$f\wedge g\colon X_1\wedge Y_1\to X_2\wedge Y_2\qquad\text{mit}\qquad (f\wedge g)(x\wedge y)=f(x)\wedge g(y)\ .$$

Wir können das reduzierte Produkt auch von beliebig vielen Paaren oder Abbildungen bilden. Da wir aber meistens nur endliche reduzierte Produkte benötigen, lassen wir es bei der obigen Definition. Später werden wir die Basispunkte des Öfteren nicht mitschreiben.

3.69. Beispiel. Es folgen einige wichtige elementare Beispiele.

(1) Es gilt $S^k\wedge S^\ell\cong S^{k+\ell}$. Formal sieht man das am einfachsten mit Hilfe der Homöomorphismen

$$S^k\wedge S^\ell\cong(I^k/\partial I^k)\wedge(I^\ell/\partial I^\ell)\cong I^{k+\ell}\,/\,\big(\partial I^k\times I^\ell\cup I^k\times\partial I^\ell\big)=I^{k+\ell}/\partial I^{k+\ell}\cong S^{k+\ell}\ .$$

(2) Es gilt $S^k\wedge(D^\ell,S^{\ell-1})\cong(D^{k+\ell},S^{k+\ell-1})$. Hierzu ersetzen wir S^k durch das Paar $(S^k,*)$ und betrachten

$$\begin{aligned}(S^k,*)\wedge(D^\ell,S^{\ell-1})&\cong(I^k/\partial I^k,\partial I^k/\partial I^k)\wedge(I^\ell/\partial' I^\ell,\partial I^\ell/\partial' I^\ell)\\ &\cong\big(I^{k+\ell}/\underbrace{(\partial I^k\times I^\ell\cup I^k\times\partial' I^\ell)}_{=\partial' I^{k+\ell}},\underbrace{(\partial I^k\times I^\ell\cup I^k\times\partial I^\ell)}_{\partial I^{k+\ell}}/\partial' I^{k+\ell}\big)\cong(D^{k+\ell},S^{k+\ell-1})\ .\end{aligned}$$

3.70. Bemerkung. Das reduzierte Produkt besitzt folgende elementare Eigenschaften.

(1) Das reduzierte Produkt ist ein Funktor $\wedge\colon\mathcal{T}op_+\times\mathcal{T}op_+\to\mathcal{T}op_+$. Insbesondere ist es mit der Verkettung von Abbildungen verträglich.

(2) Es seien X, Y, Z punktierte, lokal kompakte Räume. Dann gibt es natürliche Homöomorphismen

$$(X \vee Y) \vee Z \cong X \vee (Y \vee Z) \,, \qquad (X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z) \,,$$
$$X \vee \mathrm{pt} \cong X \,, \qquad X \wedge S^0 \cong X \,,$$
$$X \vee Y \cong Y \vee X \,, \qquad X \wedge Y \cong Y \wedge X$$
$$\text{und} \qquad X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \,.$$

Diese Homömorphismen sind miteinander verträglich. Mithin verhalten sich lokal kompakte Räume unter $\vee$ und $\wedge$ (bis auf natürliche Homöomorphismen) wie ein kommutativer Halbring mit Null und Eins. In Kapitel 4 führen wir Kategorien $k\mathcal{T}op_+$ und $kw\mathcal{H}_+$ ein, in denen die obigen Rechenregeln ohne Einschränkung gelten.

(3) Ein reduziertes Produkt gut punktierter Räume ist wieder gut punktiert. Dazu benutzen wir Folgerung 3.61 und Proposition 3.64, und stellen $X \wedge Y$ als Pushout der Kofaserung $(X \times Y, X \vee Y)$ längs der konstanten Abbildung $X \vee Y \to \mathrm{pt}$ dar.

Genauso ist ein reduziertes Produkt gut punktierter, abgeschlossener Kofaserungen wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung (Übung 3.136).

(4) Seien (X, A) und (Y, B) gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen, und sei $(Z, C) = (X, A) \wedge (Y, B)$, dann gilt $Z/C \cong (X/A) \wedge (Y/B)$. Eine analoge Eigenschaft haben wir in Beispiel 3.69 (1) bereits benutzt.

Man beachte, dass das reduzierte Produkt nicht die universelle Eigenschaft eines Produktes aus Satz 1.53 auf $\mathcal{T}op_+$ erfüllt — diese Rolle übernimmt das punktierte kartesische Produkt, wie wir bereits aus Übung 3.105 wissen. Stattdessen legen die obigen Eigenschaften nahe, es als eine Art Tensorprodukt zu betrachten. Diesen Standpunkt werden wir später noch näher beleuchten.

3.71. Definition. Es sei (X, x_0) ein gut punktierter topologischer Raum, und 0 der Basispunkt des Einheitsintervalles I. Dann definieren wir den (*reduzierten*) *Kegel* und den reduzierten Zylinder ZX über X als

$$CX = X \wedge I \qquad .$$

Wir identifizieren X mit der Teilmenge $X \times \{1\} \subset CX$. Analog definieren wir den (*reduzierten*) *Zylinder* $ZX = X \wedge I_+$.

Es sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann definieren wir den (*reduzierten*) *Abbildungszylinder* Zf und den (*reduzierten*) *Abbildungskegel* Cf als Pushouts

$$Zf = ZX \cup_f Y \qquad \text{und} \qquad Cf = CX \cup_f Y \,,$$

wobei wir hier X mit dem Bild von $X \times \{1\}$ in ZX beziehungsweise CX identifizieren. Es sei (X, A) ein punktiertes Paar mit Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$, dann definieren wir den *Homotopiequotienten* (auch die *Homotopiekofaser*) $X /\!\!/ A$ als

$$X /\!\!/ A = Ci = X \cup_A CA$$

Die (*reduzierte*) *Einhängung* oder (*reduzierte*) *Suspension* von X oder (X, A) ist definiert als

$$SX = X \wedge S^1 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad (SX, SA) \,.$$

Die Einhängung einer punktierten Abbildung $f\colon X \to Y$ ist definiert als

$$Sf = f \wedge \mathrm{id}_{S^1} \colon SX \to SY \,.$$

Wir können auch die unreduzierten Varianten $X \times I$, $CX_+ = X_+ \wedge I$, $(X \times I) \cup_f Y$, $CX_+ \cup_f Y$, $X_+ /\!\!/ A_+$ und $\Sigma X = CX_+ \cup_X CX_+$ betrachten. Wenn X und gegebenenfalls A gut punktiert sind, sind sie nach Proposition 3.62 zu den entsprechenden reduzierten Varianten homotopieäquivalent. Tatsächlich ist Zi in Bemerkung 3.58 der Abbildungszylinder in $\mathcal{T}op$, das heißt, er ist unreduziert.

3.72. Bemerkung. In den obigen Konstruktionen tauchen einige Kofaserungen auf. Wir schreiben sie in Diagrammen als gefiederte Pfeile $\rightarrowtail$. Wir nehmen an, dass X und Y gut punktiert sind.

(1) Wenn wir mit der Kofaserung $(I, \partial I) = (D^1, S^0)$ aus Bemerkung 3.60 (1) starten, erhalten wir mit Folgerung 3.61 und Proposition 3.64 ein Diagramm aus Pushouts der Form

$$\begin{array}{ccccc} X \vee X & \xrightarrow{c\vee\mathrm{id}} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ZX & \longrightarrow & CX & \longrightarrow & Cf\ . \end{array}$$

dabei sei c die konstante Abbildung auf den Basispunkt. Insbesondere sind (CX, X) und (Cf, Y) abgeschlossene Kofaserungen. Wenn wir nicht reduzieren, erhalten wir analog Kofaserungen (CX_+, X) und $(CX_+ \cup_f Y, Y)$.

(2) Wir können die Pushouts auch in einer anderen Reihenfolge bilden und erhalten dann

$$\begin{array}{ccccc} X \vee X & \xrightarrow{\mathrm{id}\vee f} & X \vee Y & \xrightarrow{c\vee\mathrm{id}} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ZX & \longrightarrow & Zf & \longrightarrow & Cf\ . \end{array}$$

Inbesondere ist auch $X \rightarrowtail X \vee Y \rightarrowtail Zf$ eine Kofaserung. Man sieht leicht, dass $Y \subset Zf$ ein Deformationsretrakt ist, das heißt, wir können f in eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz zerlegen:

$$X \rightarrowtail Zf \xrightarrow{\cong} Y\ .$$

(3) Sei jetzt (X, A) ebenfalls eine abgeschlossene Kofaserung. Dann dürfen wir den Pushout „umdrehen“ und erhalten eine Kofaserung $(X/\!\!/A, CA)$. Da CA_+ zusammenziehbar ist, ist CA nach Proposition 3.62 zusammenziehbar, und $X/\!\!/A$ ist homotopieäquivalent zum Quotienten $(X/\!\!/A)/CA \cong X/A$. Wir betrachten $X/\!\!/A$ als Ersatz für den Quotienten bis auf Homotopie, selbst wenn (X, A) keine abgeschlossene Kofaserung ist. Daher der Name „Homotopiequotient“.

3.73. Proposition. *Es sei (X, A) eine p-zusammenhängende abgeschlossene Kofaserung und A sei q-zusammenhängend mit $p \geq 0$, $q \geq -1$. Dann ist die Quotientenabbildung $(X, A) \to (X/A, *)$ eine $p + q + 1$-zusammenhängende Abbildung.*

Wenn A nicht zusammenhängend ist, sei $q = -1$.

Beweis. Anstelle von X/A betrachten wir den Raum $X/\!\!/A = X \cup_A CA$. Da CA zusammenziehbar und A ein q-zusammenhängender Raum ist, ist (CA, A) ein $(q+1)$-zusammenhängendes Paar nach Definition 3.35. Nach dem Ausschneidungssatz 3.65 ist die Inklusion $(X, A) \to (X \cup_A CA, CA)$ eine $(p + q + 1)$-zusammenhängende Abbildung. Da CA zusammenziehbar und die Quotientenabbildung $X \cup_A CA \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt $\pi_k(X \cup_A CA, CA) \cong \pi_k(X \cup_A CA) \cong \pi_k(X/A)$ für alle k. □

3.74. Beispiel. Wir betrachten das 1-zusammenhängende Paar (D^2, S^1). Da S^1 zusammenhängend ist, erhalten wir eine 2-zusammenhängende Quotientenabbildung $(D^2, S^1) \to (S^2, *)$. Tatsächlich gilt $\pi_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_2(S^2)$, aber $0 \cong \pi_3(D^2, S^1) \to \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ist nicht mehr surjektiv.

3.75. Folgerung (aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (X, A)). *Es sei (X, A) eine p-zusammenhängende Kofaserung mit $p \geq 0$, und A sei q-zusammenhängend. Dann erhalten wir*

eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X/A) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \pi_{p+q}(X) \longleftarrow \pi_{p+q}(A)\ .$$

Beweis. Wir betrachten die lange exakte Sequenz für Paare und erhalten

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_{p+q}(X,A) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(X) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{p+q+1}(X,A) & \longleftarrow & \cdots \\
\cong\downarrow & & \| & & \| & & \downarrow & & \\
\pi_{p+q}(X/A) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(X) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(A) & & \pi_{p+q+1}(X/A)\ . & &
\end{array} \qquad \square$$

Im Allgemeinen gibt es keine passende Abbildung $\partial\colon \pi_{p+q+1}(X/A) \to \pi_{p+q}(A)$, die die Sequenz verlängert oder das Diagramm vervollständigt. Für $(X,A) = (D^3, S^2)$ mit $p = 2$ und $q = 1$ erhalten wir beispielsweise

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_3(D^3) & \longleftarrow & \pi_3(S^2) & \xleftarrow[\cong]{\partial} & \pi_4(D^3,S^2) \\
\| & & \| & & \downarrow \\
\pi_3(S^3) & \longleftarrow & \pi_3(S^2) & & \pi_4(S^3)\ . \\
{\scriptstyle =0} & & {\scriptstyle \cong\mathbb{Z}} & & {\scriptstyle \cong\mathbb{Z}/2}
\end{array}$$

3.h. Stabile Homotopiegruppen

Wir beweisen den Freudenthalschen Einhängungssatz und zeigen, dass Homotopiegruppen unter iterierter Einhängung „stabil“ werden. Diese stabile Homotopiegruppen haben einige angenehme Eigenschaften. Unter anderem können wir abgeschlossene Kofaserungen durch ihre Quotienten ersetzen, ohne höheren Zusammenhang vorauszusetzen. Tatsächlich liefert stabile Homotopietheorie den Prototyp für eine Homologietheorie. Allerdings bezahlen wir auch einen Preis: die einfachen Formeln für Produkte und die lange exakte Sequenz für Faserbündel gehen verloren.

3.76. Satz (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Es sei X ein n-zusammenhängender, gut punktierter Raum, dann ist der Einhängungshomomorphismus*

$$S\colon \pi_k(X) \to \pi_{k+1}(SX)$$

ein Isomorphismus für $k \leq 2n$ und surjektiv für $k = 2n+1$. Insbesondere ist SX ein $(n+1)$-zusammenhängender Raum.

Wir haben genau dieses Verhalten für $X = S^n$ bereits in Satz 3.42 (4) beobachtet.

Beweis. Wir erinnern uns an den reduzierten Kegel CX aus Definition 3.71. Wir hatten in Bemerkung 3.72 (1) die Basis des Kegels CX mit X identifiziert und gezeigt, dass (CX, X) eine Kofaserung ist. Für den Quotienten erhalten wir

$$CX/X \cong (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) \cong (X \times S^1)/(X \vee S^1) \cong SX\ .$$

Wir fahren ähnlich fort wie im Beweis des Satzes 3.42 von Brouwer und Hopf. Da CX zusammenziehbar ist, erhalten wir in der langen exakten Homotopiesequenz 3.19 des Paares (CX, X) einen Isomorphismus $\partial\colon \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X)$. Die Umkehrabbildung wird induziert von $f \mapsto f \wedge \mathrm{id}_{(I,1)}$. Wir schalten die Quotientenabbildung $q\colon CX \to SX$ nach und erhalten die gesuchte Abbildung

$$S\colon \pi_k(X) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{q_*} \pi_{k+1}(SX)\ .$$

Da X ein n-zusammenhängender Raum und CX zusammenziehbar ist, ist (CX, X) ein $(n+1)$-zusammenhängendes Paar. Unsere Behauptung folgt also aus Proposition 3.73 über die Quotientenabbildung q. □

3.77. Bemerkung. Wir betrachten Abbildungen zwischen Einhängungen.

(1) Es seien X, Y punktierte Räume. Auf der Menge $[SX, Y]$ der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen $SX \to Y$ können wir wie in den Definitionen 2.12 und 3.1 eine Gruppenstruktur definieren durch

$$(f+g)(x \wedge t) = \begin{cases} f\big(x \wedge (2t)\big) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g\big(x \wedge (2t-1)\big) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für $t \in \big\{0, \frac{1}{2}, 1\big\}$ bildet sie auf den Basispunkt y_0 ab, ebenso wie im Falle, dass $x = x_0$.

(2) Indem wir diese Konstruktion iterieren, erhalten wir Gruppenstrukturen auch auf $[S^k X, Y]$ für alle $k \ge 1$. Im Falle $k \ge 2$ ist $[S^k X, Y]$ abelsch wie in Satz 3.5 (3).

(3) Als Spezialfall der obigen Konstruktion betrachten wir $[S^k X, S^k Y]$. Da Einhängung ein Funktor ist, erhalten wir eine Abbildung

$$S\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^{k+1} X, S^{k+1} Y] \qquad \text{mit} \qquad f \mapsto Sf\ .$$

Nach Bemerkung 3.70 (2) ist das reduzierte Produkt assoziativ und kommutativ. Wir können also dafür sorgen, dass die „neue“ Kopie von S^1 in $S^{k+1}X = S(S^k X)$ nicht diejenige ist, mit der wir oben die Gruppenstruktur definiert haben. Daher ist $S\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$ ein Gruppenhomomorphismus.

(4) Wir wissen aus Übung 3.120, dass $[S^n, S^n]$ mit der Hintereinanderschaltung zu einem Ring wird. Analog sehen wir, dass Hintereinanderausführung eine bilineare Abbildung

$$[S^n Y, S^n Z] \times [S^n X, S^n Y] \xrightarrow{\circ} [S^n X, S^n Z]$$

liefert.

In Folgerung 1.87 haben wir die universelle Eigenschaft des Kolimes kennengelernt und Kolimiten für Familien topologischer Räume definiert. Auch in der Kategorie der abelschen Gruppen gibt es Kolimiten. Sei dazu $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie abelscher Gruppen mit Homomorphismen $f_{k\ell}\colon G_k \to G_\ell$, so dass $f_{k\ell} \circ f_{jk} = f_{j\ell}$ für alle $j \le k \le \ell$. Dann definieren wir in Analogie zu (1.4) den Kolimes

$$G = \varinjlim G_k = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} G_k \Big/ \sim\ ,$$

wobei $G_j \ni g_j \sim g_k \in G_k$ genau dann gelte, wenn es ein $\ell \ge k, j$ gibt, so dass $f_{j\ell}(g_j) = f_{k\ell}(g_k) \in G_\ell$. Für jedes k erhalten wir eine natürliche Abbildung $f_k\colon G_k \to G$ mit $g_k \mapsto [g_k] \in G$, so dass $f_k = f_\ell \circ f_{k\ell}$ für alle $k \le \ell$. Man kann sich davon überzeugen, dass G eine Gruppe ist, dass alle f_k Gruppenhomomorphismen sind, und dass $\big(G, (f_k)_k\big)$ die universelle Eigenschaft eines Kolimes aus Folgerung 1.87 erfüllt. Beispiele gibt es in Übung 3.138.

Hier haben wir zunächst Abbildungen $S\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$. Hintereinanderschalten von $(\ell - k)$ dieser Abbildungen liefert $f_{k\ell}\colon [S^k X, S^k Y] \to [S^\ell X, S^\ell Y]$. Bei einem Kolimes kommt es nie auf die ersten Glieder in der Folge an. Daher stört es im Folgenden nicht, dass im Allgemeinen $[X, Y]$ keine Gruppe und $[SX, SY]$ nicht abelsch ist. Wir dürfen am Anfang der Folge sogar negative Indizes zulassen.

Sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_k(X) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SX) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2X) & \longrightarrow & \cdots \\
{\scriptstyle \pi_k f}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_{k+1}Sf}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_{k+1}S^2 f}\downarrow & & \\
\pi_k(Y) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SY) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2Y) & \longrightarrow & \cdots\,,
\end{array}$$

denn für $u\colon S^k \to X$ gilt nach Bemerkung 3.70 (1), dass

$$\big(\pi_{k+1}Sf\big)(S[u]) = \big[(f \wedge \mathrm{id}_{S^1}) \circ (u \wedge \mathrm{id}_{S^1})\big] = \big[(f \circ u) \wedge \mathrm{id}_{S^1}\big] = S\big((\pi_k f)[u]\big)\,. \tag{3.7}$$

Die obere Reihe des Diagramms „konvergiert“ gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^nX)$ für $n \to \infty$, die untere gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^nY)$, und die Abbildungen $\pi_{k+n}S^nf$ induzieren eine Abbildung zwischen diesen Kolimiten.

3.78. Definition. Es seien X, Y punktierte Räume, dann definieren wir

$$[X,Y]^s = \varinjlim [S^nX, S^nY] \in \mathcal{A}b\,.$$

Insbesondere definieren wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ die *k-te stabile Homotopiegruppe* von X als

$$\pi_k^s(X) = [S^k, X]^s = \varinjlim \pi_{k+n}(S^nX) \in \mathcal{A}b\,.$$

Für Abbildungen $f\colon X \to Y$ definieren wir

$$\pi_k^s f = \varinjlim \pi_{k+n}S^nf\colon \pi_k^s(X) \to \pi_k^s(Y)\,.$$

Wir könnten jetzt die Spanier-Whitehead-Kategorie mit den gleichen Objekten wie in $\mathcal{T}op_+$ und $\mathcal{HT}op_+$ definieren, und als Morphismenmengen die Gruppen $[X,Y]^s$ einsetzen. Diese „naive“ stabile Homotopiekategorie enthält aber für Anwendungen zum einen zu wenig Objekte, so dass man später zu sogenannten „Spektren“ übergeht. Zum anderen enthält sie zu wenig Morphismen, so dass man stabile Abbildungen später über den einen oder anderen Umweg definiert. Im Falle der stabilen Homotopiegruppen sind diese Überlegungen allerdings nicht notwendig, so dass wir hier bereits das Wort „stabil“ benutzen dürfen.

3.79. Proposition. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind die stabilen Homotopiegruppen Funktoren*

$$\pi_k^s\colon \mathcal{HT}op_+ \to \mathcal{A}b\,. \quad \square$$

Ein Kolimes ist besonders leicht dann zu berechnen, wenn die Folge der betrachteten Objekte irgendwann stationär wird, das heißt, wenn die Abbildungen $f_{k\ell}\colon G_k \to G_\ell$ für alle k, $\ell \geq n_0$ Isomorphismen sind. In diesem Fall ist der Kolimes G natürlich isomorph zu allen Gruppen G_k mit $k \geq n_0$. Genau dieses Phänomen beobachten wir im Fall der stabilen Homotopiegruppen.

3.80. Folgerung (aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76). *Für jeden gut punktierten topologischen Raum X gilt*

$$\pi_k^s(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(S^\ell X) & \text{falls } k \geq 0 \text{ und } \ell \geq k+2. \end{cases}$$

Wenn X ein n-zusammenhängender Raum ist, gilt sogar

$$\pi_k^s(X) \cong \pi_{k+\ell}(S^\ell X) \qquad \text{falls } \ell \geq \max(k-2n, 0)\,. \quad \square$$

3.81. Definition. Ein *gutes Paar* (X, A, x_0) ist eine abgeschlossene Kofaserung, bei der (A, x_0) gut punktiert ist.

Zu jedem guten Paar betrachten wir die Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$ und die Quotientenabbildung $q\colon X \to X/A$. Für Abbildungen f schreiben wir wieder kurz $f_* = \pi_k^s f$, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind.

3.82. Satz (stabile Homotopiesequenz). *Für gute Paare (X, A) erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz abelscher Gruppen*

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}^s(A) \xleftarrow{\partial} \pi_k^s(X/A) \xleftarrow{q_*} \pi_k^s(X) \xleftarrow{i_*} \pi_k^s(A) \longleftarrow \cdots$$

Diese Sequenz haben wir in Folgerung 3.75 bereits für die „unstabilen“ Homotopiegruppen gesehen, allerdings hat sie dort auf beiden Seiten nach endlich vielen Schritten aufgehört.

Beweis. Wir starten wieder mit den langen exakten Sequenzen der Paare $(S^n X, S^n A)$ aus Satz 3.19. Sie sind mit Einhängung verträglich, das heißt, das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(X) & \xleftarrow{\pi_{k-1} i} & \pi_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(X, A) & \xleftarrow{\pi_k q} & \pi_k(X) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle S} & & \\
\cdots & \longleftarrow & \pi_k(SX) & \xleftarrow{\pi_k Si} & \pi_{k-1}(SA) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{k+1}(SX, SA) & \xleftarrow{\pi_{k+1} S q_*} & \pi_{k+1}(SX) & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

kommutiert. Dadurch erhalten wir die gesuchte Sequenz als Kolimes der obigen Sequenzen unter iterierter Einhängung. Jedes endliche Stück der obigen Sequenz wird durch ausreichend häufiges Einhängen stationär. Für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell A)$ und $\pi_{k+\ell}(S^\ell X)$ erhalten wir das mit Folgerung 3.80, und für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ ergibt es sich aus dem Fünferlemma 3.20. Schließlich dürfen wir $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ für hinreichend hohe ℓ nach Proposition 3.73 und Bemerkung 3.70 (3) und (4) durch $\pi_{k+\ell}(S^\ell(X/A))$ ersetzen.

Die äußeren Quadrate der obigen Sequenz kommutieren wegen der Funktorialität der Einhängung, siehe (3.7). Für das mittlere Quadrat betrachten wir die Konstruktion von ∂ in Satz 3.19. Es sei $[u] \in \pi_k(X, A)$ repräsentiert durch

$$u\colon (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \to (X, A)\ .$$

Mit Beispiel 3.69 (2) sehen wir schließlich, dass

$$\begin{aligned}
\partial S u = \partial(u \wedge \mathrm{id}_{S^1}) = (u \wedge \mathrm{id}_{S^1})|_{(I^k \times \{0\})/(\partial I^k \times \{0\})} \\
= \big(u|_{(I^{k-1} \times \{0\})/(\partial I^{k-1} \times \{0\})}\big) \wedge \mathrm{id}_{S^1} = \partial u \wedge \mathrm{id}_{S^1} = S \partial u\ .
\end{aligned}$$

Also kommutieren S und ∂, und wir erhalten den Verbindungshomorphismus auch im Kolimes.

Die stabile lange exakte Sequenz im Satz ist natürlich, da die einzelnen Sequenzen natürlich sind. □

3.83. Bemerkung. Motiviert durch den obigen Beweis können wir $\pi_k^s(X, A) = \pi_k^s(X/A)$ definieren. Dann gilt eine lange exakte Sequenz für Paare wie in Satz 3.19. Den Ausschneidungssatz für stabile Homotopiegruppen bekommen wir geschenkt, denn wenn $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ gute Paare sind, gilt $A/(A \cap B) \cong X/B$, also erst recht $\pi_k^s(A, A \cap B) \cong \pi_k^s(X, B)$. Wir dürfen dabei aber nicht vergessen, dass sowohl Proposition 3.73 über Quotienten als auch der Freudenthalsche Einhängungssatz 3.76 wesentlich auf dem Ausschneidungssatz beruhen.

Es sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie gut punktierter Räume, und $\iota_j\colon X_j \to X = \bigvee_{j \in J} X_j$ seien die Strukturabbildungen. Nach Bemerkung 3.70 (2) gilt

$$S^\ell X = \bigvee_{j \in J} S^\ell X_j$$

mit Strukturabbildungen $S^\ell \iota_j \colon S^\ell X_j \to S^\ell X$. Dann erhalten wir Abbildungen $\iota_{j*} \colon \pi_k^s(X_j) \to \pi_k^s(X)$ für alle $j \in J$. Aufgrund der universellen Eigenschaft 1.79 des Koproduktes $\bigoplus_{j\in J} \pi_k^s(X_j)$ induzieren diese Abbildungen eine eindeutige Abbildung

$$\bigoplus_{j\in J} \iota_{j*} \colon \bigoplus_{j\in J} \pi_k^s(X_j) \to \pi_k^s(X) = \pi_k^s\Big(\bigvee_{j\in J} X_j\Big) \ .$$

3.84. Proposition. *Die obige Abbildung $\bigoplus \iota_{j*}$ ist ein natürlicher Isomorphismus.*

Beweis. Falls die Indexmenge $J = \{1, \dots, N\}$ endlich ist, zeigen wir die Behauptung durch Induktion über N. Dazu betrachten wir das Paar $\big(\bigvee_{j=1}^N X_j, \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\big)$ zusammen mit der Inklusion und der Quotientenabbildung

$$\iota_N \colon X_N \hookrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j \qquad \text{und} \qquad q_N \colon \bigvee_{j=1}^N X_j \twoheadrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j \Big/ \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j \cong X_N \ .$$

Da $q_N \circ \iota_N = \mathrm{id}_{X_N}$, spaltet die lange exakte Sequenz

$$\cdots \leftarrow \pi_k^s(X_N) \underset{\iota_{N*}}{\overset{q_{N*}}{\leftrightarrows}} \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \leftarrow \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \leftarrow \dots$$

aus Satz 3.82. Induktiv erhalten wir

$$\pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \cong \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \oplus \pi_k^s(X_N) \cong \bigoplus_{i=1}^N \pi_k^s(X_j) \ .$$

Im Falle eine unendlichen Indexmenge zeigen wir zuerst Surjektivität. Dazu wählen wir zunächst einen Repräsentanten $[f] \in \pi_{k+n}(S^n X)$, der wiederum dargestellt wird durch

$$f \colon S^{k+n} \longrightarrow S^n X = \bigvee_{j\in J} S^n X_j \ .$$

Da X gut punktiert ist, ist auch $S^n X$ nach Bemerkung 3.70 (3) gut punktiert. Wir bestimmen $u \colon S^n X \to I$ und $h \colon S^n X \times I \to S^n X$ wie in Proposition 3.59 (1). Dann erhalten wir eine offene Umgebung $U = u^{-1}([0,1))$ vom Basispunkt $* \in S^n X$, so dass h die Menge U in $S^n X$ relativ zu $*$ auf $*$ zusammenzieht. Außerdem sei $U_j = S^n X_j \setminus \{*\} \subset S^n X$, dann ist U_j ebenfalls offen, und die Mengen U und $(U_j)_{j\in J}$ überdecken $S^n X$.

Da f stetig und S^{k+n} kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J_0 \subset J$, so dass

$$S^{k+n} = f^{-1}(U) \cup \bigcup_{j\in J_0} f^{-1}(U_j) \ .$$

Die Teilmenge $\bigcup_{j\in J_0} f^{-1}(U_j) \subset S^{k+n}$ ist offen, und ihr Rand wird auf den Basispunkt in X abgebildet. Durch Verkleben erhalten wir eine Homotopie

$$(s,t) \longmapsto \begin{cases} h(f(s),t) & \text{falls } s \notin \bigcup_{j\in J_0} f^{-1}(U_j), \text{ und} \\ f(s) & \text{falls } s \in \overline{\bigcup_{j\in J_0} f^{-1}(U_j)} \ . \end{cases}$$

Für $t = 1$ trifft diese Abbildung nur noch diejenigen X_j mit $j \in J_0$. Wir erhalten eine Abbildung $g \sim f$ mit

$$g \colon S^{k+n} \longrightarrow \bigvee_{j\in J_0} S^n X_j \hookrightarrow \bigvee_{j\in J} S^n X_j \ .$$

Somit liegt $[f] = [g]$ im Bild von $\pi_k^s\big(\bigvee_{j\in J_0} X_j\big) \cong \bigoplus_{J_0} \pi_k^s(X_j)$, also auch im Bild von $\bigoplus_J \pi_k^s(X_j)$.

Um Injektivität zu zeigen, sei $\sum_{i\in I}[f_i]$ ein Element des Kernes, insbesondere $[f_i] \in \pi_k^s(X_i)$, und $[f_i] = 0$ für fast alle i. Wir betrachten einen Repräsentanten $f\colon S^{k+n} \to S^n X$, der nur endlich viele der X_i trifft. Dann können wir eine Nullhomotopie h wie oben ebenfalls auf einen endlichen Teil des Koproduktes herunterdrücken, und die Behauptung folgt. □

3.85. Bemerkung. Wir haben jetzt bei einigen bekannten Resultaten die lästigen Zusammenhangsvoraussetzung durch den Übergang zu stabilen Homotopiegruppen eliminiert. Wir haben aber auch einige schöne Eigenschaften verloren: da die Einhängung eines kartesischen Produktes kein Produkt mehr ist, geht die Produktformel aus Beispiel 3.28 verloren, genauso wie die lange exakte Homotopiesequenz 3.25 für Serre-Faserungen. Anstelle dieser Resultate treten Spektralsequenzen, die für viele Berechnungen zu sperrig sind.

Die Kunst im Umgang mit Homotopiegruppen besteht daher oft darin, möglichst viele Rechnungen im sogenannten „stabilen Bereich“ durchzuführen, also für solche k, für die $\pi_k(X) \cong \pi_k^s(X)$ für den jeweiligen Raum X noch gilt.

3.i. Gerahmter Bordismus

Wir geben jetzt eine differentialtopologische Beschreibung der stabilen Homotopiegruppen. Der Begriff einer k-dimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ sollte bekannt sein. Wir lassen im Folgenden übrigens auch die leere Menge als Untermannigfaltigkeit zu. In jedem Punkt $p \in M$ spaltet sich $\mathbb{R}^n$ auf in den Tangentialraum T_pM an M und den dazu senkrechten Normalenraum ν_pM. Diese Unterräume des $\mathbb{R}^n$ hängen stetig von $p \in M$ ab, insbesondere bildet die Vereinigung aller ν_pM eine Untermannigfaltigkeit 9von $M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, das *Normalenbündel* νM von M. Dabei identifizieren wir $p \in M$ mit dem Nullvektor an der Stelle p und erhalten einen Einbettung $M \hookrightarrow \nu M$, den *Nullschnitt.*

Unter einer *Trivialisierung* des Normalenbündels von M verstehen wir eine stetige Abbildung $\tau\colon \nu M \to M\times\mathbb{R}^{n-k}$, so dass $\tau_p\colon \nu_pM \to \{p\}\times\mathbb{R}^{n-k}$ für alle $p \in M$ ein linearer Isomorphismus ist. Äquivalent dazu können wir jedem $p \in M$ auf stetige Weise einen Rahmen $(v_1, \dots, v_{k-n})$, das heißt, eine Basis von ν_pM, zuordnen, so dass $\tau(v_j) = (p, e_j) \in M \times \mathbb{R}^{n-k}$. Daher nennen wir τ auch *Rahmung* von M.

Sei schließlich τ eine Rahmung von $M \subset \mathbb{R}^n$, und sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Länge > 0. Dann können wir das Normalenbündel $\nu(J \times M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $J \times \nu M \to J \times M$ identifizieren, da die zusätzliche Richtung im umgebenden Raum tangential zu J ist, also nicht zum Normalenbündel beiträgt. Daher induziert τ eine Rahmung $\tau \circ \pi_{\nu M}\colon \nu(J \times M) \cong J \times \nu M \to \mathbb{R}^{n-k}$.

3.86. Definition. Es seien $0 \le k < n$.

(1) Eine *gerahmte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$ besteht aus
   (a) einer glatten, kompakten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ (ohne Rand) für ein $n > k$, und
   (b) einer Trivialisierung $\tau\colon \nu M \to M \times \mathbb{R}^{n-k}$ des Normalenbündels von M in $\mathbb{R}^n$, der *Rahmung.*

(2) Ein *gerahmter Bordismus* zwischen zwei k-dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeiten (M_i, τ_i) $(i = 0, 1)$ des $\mathbb{R}^n$ besteht aus
   (a) einer glatten, kompakten $(k+1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $W \subset I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Rand $\partial W \subset \partial I \times \mathbb{R}^n$ mit *Krägen*

$$W \cap \big([0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^n\big) = [0,\varepsilon) \times M_0 \quad \text{und} \quad W \cap \big((1-\varepsilon,1] \times \mathbb{R}^n\big) = (1-\varepsilon,1] \times M_1$$

   für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, und

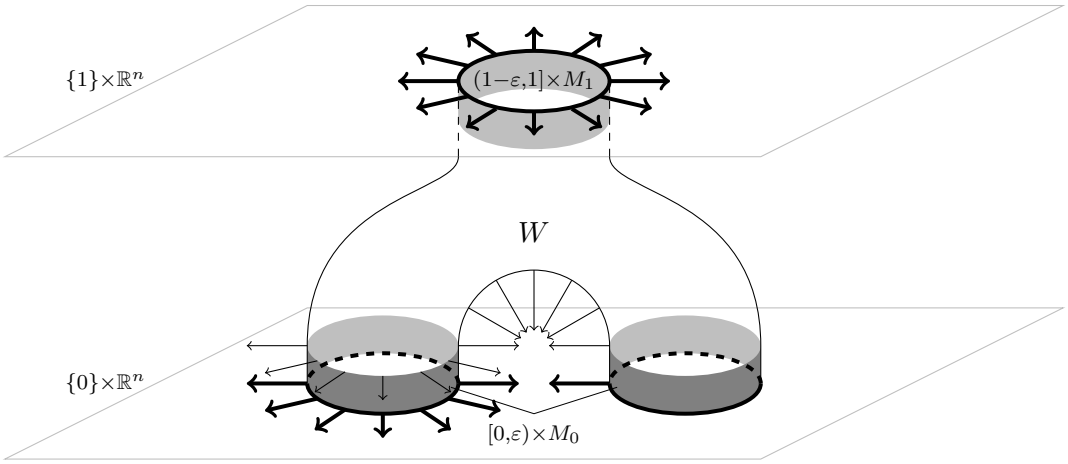


ABBILDUNG 3.8. Ein gerahmter Bordismus

(b) einer Trivialisierung $\bar\tau\colon \nu W \to W \times \mathbb{R}^{n-k}$ von νW, so dass auf den Krägen

$$\bar\tau|_{[0,\varepsilon)\times M_0} = \tau_0 \circ \pi_{\nu M_0}\colon \nu W|_{W\cap([0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$
$$\text{und} \qquad \bar\tau|_{(1-\varepsilon,1]\times M_1} = \tau_1 \circ \pi_{\nu M_1}\colon \nu W|_{W\cap((1-\varepsilon,1]\times\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}\ .$$

(3) Zwei gerahmte k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ heißen *gerahmt bordant,* wenn ein gerahmter Bordismus zwischen ihnen existiert. Es bezeichne $\Omega_k^{\mathrm{fr},n}$ die Menge aller gerahmten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ bis auf gerahmten Bordismus.

In (2) schreiben wir

$$\partial(W,\bar\tau) = \partial_0(W,\bar\tau) \sqcup \partial_1(W,\bar\tau) \qquad \text{mit } \partial_i(W,\bar\tau) = (M_i,\tau_i)\ .$$

Wenn $\partial_1(W,\bar\tau) = \emptyset$ gilt, nennen wir (M_0,τ_0) *gerahmt nullbordant* und $(W,\bar\tau)$ einen *gerahmten Nullbordismus* von (M_0,τ_0).

Die einzigen kompakten Untermannigfaltigkeiten, die wir uns gut vorstellen können, sind geschlossene Kurven im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ („Knoten“) sowie orientierbare Flächen im $\mathbb{R}^3$. Für alle diese Untermannigfaltigkeiten finden wir Rahmungen (für Knoten sogar abzählbar viele nicht homotope). Es gibt aber auch Untermannigfaltigkeiten höherer Dimension und Kodimension, die keine Rahmungen zulassen.

Als Beispiel für einen Bordismus betrachten wir eine „Hose“ wie in Abbildung 3.8, deren Rand aus zwei Kreisen in $\{0\}\times\mathbb{R}^2$ und einem Kreis in $\{1\}\times\mathbb{R}^2$ besteht. Wir erhalten eine kompatible Trivialisierung des Normalenbündels zum Beispiel, wenn wir jeweils für alle Kreise die nach außen beziehungsweise die nach innen weisenden Normalenvektoren gewählt haben.

3.87. BEMERKUNG. Wir überprüfen, dass „gerahmt bordant“ eine Äquivalenzrelation definiert.

(1) Sei (M,τ) gerahmte Mannigfaltigkeit, dann ist $W = I\times M$ ein Bordismus, und τ induziert eine Trivialisierung $\bar\tau$ von νW, die τ an beiden Randkomponenten fortsetzt.
(2) Sei W ein gerahmter Bordismus zwischen (M_0,τ) und (M_1,τ_1). Spiegeln an der Ebene $\left\{\frac12\right\}\times\mathbb{R}^n$ liefert einen Bordismus zwischen M_1 und M_0, und die Trivialisierung $\bar\tau$ lässt sich mitspiegeln.
(3) Sei schließlich $(W',\bar\tau')$ gerahmter Bordismus zwischen (M_0,τ_0) und (M_1,τ_1), und $(W'',\bar\tau'')$ sei gerahmter Bordismus zwischen (M_1,τ_1) und (M_2,τ_2). Wir stauchen beide Bordismen auf $\left[0,\frac12\right]\times\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\left[\frac12,1\right]\times\mathbb{R}^n$, dann bildet die Vereinigung W aufgrund der Produktstruktur auf den Krägen wieder eine glatte Mannigfaltigkeit, und wir wählen $\varepsilon =$

$\min\left(\frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2}\right)$. Die Trivialisierungen $\bar\tau'$ und $\bar\tau''$ stimmen nach Stauchung auf $\left(\frac12-\varepsilon, \frac12+\varepsilon\right)$ mit der von τ_1 induzierten Trivialisierung überein, und lassen sich daher auf ganz W fortsetzen.

Wir haben also gezeigt, dass gerahmter Bordismus eine wohldefinierte Äquivalenzrelation darstellt.

Sei (M,τ) eine gerahmte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und sei $p \in M$. Wir definieren eine Abbildung $a\colon \nu M \to \mathbb{R}^n$ durch

$$a(p,v) = p + v \ .$$

An der Stelle $(p,0) \in M \times \{0\} \subset \nu M$ mit $p \in M$ hat νM den Tangentialraum

$$T_{(p,0)}\nu M = T_pM \oplus \nu_pM \cong \mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n \ ,$$

und wir sehen, dass $da_{(p,0)} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Nach dem Umkehrsatz ist a also ein lokaler Diffeomorphismus nahe des Nullschnitts $M \subset \nu M$. Da M kompakt ist, finden wir ein $r > 0$, so dass $a\colon \nu^{(r)}M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung wird, wobei

$$\nu^{(r)}M = \left\{\, v \in \nu_pM \;\middle|\; |v| < r \,\right\} .$$

Wir definieren jetzt eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to S^{n-k} \cong D^{n-k}/S^{n-k-1}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} & \text{falls } x = a(p,v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_pM \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Diese Abbildung ist stetig auf $\operatorname{im} a$. Sei jetzt $U \subset S^{n-k}$ offene Umgebung von $*$. Dann ist $a^{-1}(U)$ offene Umgebung von $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{im} a$. Also ist f insgesamt stetig. Das Bild $\operatorname{im} a$ ist in einem Kompaktum K in $\mathbb{R}^n$ enthalten, also wird $\mathbb{R}^n \setminus K$ konstant auf $*$ abgebildet. Also können wir f auf die Einpunktkompaktifizierung fortsetzen und erhalten $f\colon S^n \to S^{n-k}$.

3.88. Satz (Pontryagin-Thom-Konstruktion, [**Mi**, Chapter 7]). *Für $0 \le k < n$ gilt*

$$\pi_n(S^{n-k}) \cong \Omega_k^{\mathrm{fr},n} \ .$$

Beweis. Der vollständige Beweis benötigt einige Sätzen aus der Differentialtopologie. Wir geben hier daher nur eine Beweisskizze und verweisen ansonsten auf [**Mi**].

Als erstes geben wir eine Umkehrabbildung zur obigen Konstruktion an. Dabei benutzen wir, dass es in jeder punktierten Homotopieklasse von Abbildungen $f\colon S^n \to S^{n-k}$ einen glatten Repräsentanten gibt, für den der „Südpol“ $0 \in \mathbb{R}^{n-k} \cong S^{n-k} \setminus \{*\}$ regulärer Wert ist, und setzen

$$M = f^{-1}(0) \subset f^{-1}(S^{n-k} \setminus \{*\}) \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Dann ist M eine glatte Untermannigfaltigkeit nach dem Satz über implizite Funktionen. Als Trivialisierung des Normalenbündels wählen wir einfach $\tau = df|_{\nu M}$.

Offensichtlich hängt (M,τ) von der Wahl des Repräsentanten f von $[f] \in \pi_n(S^{n-k})$ ab. Es sei also g ein weiterer glatter punktierter Repräsentant, für den 0 ein regulärer Wert ist. Dann können wir mit dem gleichen Satz wie oben eine Homotopie zwischen f und g durch eine glatte punktierte Homotopie approximieren, für die 0 ein regulärer Wert ist. Dabei können wir sogar annehmen, dass diese Homotopie nahe der Endpunkte stationär ist. Dann ist $W = h^{-1}(0) \subset I \times \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit wie in Definition 3.86 (2a) und $\bar\tau = dh|_{\nu W}$ eine Trivialisierung von νW, so dass $(W,\bar\tau)$ einen gerahmter Bordismus zwischen (M_0,τ_0) und (M_1,τ_1) darstellt.

Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung $\Phi\colon \pi_n(S^{n-k}) \to \Omega_k^{\mathrm{fr},n}$. Die Surjektivität haben wir oben bereits gezeigt, indem wir f zu (M,τ) konstruiert haben. Injektivität erhalten wir, indem wir auf dem gleichen Wege zu einem gerahmten Bordismus zwischen $(f_0^{-1}, df_0|_{\nu(f_0^{-1}(0))})$ und $(f_1^{-1}, df_1|_{\nu(f_1^{-1}(0))})$ eine Homotopie $h\colon I \times R^n \to D^{n-k}/S^{n-k-1}$ zwischen f_0 und f_1 angeben. □

3.89. Bemerkung. Für $n \geq 2$ trägt $\pi_n(S^{n-k})$ eine abelsche Gruppenstruktur. Auch $\Omega_k^{\mathrm{fr},n}$ ist eine abelsche Gruppe für $n \geq 2$. Für die konstante Abbildung $f \equiv *$ ist $f^{-1}(0) = \emptyset$, also ist das Nullelement die leere Menge.

Seien (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) gegeben. Beide Mannigfaltigkeiten sind kompakt, also beschränkt in $\mathbb{R}^n$. Wir können daher beide Mannigfaltigkeiten innerhalb $\mathbb{R}^n$ in verschiedene Richtungen parallel so verschieben, dass sie disjunkt werden. Dann nehmen wir die disjunkte Vereinigung als Summe. Man überprüft leicht, dass verschiedene Verschiebungsvektoren gerahmt bordante Summen $(M_0, \tau_0) + (M_1, \tau_1)$ liefern, und dass diese Summe genau der Summe in $\pi_n(S^{n-k})$ entspricht.

Außerdem erhalten wir das gerahmte Inverse $-(M, \tau)$ von (M, τ), indem wir M und τ gemeinsam an einer Hyperbene H in $\mathbb{R}^n$ spiegeln. Wenn wir diese Hyperbene disjunkt zu M wählen, stellen wir uns jetzt vor, dass (M, τ) an der „Achse“ $H \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ auf sein Inverses „rotiert“. Die so erzeugte „Rotationsmannigfaltigkeit“ stauchen wir nach $\mathbb{R}^n \times [0, 1)$ und erhalten einen Bordismus von $(M, \tau) + (-(M, \tau))$ zur leeren Menge.

3.90. Beispiel. Für $k = 0$ betrachten wir endliche Teilmengen $M = (p_1, \ldots, p_N)$ des $\mathbb{R}^n$. Der Einfachheit halber sei $n \geq 2$. Für jeden Punkt p_i fixieren wir eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Ein gerahmter Bordismus zwischen M_0 und M_1 ist eine Sammlung von Kurven zwischen den Punkten aus beiden Mengen. Aufgrund der Rahmung verbindet eine Kurve mit zwei Randpunkten in M_0 immer Punkte mit verschieden orientierten Basen, während eine Kurve von M_0 nach M_1 immer Punkte mit gleich orientierten Basen miteinander verbindet. Jetzt überzeugt man sich leicht, dass $\Omega_0^{\mathrm{fr},n} \cong \mathbb{Z} \cong \pi_n(S^n)$ gilt. Man beachte, dass es uns soeben gelungen ist, $\pi_n(S^n)$ ohne Benutzung des Ausschneidungssatzes und der Homotopiesequenz 3.25 für Faserungen zu bestimmen.

3.91. Folgerung. *Es sei $f\colon S^n \to S^n$ punktierte Abbildung. Wenn ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\}$ existiert, so dass f in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $f^{-1}(p)$ glatt und p regulärer Wert ist, dann berechnet sich der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 als*

$$\deg f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign} \det df_q \,. \quad \square$$

Später können wir mit einer ähnlichen Formel einen Abbildungsgrad für Abbildungen zwischen kompakten orientierten Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension erklären.

In Abschnitt 3.j betrachten wir noch den Fall $k = 1$. Für größere k ist der Aufwand bei der Bestimmung von $\pi_n(S^{n-k})$ mit der Pontryagin-Thom-Konstruktion so hoch, dass man lieber auf andere Methoden zurückgreift.

Wir wollen jetzt zu $\pi_k^s(S^0)$ übergehen. Wir betrachten dazu die Inklusion $\iota\colon \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Es sei (M, τ) gerahmte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $M' = \iota(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wieder Untermannigfaltigkeit mit Tangential- und Normalbündel

$$TM' = d\iota(TM) \cong TM \qquad \text{und} \qquad \nu M' = d\iota(\nu M) \times \{0\} \times \mathbb{R} \cong \nu M \times \mathbb{R} \,.$$

Wir erweitern also τ zu einer Trivialisierung

$$\tau' = \tau \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \nu M' \cong \nu M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1-k} \,.$$

Mit gerahmten Bordismen verfahren wir analog und erhalten eine Abbildung

$$\iota_{\#}\colon \Omega_k^{\mathrm{fr},n} \longrightarrow \Omega_k^{\mathrm{fr},n+1} \,.$$

3.92. Proposition. *Für alle $0 \leq k < n$ kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(S^{n-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\mathrm{fr},n} \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\#}} \\ \pi_{n+1}(S^{n+1-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\mathrm{fr},n+1} \,. \end{array}$$

BEWEIS. Der Einfachheit halber betrachten wir $S^{n+1} = S^n \wedge S^1$ und $S^{n+1-k} = S^{n-k} \wedge S^1$ und stabilisieren entsprechend in der letzten Koordinate. Sei $f\colon S^n \to S^{n-k}$ wie im Beweis von Satz 3.88 eine glatte punktierte Abbildung, so dass $0 \in \mathbb{R}^n = S^n \setminus \{0\}$ regulärer Wert ist, und es sei $(M,\tau) = \big(f^{-1}(0), df|_{\nu(f^{-1}(0))}\big)$. Dann ist $Sf = f \wedge \mathrm{id}_{S^1}$ in einer Umgebung von $(Sf)^{-1}(0)$ immer noch glatt und stimmt dort mit $f \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ überein. Daher erhalten wir

$$(Sf)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \times \{0\} = M' \qquad \text{und} \qquad d(Sf)|_{\nu M'} = (df \times d\mathrm{id}_{\mathbb{R}})|_{\nu M \times \mathbb{R}} = \tau' \,. \qquad \square$$

3.93. DEFINITION. Für $k \geq 0$ ist die *k-te gerahmte Bordismusgruppe* definiert durch

$$\Omega_k^{\mathrm{fr}} = \varinjlim \Omega_k^{\mathrm{fr},n} \,.$$

3.94. FOLGERUNG (Aus Satz 3.42 (4) und 3.88). *Es gilt*

$$\pi_k^s \cong \Omega_k^{\mathrm{fr}} \,,$$

insbesondere gilt $\Omega_k^{\mathrm{fr}} \cong \Omega_k^{\mathrm{fr},n}$ für alle $n \geq 2k+2$. $\square$

Wir nennen (M,τ) schlicht *gerahmte k-dimensionale Mannigfaltigkeit,* wenn es uns egal ist, in welchen $\mathbb{R}^n$ wir (M,τ) betrachten wollen — nur muss n eine gewisse Mindestgröße haben, typischerweise jedoch nicht mehr als $2k+2$. Genauso sprechen wir nur noch von gerahmten Bordismen $(W,\bar\tau)$ zwischen (M_0,τ_0) und (M_1,τ_1) — dabei müssen wir unter Umständen (M_0,τ_0) und (M_1,τ_1) erst in einen größeren $\mathbb{R}^n$ einbetten. Als nächstes kommen wir zu einer geometrischen Interpretation der stabilen Homotopiegruppen $\pi_k^s(X)$, dabei betrachten wir direkt den Kolimes.

3.95. DEFINITION. Es sei X ein (nicht notwendig punktierter) topologischer Raum.

(1) Ein *gerahmter singulärer k-Zykel* in X besteht aus
   (a) einer gerahmten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit (M,τ) und
   (b) einer Abbildung $F\colon M \to X$.
(2) Zwei gerahmte singuläre Zykel (M_0,τ_0,F_0) und (M_1,τ_1,F_1) heißen *in X gerahmt bordant* oder auch *gerahmt homolog,* wenn es
   (a) einen gerahmten Bordismus $(W,\bar\tau)$ zwischen (M_0,τ_0) und (M_1,τ_1) und
   (b) eine Abbildung $\bar F\colon W \to X$ mit $\bar F|_{\partial_i M} = F_i$ für $i \in \{0,1\}$ gibt.
(3) Die *k-te gerahmte Bordismusgruppe* $\Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)$ *von* X sei die Menge aller gerahmten singulären k-Zykel in X bis auf gerahmten Bordismus.

Wir nennen die obigen Zykel „singulär“, weil wir nicht erwarten, dass F eine Einbettung ist — im schlimmsten Fall kann F sogar konstant sein.

3.96. BEMERKUNG. Es sei X ein topologischer Raum.

(1) Wie in Bemerkung 3.85 ist „gerahmt bordant“ in X eine Äquivalenzrelation.
(2) Falls $X = \mathrm{pt}$ der einpunktige Raum ist, kommt für F immer nur die konstante Abbildung in Frage, also gilt
$$\Omega_k^{\mathrm{fr}}(\mathrm{pt}) = \Omega_k^{\mathrm{fr}} \,.$$
(3) Durch disjunkte Vereinigung der gerahmten Mannigfaltigkeiten (M,τ) wird $\Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)$ wie in Bemerkung 3.89 zu einer abelschen Gruppe. Dabei müssen die Bilder der einzelnen gerahmten Untermannigfaltigkeiten in X aber nicht disjunkt sein.
(4) Es sei $\varphi\colon X \to Y$ stetig. Dann induziert φ einen funktoriellen Gruppenhomomorphismus
$$\varphi_*\colon \Omega_k^{\mathrm{fr}}(X) \to \Omega_k^{\mathrm{fr}}(Y)$$
durch $\varphi_*(M,\tau,F) = (M,\tau,\varphi\circ F)$. Sei η eine Homotopie zwischen φ und $\psi\colon X \to Y$, dann können wir $\eta \circ (F \times \mathrm{id}_I)\colon M \times I \to Y$ als gerahmten Bordismus zwischen $\varphi_*(M,\tau,F)$ und $\psi_*(M,\tau,F)$ auffassen. Also ist gerahmter Bordismus ein Funktor
$$\Omega_k^{\mathrm{fr},n}\colon \mathcal{HT}op \longrightarrow \mathcal{A}b \,.$$

Es sei X ein topologischer Raum, dann erinnern wir uns an die Konstruktion

$$X_+ = X \sqcup \mathrm{pt} \ ,$$

aus Abschnitt 3.a, wobei der zusätzliche Punkt $* \in \mathrm{pt} = \{*\}$ der Basispunkt sei.

3.97. Satz (Pontryagin-Thom-Konstruktion). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\pi_k^s(\,\cdot\,_+) \cong \Omega_k^{\mathrm{fr}} \colon \mathcal{HT}op \longrightarrow \mathcal{A}b \ .$$

Beweis. Es sei $f\colon S^n \to S^{n-k} \wedge X_+$ Repräsentant eines Elementes von $\pi_k^s(X_+)$. Als erstes überlegen wir uns, dass

$$S^{n-k} \wedge X_+ = (S^{n-k} \times X \sqcup S^{n-k})/(\{*\} \times X \sqcup S^{n-k}) \cong (S^{n-k} \times X)/(\{*\} \times X) \ .$$

Wir bezeichnen den Basispunkt von $S^{n-k} \wedge X_+$ wieder mit $\{*\}$ und betrachten

$$V = (S^{n-k} \wedge X_+) \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^{n-k} \times X \qquad \text{und} \qquad U = f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\} \ .$$

Dann sind $V \subset S^{n-k} \wedge X_+$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die zusammengesetzte Abbildung

$$g\colon U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

ist *eigentlich,* das heißt, Urbilder kompakter Mengen sind kompakt. Denn sei $K \subset \mathbb{R}^{n-k}$ kompakt, dann sind $S^{n-k} \setminus K$ und $(S^{n-k} \setminus K) \wedge X_+$ offen und $g^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \setminus K) \cup (S^n \setminus U) = f^{-1}(S^{n-k} \setminus K)$ ist offene Umgebung des unendlichen Punktes $\{*\}$, also ist ihr Komplement $g^{-1}(K)$ in S^n kompakt.

Insbesondere ist $g^{-1}(0) \subset U$ kompakt, und wir können f auf einer kompakten Umgebung von $g^{-1}(0)$ in U homotop so deformieren, dass die erste Komponente g von f in einer kleineren Umgebung von $g^{-1}(0)$ glatt ist und $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.88 erhalten wir eine gerahmte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, nämlich

$$(M, \tau) = \big(g^{-1}(0), dg|_{\nu(g^{-1}(0))}\big) \ .$$

Außerdem erhalten wir eine zusammengesetzte Abbildung

$$F\colon M \hookrightarrow U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X \ ,$$

und (M, τ, F) ist der gesuchte singuläre gerahmte k-Zykel.

Seien zwei Repräsentanten $f_i\colon S^{n_i} \to S^{n_i-k} \wedge X_+$, $i \in \{0,1\}$ desselben Elements von $\pi_k^s(X)$ gegeben, dann finden wir zunächst ein $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ und eine Homotopie h zwischen $S^{n-n_0} f_0$ und $S^{n-n_1} f_1$. Wie in Proposition 3.92 ersetzt Stabilisierung die gerahmte Mannigfaltigkeit (M, τ) durch (M', τ'), ändert jedoch nichts an der Abbildung $F\colon M' \cong M \to X$. Wir nehmen also an, dass $n = n_0 = n_1$. Außerdem nehmen wir wie im ersten Schritt an, dass für $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X$ wie oben und $U = h^{-1}(V)$ die zusammengesetzte Abbildung

$$\ell\colon U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

in einer Umgebung der kompakten Menge $\ell^{-1}(0) \subset I \times S^n$ glatt ist und 0 als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.88 ist $(W, \bar\tau) = (\ell^{-1}(0), d\ell|_{\ell^{-1}(0)})$ ein gerahmter Bordismus zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1), und wir erhalten eine zusammengesetzte Abbildung

$$H\colon W \hookrightarrow U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X$$

mit $H|_{\partial_i W} = F_i$ für $i = 0, 1$. Mithin sind (M_0, τ_0, F_0) und (M_1, τ_1, F_1) gerahmt bordant in X. Also ist $\Phi_X\colon \pi_k^s(X_+) \to \Omega_k^{\mathrm{fr}}(X)$ wohldefiniert.

Zur Natürlichkeit sei $\varphi\colon X \to Y$ gegeben. Zu zeigen ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^s(X_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\mathrm{fr}}(X) \\ {\scriptstyle \varphi_*=}\big\downarrow{\scriptstyle \pi_k^s(\varphi_+)} & & {\scriptstyle \varphi_*=}\big\downarrow{\scriptstyle \Omega_k^{\mathrm{fr}}(\varphi)} \\ \pi_k^s(Y_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\mathrm{fr}}(Y)\ . \end{array}$$

Wir setzen $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X \subset S^{n-k} \wedge X_+$ wie oben und $W = \mathbb{R}^{n-k} \times Y \subset S^{n-k} \wedge Y_+$, dann folgt

$$V = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi)^{-1}(W)\ .$$

Zu $f\colon S^n \to S^{n-k} \wedge X_+$ bestimmen wir $U \subset \mathbb{R}^n$, $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$, (M,τ) und F wie oben. Da $U = f^{-1}(V) = (\varphi \circ f)^{-1}(W)$, liefert $\varphi \circ f\colon S^n \to S^{n-k} \wedge Y_+$ die gleiche Abbildung

$$\pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_U = \pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ f|_U = g\ ,$$

und daher die gleiche gerahmte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit (M,τ). Jetzt folgt Natürlichkeit, denn $\varphi \circ f$ liefert den k-Zykel

$$\big(M, \tau, \pi_Y \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_M\big) = \big(M, \tau, \varphi \circ \pi_X \circ f|_M\big) = \varphi_*(M,\tau,F)\ .$$

Zum Beweis der Surjektivität sei ein singulärer gerahmter k-Zykel (M,τ,F) in X gegeben, dabei sei (M,τ) gerahmte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und $a\colon \nu^{(r)}M \to \mathbb{R}^n$ sei eine Einbettung. In Analogie zu (3.8) definieren wir $f\colon S^n \to S^{n-k} \wedge X$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} \wedge F(p) & \text{falls } x = a(p,v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft wieder leicht, dass f stetig ist, und den singulären gerahmten k-Zykel (M,τ,F) induziert. Zur Injektivität verfahren wir analog mit einem singulären gerahmten Bordismus zwischen zwei k-Zykeln. □

3.98. Bemerkung. Die höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X)$ finden „runde Löcher“ von X, die dadurch sichtbar werden, dass man Sphären nach X abbildet, die man anschließend nicht mehr zusammenziehen kann. Man findet jedoch keine Löcher, die dadurch zustande kommen, dass man andere kompakte Mannigfaltigkeiten nach X abbildet, die sich dann in X nicht durch einen Nullbordismus ausfüllen lassen. Beispielsweise sollte der Torus T^2 ein solches „torusförmiges Loch“ haben, aber es gilt $\pi_2(T^2) = 0$.

Mit der stabilen Homotopie und der Pontryagin-Thom-Konstruktion können wir nun immerhin Löcher in der Form gerahmter Untermannigfaltigkeiten aufspüren. Aber zum einen tragen die Rahmungen merkwürdige Zusatzinformation, siehe unten. Zum anderen gibt es in höheren Dimensionen Untermannigfaltigkeiten, die keine Rahmungen zulassen (ein Beispiel wäre $\mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{R}^8$). Nach Bemerkung 3.96 (2) ist

$$\Omega_k^{\mathrm{fr}}(\mathrm{pt}) = \pi_k^s(S^0)$$

gerade die k-te stabile Homotopiegruppe der Sphären. Für viele $k > 0$ gilt $\pi_k^s(S^0) \neq 0$, obwohl ein Punkt eigentlich keine weitere Information tragen sollte. Aber immerhin sind alle $\pi_k^s(S^0)$ endliche Gruppen für $k > 0$.

Poincarés erste Idee, „Homologie“ zu definieren war daher, „orientierten“ Bordismus Ω_k^{SO} ohne Rahmungen zu betrachten. Aber auch diese Definition hat Probleme, so dass man einen etwas abstrakteren Zugang entwickelt hat. Würden wir Poincarés Ansatz folgen, so erhielten wir für $\Omega_k^{SO}(\mathrm{pt})$ nämlich abzählbar unendliche Gruppen für alle $k \in 4\mathbb{N}$, also noch mehr „Lärm um Nichts.“

3.99. Bemerkung. Der Vollständigkeit halber skizzieren wir auch „gerahmten Kobordismus“ mit dem dazugehörigen Pontryagin-Thom Isomorphismus

$$\Omega^k_{\mathrm{fr}}(X) \cong [X_+, S^k]^s = \varinjlim [S^{n-k} \wedge X_+, S^n] \ .$$

Diesmal erhalten wir kontravariante Funktoren, denn eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ induziert durch Zurückziehen eine Abbildung

$$\varphi^*\colon \Omega^k_{\mathrm{fr}}(Y) \cong [Y_+, S^k]^s \xrightarrow{\circ\varphi} [X_+, S^k]^s \cong \Omega^k_{\mathrm{fr}}(X) \ .$$

Am besten lässt sich die linke Seite beschreiben, wenn X selbst eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, denn in diesem Fall wird $\Omega^k_{\mathrm{fr}}(X)$ von $(\dim X - k)$-dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten $N \subset \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit Trivialisierungen τ des Normalenbündels $\nu_{N,X}$ von N in $\mathbb{R}^{n-k} \times X$ erzeugt. Das Paar (N, τ) heißt dann *singulärer gerahmter k-Kozykel.* Die Äquivalenzrelation wird diesmal über gerahmte Kobordismen, also $(\dim X + 1 - k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten in $I \times \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit trivialisiertem Normalenbündel definiert.

Aufgrund der Pontryagin-Thom-Isomorphismen erhält man eine bilineare Abbildung

$$\Omega^k_{\mathrm{fr}}(X) \times \Omega^{\mathrm{fr}}_\ell(X) \cong [X_+, S^k]^s \times [S^\ell, X_+] \xrightarrow{\circ} \pi^s_\ell(S^k) = \pi^s_{\ell-k}(S^0) \ .$$

Im Fall $k = \ell$ ist der Wertebereich $\pi^s_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$, man spricht von einer *Kronecker-Paarung.* Geometrisch lässt sie sich so beschreiben, dass man (M, τ) und das Bild von (N, τ') unter π_X in „allgemeine Lage“ bringt und Schnittpunkte zählt, wobei die Rahmungen das Vorzeichen festlegen.

Wir haben jetzt die zur stabilen Homotopietheorie assoziierte Homologie- und Kohomologietheorie kennengelernt. Viele Aspekte fehlen noch, zum Beispiel gibt es ein *Cup-Produkt*

$$\smile\colon \Omega^k_{\mathrm{fr}}(X) \times \Omega^\ell_{\mathrm{fr}}(X) \longrightarrow \Omega^{k+\ell}_{\mathrm{fr}}(X) \ ,$$

bei dem man singuläre gerahmte Kozykeln miteinander „schneidet“, dabei addieren sich die Kodimensionen. So wird $\Omega^\bullet_{\mathrm{fr}}(X)$ zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring, dem gerahmten Kobordismusring. Es gibt auch ein *Cap-Produkt*

$$\frown\colon \Omega^k_{\mathrm{fr}}(X) \times \Omega^{\mathrm{fr}}_\ell(X) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{fr}}_{\ell-k}(X) \ ,$$

das $\Omega^{\mathrm{fr}}_\bullet(X)$ zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten $\Omega^\bullet_{\mathrm{fr}}(X)$-Modul macht. Auch hier schneidet man einen Zykel mit einem Kozykel und erhält so einen Zykel kleinerer Dimension.

3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären

Wir wollen jetzt $\pi^s_1(S^0)$ bestimmen. Da wir dazu gerahmte Kreise betrachten müssen, und sich zwei Rahmungen von $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ um eine Abbildung $S^1 \mapsto SO(n-1)$ unterscheiden, beweisen wir zur Vorbereitung das folgende Resultat.

3.100. Satz. *Es sei $n \geq 3$. Dann gilt $\pi_1(SO(n), E_n) \cong \mathbb{Z}/2$, und das nicht triviale Element wird dargestellt durch die Schleife*

$$\gamma\colon I \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & & & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(n) \ .$$

Selbstverständlich können wir auch jede andere Ebene im $\mathbb{R}^n$ „einmal herumdrehen“, um den Erzeuger von $\pi_1(SO(n))$ zu erhalten. Die Bedingung $n \geq 3$ ist nötig, denn es gilt $SO(1) \cong \mathrm{pt}$ und $SO(2) \cong S^1$.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 3$. Es sei $\mathbb{H}$ die Algebra der Quaternionen, dann bildet die Menge $S^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ der Einheitsquaternionen eine Gruppe bezüglich der Quaternionen-Multiplikation. Diese Gruppe wirkt auf dem Raum $\mathbb{I} \cong \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ der imaginären Quaternionen durch

$$S^3 \times \mathbb{I} \ni (q, p) \longmapsto qp\bar{q} = qpq^{-1} .$$

Diese Wirkung erhält das Euklidische Skalarprodukt und die Orientierung, liefert also einen Homomorphismus $S^3 \to SO(3)$. Dabei wirken $\pm 1 \in S^3$ als $\mathrm{id}_{\mathbb{I}}$. Da es zu jedem Quaternion $q \in S^3 \setminus \{\pm 1\} \subset \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{I}$ gibt, mit dem q nicht kommutiert, wirken alle anderen Elemente der S^3 nicht-trivial. Schließlich kann man — zum Beispiel anhand der gleich folgenden geometrischen Darstellung – überprüfen, dass die obige Abbildung surjektiv ist. Es folgt

$$SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^3 .$$

Wir geben eine geometrische Beschreibung der obigen Gruppenwirkung ohne Quaternionen. Dazu seien $e_0, \dots, e_3$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$, und $\mathbb{R}^3$ sei das Erzeugnis von e_1, e_2, e_3. Wir wissen bereits, dass $\pm 1 = \pm e_0$ als $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ wirkt. Jedes andere $q \in S^3 \setminus \{\pm e_0\}$ schreiben wir als in eindeutiger Weise als

$$q = e_0 \cos\varphi + u \sin\varphi \qquad \text{mit } u \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit } \varphi \in (0, \pi) .$$

Dann wirkt q als Drehung mit Winkel 2φ um die Achse $u\mathbb{R}$. Genauer ergänzen wir u zu einer orientierten Orthonormalbasis (u, v, w) des $\mathbb{R}^3$, dann folgt

$$q(u) = u , \qquad q(v) = v \cos 2\varphi - w \sin 2\varphi , \qquad q(w) = v \sin 2\varphi + w \cos 2\varphi .$$

Wir erhalten die gleiche Abbildung, indem wir u durch $-u$ und φ durch $\pi - \varphi$ ersetzen. Der Winkel 2φ lässt sich auch dadurch erklären, dass wir in der obigen Darstellung für $\varphi = \pi$ den Punkt $q = -e_0 \in S^3$ erhalten, der als Identität wirkt.

Wir wissen jetzt also, dass $S^3 \to SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ die universelle Überlagerung ist. Aus Abschnitt 2.e wissen wir, dass dem nichttrivialen Element $1 \in \mathbb{Z}/2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)$ das Bild eines Weges $\tilde{\gamma}$ von e_0 nach $-e_0$ entspricht. Wir wählen $\tilde{\gamma}(t) = e_0 \cos \pi t + e_3 \sin \pi t$ und erhalten die im Satz genannte Schleife γ.

Damit ist der Fall $n = 3$ erledigt. Wir beweisen die Behauptung für größere n durch Induktion. Dazu betrachten wir die Abbildung $p\colon SO(n+1) \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p(g) = g\, e_{n+1}$. Diese Abbildung ist ein Faserbündel mit Faser

$$p^{-1}(e_{n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n+1) \;\middle|\; A \in SO(n) \right\} \cong SO(n) ,$$

siehe Übung 3.124. Aus der langen exakten Sequenz 3.25 schließen wir mit $n \geq 3$, dass

$$\underbrace{\pi_1(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_1\big(SO(n+1)\big) \xleftarrow{\cong} \pi_1\big(SO(n)\big) \longleftarrow \underbrace{\pi_2(S^n)}_{=0} .$$

Dabei geht die erzeugende Schleife γ in $SO(n)$ in die entsprechende Schleife in $SO(n+1)$ über. □

3.101. SATZ (Pontryagin). *Es gilt* $\pi_1^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$.

BEWEIS. Nach Satz 3.42 (4) und Satz 3.88 gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \pi_n(S^{n-1}) \cong \Omega_1^{\mathrm{fr},n}$ für alle $n \geq 4$. Wir betrachten zunächst kompakte gerahmte 1-Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$. Jede kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen. Wir parametrisieren jede Zusammenhangskomponente M_i so durch eine Kurve γ, dass $\dot{\gamma}$ zusammen mit der Rahmung von νM_i eine positive Basis des umgebenden $\mathbb{R}^n$ liefert. Da $n \geq 4$ ist, können wir diese Kreise gegebenenfalls „entknoten“, das heißt zu disjunkten Einheitskreisen in der Ebene $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkten auf der x-Achse deformieren, die im positiven Drehsinn durchlaufen werden — aus jeder solchen

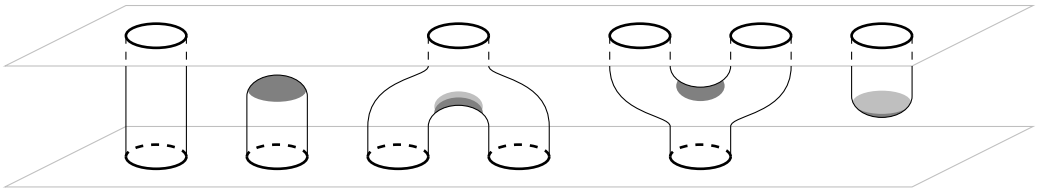


Abbildung 3.9. Elementare Bordismen

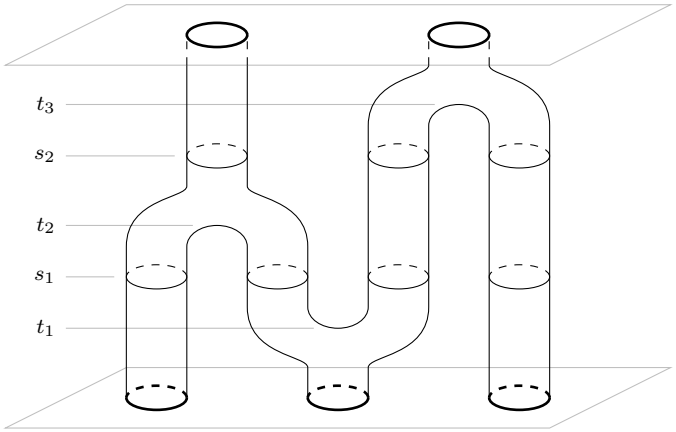


Abbildung 3.10. Zusammengesetzter Bordismus

Deformation macht man leicht einen Bordismus, auf den sich auch die Rahmungen übertragen lassen.

Für einen einzelnen Kreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ konstruieren wir eine Standardrahmung τ^0, indem wir als v_1^0 den Ortsvektor in $\mathbb{R}^2$ wählen, und mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3, \ldots, v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels. Jede andere Rahmung unterscheidet sich um ein Element aus $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Wenn wir mehrere gerahmte Kreise haben, addieren wir die zugehörigen Elemente von $\mathbb{Z}/2$. Wir behaupten, dass dieses Summe eine gerahmte Bordismusinvariante ist.

Sei $W \subset I \times \mathbb{R}^n$ ein Bordismus. Zunächst erreichen wir durch eine kleine Deformation, dass die Koordinate $t \in I$ eine sogenannte *Morse-Funktion* auf W wird, das heißt, die Abbildung $W \ni (t, x) \mapsto t \in I$ hat nur endlich viele kritische Punkte $(t_1, p_1), \ldots, (t_k, p_k)$, und nahe dieser Punkte $p_j = (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})$ sieht W aus wie der Graph einer Funktion

$$(x_1, \ldots x_n) \longmapsto t_k \pm (x_1 - x_{j,1})^2 \pm \cdots \pm (x_n - x_{j,n})^2 \ .$$

Wir dürfen dabei annehmen, dass $t_1 < \cdots < t_k$ paarweise verschieden sind. Die Rahmungen deformieren wir wieder mit. Dann können wir den Bordismus durch Aufschneiden längs $\{s_i\} \times \mathbb{R}^n$ mit $t_1 < s_1 < t_2 < \cdots < s_{k-1} < t_k$ in „elementare Bordismen“ wie in Abbildung 3.9 zerlegen. Diese können wir so anordnen, dass ganz W in $I \times \mathbb{R}^2 \subset I \times \mathbb{R}^n$ zu liegen kommt; dabei ordnen wir die Kreise in $\partial_0 W$ und $\partial_1 W$ gegebenenfalls um, siehe Abbildung 3.10.

Auf W konstruieren wir eine Standardrahmung τ^0, indem wir auf den elementaren Bordismen in $I \times \mathbb{R}^2$ jeweils den nach außen weisenden Normalenvektor als v_1^0 wählen und dann mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3, \ldots, v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels ergänzen. Die Rahmungen τ und τ^0 unterscheiden sich um eine Abbildung $g\colon W \to SO(n-1)$. Für jedes $s \in I \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$ liefert die Einschränkung auf $W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n) \cong S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1$ nach Folgerung 3.8 ein Tupel von Elementen von $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Es sei $a_s \in \mathbb{Z}/2$ die Summe dieser Elemente. Die obige Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass a_s nicht von s abhängt. Für alle $s \in (t_i, t_{i+1})$

mit $1 \leq i < k$ ist das klar, da die Abbildungen $g|_{W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n)}$ homotop sind. Außerdem ist klar, dass sich der Beitrag eines zylindrischen elementaren Bordismus in einer Umgebung von t_i nicht ändert.

Da $SO(n-1)$ zusammenhängend ist, können wir die gegebene Rahmung τ im Innern der nicht zylindrischen elementaren Bordismen so deformieren, dass sie auf den in Abbildung 3.9 grau markierten, zusammenziehbaren Regionen jedes elementaren Bordismus mit τ^0 übereinstimmt. Dabei ändern sich die Elemente $a_s \in \mathbb{Z}/2$ nicht. Wenn der elementare Bordismus eine „Kappe“ ist (zweiter oder letzter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu a_s auf beiden Seiten von t_i trivial. Wenn der elementare Bordismus eine „Hose“ ist (dritter oder vierter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu a_s auf der Seite von t_i mit einer Randkomponente die Summe der Beiträge auf der Seite mit zwei Randkomponenten. Insgesamt ändert sich also a_s beim Überqueren eines kritischen Wertes t_i nicht.

Also ist unsere Behauptung bewiesen, und wir haben eine Abbildung

$$a\colon \pi_1^s(S^0) \cong \Omega_1^{\mathrm{fr}} \longrightarrow \pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$$

konstruiert. Nach unser Vorüberlegung ist diese Abbildung surjektiv, da wir im Urbild jedes Elements einen gerahmten Kreis finden. Nach Konstruktion wird die leere gerahmte Mannigfaltigkeit auf 0 abgebildet. Wenn a bijektiv ist, ist a ein Isomorphismus, denn bis auf Isomorphie gibt es nur eine Gruppe mit zwei Elementen.

Zur Injektivität sei eine gerahmte Bordismusklasse in $\mathbb{R}^n$ gegeben, ohne Einschränkung repräsentiert durch eine disjunkte Vereinigung (M, τ) von gerahmten Einheitskreisen wie oben. Wir behaupten, dass (M, τ) zu einem einzigen gerahmten Kreis kobordant ist, und erhalten Injektivität, da es auf einem Kreis nur zwei Klassen von Rahmungen gibt. Falls M aus einem Kreis besteht, ist nichts zu tun. Falls $M = \emptyset$, betrachten wir den letzten elementaren Bordismus in Abbildung 3.9. Andernfalls benutzen wir die Hose in der Mitte der Abbildung, um die Anzahl der Kreise Schritt für Schritt bis auf einen zu reduzieren. Dabei überlegen wir uns, dass wir die gegebenen Rahmungen der „Hosenbeine“ bis zum „Gürtel“ fortsetzen können. □

In der gleichen Arbeit, in der Pontryagin diesen Satz bewiesen hat, hat er auch $\pi_2^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$ bestimmt. Die Berechnung der höheren stabilen Homotopiegruppen der S^0 mit Hilfe der Pontryagin-Thom-Konstruktion erweist sich als sehr aufwändig, so dass man sich stattdessen anderer Hilfsmittel bedient. Ohne Beweis geben wir das folgende wichtige Resultat an.

3.102. Satz (Serre). *Mit Ausnahme von $\pi_n(S^n)$ und $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ sind alle Homotopiegruppen von Sphären endlich. Insbesondere ist $\pi_k^s(S^0)$ endlich für alle $k > 0$.*

3.103. Bemerkung. Die Umkehrung der obigen Abbildung a ist der sogenannte stabile *J-Homomorphismus*

$$J_k\colon \pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \to \pi_k^s(S^0)\ ,$$

den wir jetzt betrachten wollen. Der Kolimes bezieht sich auf die gleiche Folge von Einbettungen $\iota_n\colon SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$ wie im Beweis von Satz 3.100. Also ist SO die Gruppe der „orientierungserhaltenden orthogonalen Matrizen“ mit Indizes in $\mathbb{N}$, die bis auf endlich viele Einträge mit der „Einheitsmatrix“ $(\delta_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ übereinstimmen.

Die exakte Homotopiesequenz des Faserbündels $SO(n+1) \to S^n$ mit Faser $SO(n)$ aus dem Beweis des Satzes 3.100 liefert

$$\underbrace{\pi_k(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_k(SO(n)) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\pi_{k+1}(S^n)}_{=0}$$

für $n > k+1$, und π_k ist hier verträglich mit dem Kolimes, so dass

$$\pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(k+2))\ .$$

Die Gruppe $SO(n)$ wirkt durch Drehungen auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $a \in \pi_k(SO(n))$, dann erhalten wir eine Abbildung

$$S^k \times S^{n-1} \xrightarrow{a \times \mathrm{id}_{S^{n-1}}} SO(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} .$$

Wir konstruieren daraus eine Abbildung von $S^{k+n} \subset \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^n$ nach $S^n \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \|q\|^2 - \|p\|^2 \\ 2\,\|p\|^2\; a\Big(\frac{p}{\|p\|^2}\Big) \cdot q \end{pmatrix}$$

falls $p \neq 0$.

Es bezeichne $J_k^n([a]) \in \pi_{k+n}(S^n)$ die zugehörige Homotopieklasse. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(SO(n)) & \xrightarrow{J_k^n} & \pi_{k+n}(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow S \\ \pi_k(SO(n+1)) & \xrightarrow{J_k^{n+1}} & \pi_{k+n+1}(S^{n+1}) . \end{array}$$

Also erhalten wir den stabilen J-Homomorphismus als Kolimes

$$J_k = \varinjlim J_k^n \colon \varinjlim \pi_k(SO(n)) \longrightarrow \varinjlim \pi_{k+n}(S^n) = \pi_k^s(S^0) ,$$

und wegen Satz 3.42 (4) und der obigen Überlegung und gilt sogar $J_k = J_k^{k+2}$.

Für $k > 0$ liefert Bott-Periodizität Isomorphismen $\pi_{k+8n}(SO) \cong \pi_k(SO)$. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über J_k für kleine k.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\pi_k(SO)$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$
$\operatorname{im} J_k$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/24$	0	0	0	$\mathbb{Z}/240$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/504$
$\pi_k^s(S^0)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/240$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/504$

Die Gruppe $\operatorname{im} J_{4n-1}$ hängt zusammen mit den Bernoulli-Zahlen: der Nenner von $B_{2n}/4n$ ist gerade $\#\operatorname{im} J_{4n-1}$.

3.k. Übungen zu Kapitel 3

Übungen zu Abschnitt 3.a.

3.104. Übung. Konstruieren Sie Homöomorphismen

(1) $f\colon I^k/\partial I^k \to S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$,
(2) $g\colon (I^k/\partial' I^k,\, \partial I^k/\partial' I^k) \to (D^k, S^{k-1})$.

3.105. Übung. Es seien (X_i, x_i) für $i \in J$ punktierte Räume. Zeigen Sie:

(1) der punktierte Raum

$$(X, x_0) = \left(\prod_{i \in J} X_i, (x_i)_{i \in J} \right)$$

mit den Projektionen $p_i\colon (X, x_0) \to (X_i, x_i)$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines Produktes (aus Satz 1.53 (3)) in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$;
(2) es gilt $\pi_k(X, x_0) \cong \prod_{i \in J} \pi_k(X_i, x_i)$, wobei die Abbildung $p_{i*} = \pi_k p_i$ der Projektion auf den Faktor $\pi_k(X_i, x_i)$ entspricht.
(3) Sei $j \in J$, und sei $\iota_j\colon X_j \to X$ die Inklusion, die $y \in X_j$ auf $(y_i)_{i \in J}$ mit $y_j = y$ und $y_i = x_i$ für $i \neq j$ abbildet. Beschreiben Sie die Abbildung $\iota_{j*}\colon \pi_k(X_j, x_j) \to \pi_k(X, x_0)$.

3.106. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 3.10.

Übungen zu Abschnitt 3.b.

3.107. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 3.16.

3.108. Übung. Es sei (X, A) ein punktiertes Paar. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Verkettung von Wegen definiert eine Abbildung $\rho\colon \pi_1(X, A) \times \pi_1(X) \to \pi_1(X, A)$.
(2) Für die konstante Abbildung c auf x_0 und $[\gamma] \in \pi_1(X)$ gilt $\rho([c], [\gamma]) = j_*[\gamma]$.
(3) Die Abbildung ρ ist eine Gruppenwirkung (von rechts) und setzt die Wirkung von $\pi_1(A)$ aus Satz 3.19 fort.
(4) Es gibt eine natürliche Bijektion $\pi_1(X, A)/\pi_1(X) \to \operatorname{im}\partial \subset \pi_0(A)$.

3.109. Übung. Zeigen Sie für exakte Sequenzen von Gruppen:

(1) Die Sequenz $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ist genau dann bei A und B exakt, wenn f einen Isomorphismus $A \cong \ker g$ induziert.
(2) Die Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ ist genau dann bei B und C exakt, wenn g einen Isomorphismus $\operatorname{coker} f \cong C$ induziert.

Was folgt für A und f in den exakten Sequenzen $0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ beziehungsweise $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$?

3.110. Übung. Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz aus Satz 3.19 an den fehlenden Stellen.

3.111. Übung. Beweisen Sie Lemma 3.20. Achten Sie darauf, keine zusätzlichen Voraussetzungen einzuführen.

3.112. Übung. Es seien $Z \subset Y \subset X$ Räume mit Basispunkt in Z. Wir betrachten

$$\partial\colon \pi_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \longrightarrow \pi_{k-1}(Y, Z)$$

als Verbindungshomomorphimus in der Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_k(X, Y) \longleftarrow \pi_k(X, Z) \longleftarrow \pi_k(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(X, Y) \longleftarrow \cdots ,$$

wobei die unmarkierten Pfeile von Inklusion induziert werden.

(1) Zeichnen Sie die obige Sequenz zusammen mit den exakten Sequenzen der Paare (X, Y), (X, Z) und (Y, Z) so in ein kommutatives Diagramm, dass keine Homotopiegruppe zweimal erscheint.
(2) Beweisen Sie Exaktheit der Sequenz, indem Sie nach Möglichkeit vom Diagramm aus (1) Gebrauch machen.

Übungen zu Abschnitt 3.c.

3.113. Übung. Konstruieren Sie den Homöomorphismus aus Bemerkung 3.23.

3.114. Übung. Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

(1) Sei $p\colon E \to B$ eine Faserung, und sei $f\colon A \to B$ stetig. Seien die Abbildungen $f^*p\colon f^*E \to A$ und $\bar{f}\colon f^*E \to E$ durch

$$f^*E = \left\{ (e, a) \in E \times A \;\middle|\; p(e) = f(a) \in B \right\} , \qquad (f^*p)(e, a) = a , \qquad \bar{f}(e, a) = e$$

gegeben, dann ist f^*p wieder eine Faserung.
(2) Die konstante Abbildung $F \to \mathrm{pt}$ ist eine Faserung für alle F. Die Projektion $B \times F \to B$ ist eine Faserung für alle F und alle B.

(3) Seien $p\colon E \to B$ und $q\colon Y \to E$ Faserungen. Dann ist auch $p \circ q\colon Y \to B$ eine Faserung.

3.115. Übung. Es sei $p\colon E \to B$ eine stetige Abbildung. Wir definieren

$$Pp = \left\{ (e, \gamma) \in E \times C(I, B) \;\middle|\; p(e) = \gamma(0) \right\},$$

dabei trage $C(I, B)$ die kompakt-offene Topologie und Pp die Unterraumtopologie. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung p ist eine Hurewicz-Faserung.
(2) Die Abbildung p hat die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich des Raumes Pp und den Abbildungen

$$f = \pi_E\colon Pp \to E \qquad \text{und} \qquad h = \mathrm{ev} \circ (\pi_{C(I,B)} \times \mathrm{id}_I)\colon Pp \times I \to B\,.$$

(3) Die Abbildung $r\colon C(I, E) \to Pp$ mit $g \mapsto (g(0), p \circ g)$ hat ein stetiges Rechtsinverses s.

3.116. Übung. Es sei $p\colon E \to B$ eine punktierte Serre-Faserung mit Faser F. Zu jedem Punkt $f \in F$ und jeder Schleife γ in B am Basispunkt finden wir mit der Homotopieliftungseigenschaft 3.22 einen Weg $\bar\gamma_f\colon I \to E$ mit $\bar\gamma_f(0) = f$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung $\rho\colon \pi_0(F) \times \pi_1(B) \to \pi_0(F)$ mit $\rho([f], [\gamma]) = [\bar\gamma_f(1)]$.
(2) Für alle $[\gamma] \in \pi_1(B)$ gilt $\rho([e_0], [\gamma]) = \partial[\gamma]$.
(3) Die Abbildung ρ ist eine Gruppenwirkung von rechts.
(4) Es gibt eine natürliche Bijektion $\pi_0(F)/\pi_1(B) \to \operatorname{im} i_* \subset \pi_0(E)$.

3.117. Übung. Eine *Retraktion* von einer Abbildung $p\colon E \to B$ zu einer Abbildung $q\colon D \to A$ ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{I} & E & \xrightarrow{R} & D \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow \\ A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{r} & A\,, \end{array}$$

so dass $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $R \circ I = \mathrm{id}_F$. Man sagt auch, $q\colon D \to A$ ist ein *Retrakt* von $p\colon E \to B$.

Zeigen Sie: wenn p die Homotopieliftungseigenschaft für einen Raum X besitzt, dann gilt das auch für q. Insbesondere sind Retrakte von Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserungen wieder von diesem Typ.

Übungen zu Abschnitt 3.d.

3.118. Übung. Es seien X, Y topologische Räume. Definiere den *Verbund* von X und Y als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I)/\sim\,,$$

wobei „$\sim$“ erzeugt wird durch

$$(x, y, 0) \sim (x, y', 0) \qquad \text{und} \qquad (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \qquad \text{für alle } x, x' \in X \text{ und alle } y, y' \in Y\,.$$

Geben Sie Homöomorphismen $S^k * \mathrm{pt} \cong D^{k+1}$ und $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$ für alle k, ℓ an.

3.119. Übung. Es seien (X, x_0), (Y, y_0) punktierte Räume, und es sei $X * Y$ wie oben definiert. Wir identifizieren X, Y mit Unterräumen von $X * Y$ durch $x \mapsto [(x, y_0, 0)]$, $y \mapsto [(x_0, y, 1)]$ für alle $x \in X$, $y \in Y$, wählen als Basispunkt $\left[\left(x_0, y_0, \frac{1}{2}\right)\right]$ und setzen $U = X * Y \setminus Y$ und $V = X * Y \setminus X$.

(1) Zeigen Sie, dass U, V, $U \cap V$ jeweils zu X, Y und $X \times Y$ homotopieäquivalent sind.

(2) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \to \pi_k(U)\,, \qquad \pi_k(V) \to \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen $\pi_k(U, U \cap V)$.

(3) Die Räume X und Y seien p- beziehungsweise q-zusammenhängend. Wie hoch zusammenhängend ist dann $X * Y$?

Hinweis: Betrachten Sie die natürlichen Abbildung zwischen den langen exakten Sequenz der Paare $(U, U \cap V) \to (X * Y, V)$ und benutzen Sie den Ausschneidungssatz.

Übungen zu Abschnitt 3.e.

3.120. Übung. Zeigen Sie: die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen von S^n nach S^n macht die Gruppe $\pi_n(S^n)$ zu einem Ring isomorph zu $\mathbb{Z}$.

3.121. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$.

(1) Betrachte $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$ und $\deg f|_{\partial D^n} \neq 0$ gegeben, dann gilt $D^n \subset \operatorname{im}(f)$.

(2) Es seien $f_1, \ldots, f_n\colon I^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_i(x) < 0$ falls $x_i = 0$ und $f_i(x) > 0$ falls $x_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x \in I^n$. Dann existiert ein $x_0 \in I^n$ mit $f_1(x_0) = \cdots = f_n(x_0) = 0$.

3.122. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 3.53.

3.123. Übung. Zeigen Sie: Die Abbildung $U(n) \to S^{2n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $U(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(U(n-1))$ für $k < 2n-2$.

3.124. Übung. Zeigen Sie: Die Abbildung $O(n) \to S^{n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $O(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(O(n)) \cong \pi_k(O(n-1))$ und $\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(n-1))$ für $k < n-2$.

Übungen zu Abschnitt 3.f.

3.125. Übung. Für topologische Räume X, B, $A \subset X$, und $f\colon A \to B$ stetig betrachten wir den *Pushout*

$$X \cup_f B = (X \sqcup B)/\sim\,,$$

wobei „$\sim$“ erzeugt wird von $X \ni a \sim f(a) \in B$ für alle $a \in A$. Er erfüllt die universelle Eigenschaft aus Folgerung 1.86.

Es bezeichne $\mathcal{T}op^A$ die Kategorie der *„Räume unter A“* mit Objekten (C, g) mit $g\colon A \to C$ und Morphismen

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op^A}\big((B,f),(C,g)\big) = \big\{\, h\colon B \to C \;\big|\; h \text{ stetig mit } h \circ f = g \,\big\}\,.$$

Es sei (X, A) fest. Zeigen Sie, dass $(B, f) \mapsto (X \cup_f B, B)$ einen Funktor von der Kategorie $\mathcal{T}op^A$ in die Kategorie $\mathcal{P}air$ definiert.

3.126. Übung. Es sei $X = \{a, b\}$ versehen mit der Klumpentopologie und es sei

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(S^n + e_1\right) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

versehen mit der Unterraumptopologie, dabei bezeichne e_1 den ersten Einheitsvektor. Handelt es sich bei den Paaren $(X, \{a\})$ und $(Y, \{0\})$ jeweils um Kofaserungen?

3.127. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Wenn (B, A) und (X, B) Kofaserungen sind, dann ist auch (X, A) Kofaserung.
(2) Es sei (X, A) Kofaserung und Y beliebig, dann ist auch $(X \times Y, A \times Y)$ Kofaserung.
(3) Ein Paar (X, A) sei Retrakt von (Y, B), siehe Übung 3.116. Das heißt, es gebe Abbildungen $i\colon (X, A) \to (Y, B)$ und $r\colon (Y, B) \to (X, A)$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$. Wenn (Y, B) eine Kofaserung ist, dann ist auch (X, A) eine Kofaserung.

3.128. Übung. Zeigen Sie: jede Kofaserung $i\colon A \to X$ ist eine Einbettung, siehe Definition 1.51. Zeigen Sie dazu, dass

$$\iota_1\colon A \cong A \times \{1\} \hookrightarrow Zi \qquad \text{und} \qquad \bar{\iota}_1\colon X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I\ .$$

Einbettungen sind, und betrachten Sie das folgende Diagramm zu Bemerkung 3.58.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & Zi \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow\uparrow{\scriptstyle \bar{r}} \\ X & \xrightarrow{\bar{\iota}_1} & X \times I \end{array}$$

3.129. Übung. Zeigen Sie: wenn X ein Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung ist, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen. Betrachten Sie dazu die stetigen Abbildungen

$$f\colon X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \qquad \text{und} \qquad g\colon X \cong X \times \{1\} \xrightarrow{r} Zi \hookrightarrow X \times I\ ,$$

und zeigen Sie zunächst

$$A = \big\{\, x \in X \;\big|\; f(x) = (x, 1) = r(x, 1) = g(x) \in X \times I \,\big\}\ .$$

3.130. Übung. Es sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und $f\colon A \to B$ stetig.
(1) Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung
$$(X \times I) \cup_{f \times \mathrm{id}_I} (B \times I) \longrightarrow (X \cup_f B) \times I\ .$$
(2) Zeigen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung. *Hinweis:* Sie können dazu das Exponentialgesetz 1.101 benutzen.
(3) Zeigen Sie, dass $(X \cup_f B, B)$ wieder eine abgeschlossene Kofaserung ist.

3.131. Übung. Es sei $i\colon A \to X$ eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie:
(1) Im Sinne von Definition 2.9 ist A ein starker Deformationsretrakt von X.
(2) Es sei $p\colon E \to P$ eine Hurewicz-Faserung, und es seien $f\colon A \to E$ und $g\colon X \to B$ Abbildungen mit $p \circ f = g \circ i$:
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{g} & B\ . \end{array}$$
Dann gibt es eine Abbildung $h\colon X \to E$ mit $f = h \circ i$ und $g = p \circ h$.

3.132. Übung. Formulieren und beweisen Sie die Eckmann-Hilton-dualen Aussagen zur vorigen Aufgabe.

3.133. Übung. Betrachten Sie $A = \{a\} \subset X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, A, X\}$, und zeigen Sie:
(1) Das Paar (X, A) ist eine Kofaserung, $(X^2, A \times X \cup X \times A)$ jedoch nicht.
(2) Geben Sie Abbildungen $u\colon X \to I$ und $h\colon X \times I \to X$ wie in Proposition 3.59 (1) an.

3.134. Übung. Beweisen Sie Bemerkung 3.67.

Übungen zu Abschnitt 3.g.

3.135. Übung. Es seien $(X_j)_{j\in J}$ und Y punktierte Räume. Konstruieren Sie eine natürliche bijektive, stetige Abbildung

$$\bigvee_{j\in J}(X_j \wedge Y) \longrightarrow \Big(\bigvee_{j\in J} X_j\Big) \wedge Y \ .$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist, wenn J endlich ist.

3.136. Übung. Es seien (X, A), (Y, B), $(A, \{x_0\})$ und $(B, \{y_0\})$ abgeschlossene Kofaserungen. Zeigen Sie, dass $(X, A) \wedge (Y, B)$ wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung ist.

3.137. Übung. Es sei (X, A) ein gutes Paar und $f\colon A \to B$ stetig. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$SX \cup_{Sf} SB \longrightarrow S(X \cup_f B) \ ,$$

und beweisen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

Übungen zu Abschnitt 3.h.

3.138. Übung. Bestimmen Sie für die folgenden Sequenzen von Gruppen jeweils den Kolimes G und geben Sie auch die Abbildungen $g_k\colon G_k \to G$ an.

(1) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
(2) $\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
(3) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

3.139. Übung. Zeigen Sie:

(1) Die stabile Homotopiegruppe $\pi_3^s(S^2) \cong \pi_1^s(S^0)$ wird von der Hopf-Faserung $p\colon S^3 \to S^2$ erzeugt.
(2) Es bezeichne $\iota\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ die Inklusion mit $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$. Dann ist $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$.
(3) Es gilt dann auch $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$.

3.140. Übung.
(1) Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz 3.82 für $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$, dass $\pi_k^s(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k^s(\mathbb{C}P^{n-1})$ für alle $k < 2n-1$.
(2) Bestimmen Sie $\pi_2^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.
(3) Bestimmen Sie $\pi_3^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

KAPITEL 4

Elementare Homotopietheorie

In diesem Abschnitt fassen wir einige Konstruktionen und Sätze zusammen, die uns später helfen, Homologie- und Kohomologietheorien homotopietheoretisch zu betrachten. Hierzu gehören zum einen abstrakte Konstruktionen aus der Kategorientheorie, sowie Kategorien mit Zusatzstrukturen, denen wir später in verschiedenen Zusammenhängen wieder begegnen.

Zum anderen betrachten wir die Unterkategorien $\mathcal{CW} \subset kw\mathcal{H} \subset \mathcal{T}op$. Während CW-Komplexe vor allem homotopietheoretisch schöne Eigenschaften haben, zeichnen sich die kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume dadurch aus, dass mit Ihnen viele elementare topologische Konstruktionen möglich sind, und dabei nur sehr selten pathologisches Verhalten auftritt.

Schließlich führen wir Modellkategorien ein, um einen abstrakten Rahmen für Homotopietheorie zu haben, der sich beispielsweise auch in der algebraischen Geometrie einsetzen lässt. Im letzten Abschnitt lernen wir zwei Typen topologischer Sequenzen kennen, aus denen wir viele exakte Sequenzen ableiten können.

4.a. Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten

Wir lernen einige Grundbegriffe aus der abstrakten Kategorientheorie kennen. Hierzu zählen adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten, siehe Folgerung 1.87. Im nächsten Abschnitt helfen uns diese Überlegungen, einige Eigenschaften der Kategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume leichter zu verstehen. Außerdem brauchen wir Limiten und Kolimiten auch im Zusammenhang mit Modellkategorien.

4.1. Definition. Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißt $\mathcal{F}$ *linkadjungiert* zu $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ *rechtsadjungiert* zu $\mathcal{F}$ oder einfach $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zueinander *adjungiert,* wenn es für alle Objekte X von $\mathcal{C}$ und Y von $\mathcal{D}$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y)$$

gibt. Man spricht auch von einer *Adjunktion* und schreibt kurz $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathcal{G}$ oder $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

Man beachte, dass es auf die Reihenfolge der Funktoren ankommt. Wenn $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zueinander adjungiert sind, bedeutet das nicht, dass auch $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ zueinander adjungiert sind.

4.2. Bemerkung. Natürlichkeit bedeutet hier, dass für alle $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ und alle $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) & \xrightarrow{\Phi_{X,Y}} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y) \\ {\scriptstyle g\circ\,\cdot\,\circ \mathcal{F}f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}g\circ\,\cdot\,\circ f} \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X', Y') & \xrightarrow{\Phi_{X',Y'}} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \mathcal{G}Y') \,. \end{array}$$

Die Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ sind im Allgemeinen nicht invers zueinander. Aber es gibt immerhin zwei wichtige natürliche Transformationen, die *Koeinheit* $\varepsilon\colon \mathcal{F}\circ\mathcal{G} \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und die *Einheit* $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{G}\circ\mathcal{F}$, gegeben durch

$$\varepsilon_Y = \Phi^{-1}_{\mathcal{G}Y,Y}(\mathrm{id}_{\mathcal{G}Y}) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\mathcal{G}Y, Y) \qquad \text{und} \qquad \eta_X = \Phi_{X,\mathcal{F}X}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}X}) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}\mathcal{F}X) \,.$$

Die Existenz der natürlichen Bijektionen $\Phi_{X,Y}$ oben ist äquivalent dazu, dass für alle Objekte X von $\mathcal{C}$ und Y von $\mathcal{D}$ gilt:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{F}X} = \varepsilon_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\eta_X \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_{\mathcal{G}Y} = \mathcal{G}\varepsilon_Y \circ \eta_{\mathcal{G}Y} \ ,$$

siehe Übung 4.74 und Bemerkung 4.28.

4.3. Beispiel. Um zu zeigen, wie häufig adjungierte Funktoren sind, geben wir zwei möglichst unterschiedliche Beispiele.

(1) In der Kategorie $\mathcal{S}et$ gilt das *Exponentialgesetz.*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(Y, Z))$$

für alle Mengen X, Y, Z, somit $\cdot \times Y \dashv \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(Y, \cdot)$. In $\mathcal{T}op$ gilt es nach Satz 1.101 (2), falls Y lokalkompakt ist. Als Spezialfall erhalten wir die Adjunktion $S \dashv \Omega$ auf $\mathcal{T}op_+$.

(2) Es sei B eine Menge und V ein $\Bbbk$-Vektorraum. Bezeichne $\langle B\rangle_\Bbbk$ den von B frei erzeugten Vektorraum und $|V|$ die Menge der Vektoren von V, dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}ec_\Bbbk}(\langle B\rangle_\Bbbk, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(B, |V|) \ .$$

Hierbei wird eine Abbildung f abgebildet auf die lineare Abbildung

$$\sum_{b\in B} a_b\, b \longmapsto \sum_{b\in B} a_b\, f(b) \ .$$

Hier ist das „freie Erzeugnis“ linkadjungiert zu einem „vergesslichen Funktor“. Ähnliche Adjunktionen gibt es zwischen $\mathcal{S}et$ und $\mathcal{G}rp$ sowie zwischen $\mathcal{S}et$ und $\mathcal{A}b$.

Al nächstes werden wir den Begriff des Kolimes (direkten Limes) aus Folgerung 1.87 stark verallgemeinern und den dazu dualen Begriff des (inversen) Limes kennenlernen.

4.4. Definition. Ein *Diagramm* ist eine kleine Kategorie, das heißt, eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden. Eine Kategorie mit endlich vielen Objekten, deren Morphismen von endlich vielen erzeugt werden, heißt entsprechend *endliches Diagramm.*

Sei $\mathcal{I}$ ein Diagramm und $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann ist ein Diagramm vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ ein Funktor $\mathcal{X}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$.

Sei C ein Objekt von $\mathcal{C}$, dann ist das diagonale Diagramm Δ_C vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ der konstante Funktor, der alle Objekte von $\mathcal{I}$ auf C und alle Morphismen in $\mathcal{I}$ auf id_C abbildet.

4.5. Beispiel. Es sei $\mathcal{N}$ eine Kategorie mit einem Objekt $*$ und einem Morphismen $f\colon * \to *$, so dass $f^n \neq f^m$ für alle $n > m \geq 0$. Dann gibt es unendlich viele Morphismen; dennoch sprechen wir von einem endlichen Diagramm, da $F = \{f\}$ alle Morphismen erzeugt.

4.6. Bemerkung. Die Diagramme vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ bilden selbst eine Kategorie $\mathcal{C}^\mathcal{I}$, dabei ist ein Morphismus in $\mathcal{C}^\mathcal{I}$ gerade eine natürliche Transformation $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Wir können die Zuordnung $C \mapsto \Delta_C$ als Funktor $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\mathcal{I}$ auffassen, denn ein Morphismus $f\colon C \to D$ liefert eine natürliche Transformation $\Delta_f\colon \Delta_C \to \Delta_D$. Wir nennen ihn den *Diagonalfunktor.*

4.7. Definition. Es sei $\mathcal{I}$ ein Diagramm und $\mathcal{X}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann hat $\mathcal{X}$ einen *Limes,* wenn es ein Objekt $\lim \mathcal{X}$ von $\mathcal{C}$ und eine in C natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\mathcal{I}}(\Delta_C, \mathcal{X}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(C, \lim \mathcal{X})$$

für alle Objekte C von $\mathcal{C}$ gibt. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ hat *alle $\mathcal{I}$-Limiten,* wenn der Diagonalfunktor linksadjungiert zu einem Funktor $\lim\colon \mathcal{C}^\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist. Sie hat *alle Limiten,* wenn sie $\mathcal{I}$-Limiten für alle Diagramme besitzt, und *alle endlichen Limiten,* wenn sie $\mathcal{I}$-Limiten nur für alle endlichen Diagramme besitzt.

Der Funktor $\mathcal{X}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ hat einen *Kolimes,* wenn es ein Objekt $\operatorname{colim}\mathcal{X}$ von $\mathcal{C}$ und eine natürliche Bijektion

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{X}, \Delta_C) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim}\mathcal{X}, C)$$

für alle Objekte C von $\mathcal{C}$ gibt. Die Kategorie $\mathcal{C}$ hat *alle $\mathcal{I}$-Kolimiten,* wenn der Diagonalfunktor rechtsadjungiert zu einem Funktor $\operatorname{colim}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$ ist. Analog definieren wir, wann $\mathcal{C}$ *alle Kolimiten* oder *alle endlichen Kolimiten* hat.

Eine Kategorie heißt *vollständig,* wenn sie alle Limiten hat, *kovollständig,* wenn sie alle Kolimiten hat, und *bivollständig,* wenn beides gilt.

Tatsächlich haben die meisten Kategorien, für die wir uns interessieren, alle Limiten und Kolimiten. In diesem Fall können wir lim und colim als rechts- beziehungsweise linksadjungierten Funktor zum Diagonalfunktor definieren. Wir wollen uns aber die Möglichkeit offenhalten, auch dann über einzelne $\mathcal{I}$-Limiten oder $\mathcal{I}$-Kolimiten zu sprechen, wenn nicht alle existieren; daher jeweils die etwas explizitere Definition am Anfang.

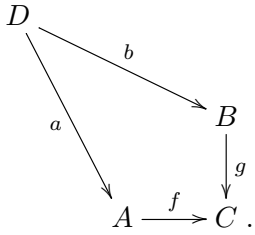
4.8. Bemerkung. Limiten und Kolimiten erfüllen universelle Eigenschaften, falls sie existieren. Dadurch sind sie wie immer bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt, und wir dürfen salopp von „dem“ Limes und „dem“ Kolimes reden. Tatsächlich sind viele der kategoriellen Konstruktionen, die wir anhand von universellen Eigenschaften definiert haben, Beispiele von Limiten oder Kolimiten; mehr dazu gleich.

Wir wollen anhand eines konkreten Beispiels verstehen, was die obige Definition bedeutet. Dazu betrachten wir die endliche Kategorie $\mathcal{I}$ mit drei Objekten und zwei nichttrivialen Morphismen der Form

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet\,. \tag{a}$$

Ein Diagramm $\mathcal{X}$ vom Typ $\mathcal{I}$ in $\mathcal{C}$ ist nichts anderes als ein Diagramm der obigen Form aus Objekten und Morphismen in $\mathcal{C}$. Eine natürliche Transformation vom Diagonalfunktor Δ_D für ein Objekt D von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{X}$ ist somit ein kommutatives Diagramm der Form

(b)



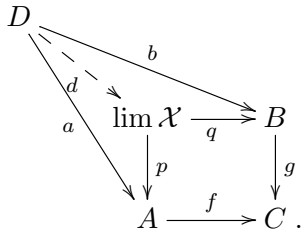
Den offensichtlichen Morphismus $f \circ a = g \circ b\colon D \to C$ haben wir der Übersicht halber weggelassen.

Der Identität $\mathrm{id}_{\lim\mathcal{X}}$ entspricht insbesondere ein Morphismus $\Delta_{\lim\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$, also erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \lim\mathcal{X} & \xrightarrow[q]{} & B \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C\,. \end{array} \tag{c}$$

Da sich lim zu Δ für ein festes $\mathcal{X}$ wie ein rechtsadjungiert Funktor verhält, gibt es zu jedem Diagramm $\mathcal{X}$ vom Typ $\mathcal{I}$ wie in (a) und für alle D und a, b wie in (b) genau eine Abbildung $d\colon D \to$

$\lim \mathcal{X}$ wie im Diagramm



(d)

Das Diagramm kommutiert, falls wir zeigen können, dass $a = p \circ d$ und $b = q \circ d$. Aber das folgt aus der Natürlichkeit der Bijektionen $\Phi_{\cdot,\mathcal{X}}$ in der Definition. Dazu betrachte

$$\begin{array}{ccc} (p,q) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta_{\lim \mathcal{X}}, \mathcal{X}) & \xrightarrow{\Phi_{\lim \mathcal{X},\mathcal{X}}} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim \mathcal{X}, \lim \mathcal{X}) \ni \mathrm{id}_{\lim \mathcal{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle \cdot \circ \Delta_d} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot \circ d} \\ (a,b) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta_D, \mathcal{X}) & \xrightarrow{\Phi_{D,\mathcal{X}}} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \lim \mathcal{X}) \ni d\,. \end{array}$$

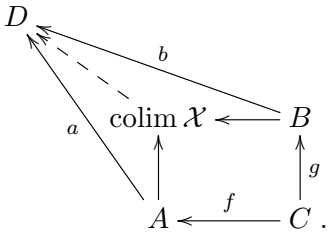
Die obere Zeile entspricht dem Diagramm (c), die untere (d), und rechts gilt offensichtlich $\mathrm{id}_{\lim \mathcal{X}} \circ d = d$. Aufgrund der Natürlichkeit erhalten wir auf der linken Seite die gesuchte Gleichheit. Die Abbildung d ist auch eindeutig: gäbe es links eine andere Abbildung e mit $p \circ e = a$ und $q \circ e = b$, dann wäre rechts $\mathrm{id}_{\lim \mathcal{X}} \circ e = d$, was natürlich nicht sein kann.

Also erfüllt $\lim \mathcal{X}$ genau die universelle Eigenschaft des Pullback. Das heißt, der Pullback ist ein Spezialfall eines endlichen Limes. Wenn alle Pullbacks in $\mathcal{C}$ existieren, ist der Pullback zu Δ rechtsadjungiert.

Indem wir alle Pfeile umdrehen, erhalten wir völlig analog, dass der Kolimes zum Diagramm

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

die universelle Eigenschaft eines Pushouts erfüllt.



Alle anderen Limiten und Kolimiten erfüllen analoge universelle Eigenschaften, die genauso bewiesen werden.

4.9. Beispiel. Wir geben einige bekannte Beispiele für diese Konstruktionen.

(1) Sei $\mathcal{I}$ eine Menge I von Objekten, und die einzigen Morphismen seien die Identitäten dieser Objekte. Ein Funktor $\mathcal{X} \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist also eine durch I indizierte Familie, und ihr Limes in $\mathcal{C}$ ist ihr Produkt, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das terminale Objekt von $\mathcal{C}$.

(2) Analog ist der Kolimes von $\mathcal{X}$ das Koprodukt der obigen Familie, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das initiale Objekt von $\mathcal{C}$.

(3) Bisher haben wir den Begriff des (inversen) Limes für den Spezialfall zum folgenden Diagramm verwendet:

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \cdots\,.$$

(4) Analog haben wir den Begriff des Kolimes oder direkten Limes für folgenden Spezialfall verwendet:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots\,.$$

Wir werden auch in Zukunft die Konstruktionen aus (3) und (4) mit Limes und Kolimes bezeichnen, solange keine Verwechslungsgefahr besteht.

4.10. Proposition. *Jeder (endliche) Limes ist ein Pullback von (endlichen) Produkten. Jeder (endliche) Kolimes ist ein Pushout von (endlichen) Koprodukten.*

Insbesondere hat eine Kategorie $\mathcal{C}$ genau dann alle (endlichen) Limiten, wenn alle (endlichen) Produkte und alle Pullbacks existieren. Sie hat genau dann alle (endlichen) Kolimiten, wenn alle (endlichen) Koprodukte und alle Pushouts existieren.

Beweis. Für die erste Aussage schreiben wir $f\colon D_f \to Z_f$ für alle f aus einer Menge F von Morphismen, die alle Morphismen von $\mathcal{I}$ erzeugt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim \mathcal{X} & \xrightarrow{(p_I)_{I\in\mathcal{I}}} & \prod_I \mathcal{X}(I) \\ \downarrow{\scriptstyle (p_{Z_f})_{f\in F}} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{X}(f)\circ\pi_{D_f},\pi_{Z_f})_{f\in F}} \\ \prod_f \mathcal{X}(Z_f) & \xrightarrow{\Delta} & \prod_f \mathcal{X}(Z_f) \times \prod_f \mathcal{X}(Z_f)\,. \end{array}$$

Hierbei geht das Produkt in der oberen Zeile über alle Objekte I von $\mathcal{I}$, und die Produkte in der unteren Reihe jeweils über alle $f \in F$. Ist $\mathcal{I}$ endlich, so sind es auch alle obigen Produkte. Für jeden Morphismus $f \in F$ ist die f-Komponente des rechten Pfeils das Paar aus der Verkettung $\mathcal{X}(f)\circ\pi_{D_f}$ und der Projektion π_{Z_f}. Der untere Pfeil besteht aus den Diagonalabbildungen $Z_f \to Z_f \times Z_f$.

Der obige Pullback ist genau der Limes. Denn sei $(p_I)_{I\in\mathcal{I}}$ der obere Pfeil, dann kommutiert das Diagramm genau dann, wenn $\mathcal{X}(f) \circ p_{D_f} = p_{Z_f}$ für alle $f \in F$ gilt, und diese Abbildung ist dann die f-Komponente des linken Pfeils. Und analog entspricht jede Abbildung $C \to \lim \mathcal{X}$ genau einer Familie von Abbildungen $C \to \mathcal{X}(I)$ für alle $I \in \mathcal{I}$, die mit den $f \in F$ verträglich sind.

Völlig analog lässt sich jeder Kolimes als Pushout von Koprodukten darstellen. □

4.11. Beispiel. Die folgenden Kategorien sind somit bivollständig:

$$\mathcal{S}et\,, \qquad \mathcal{S}et_+\,, \qquad \mathcal{G}rp\,, \qquad \mathcal{A}b\,, \qquad \mathcal{V}ec_{\Bbbk}\,, \qquad \mathcal{T}op\,, \qquad \mathcal{T}op_+\,.$$

Das Koprodukt und den Pushout von Gruppen haben wir in Abschnitt 2.d kennengelernt.

4.12. Definition. Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *stetig,* wenn für alle Diagramme $\mathcal{X}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, die einen Limes in $\mathcal{C}$ besitzen, auch $\mathcal{F} \circ \mathcal{X}$ einen Limes besitzt, nämlich $\lim(\mathcal{F} \circ \mathcal{X}) = \mathcal{F}(\lim \mathcal{X})$.

Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *kostetig,* wenn für alle Diagramme $\mathcal{X}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, die einen Kolimes in $\mathcal{C}$ besitzen, auch $\mathcal{F} \circ \mathcal{X}$ einen Kolimes besitzt, nämlich $\operatorname{colim}(\mathcal{F} \circ \mathcal{X}) = \mathcal{F}(\operatorname{colim} \mathcal{X})$.

Die Begriffe „(ko-) vollständig“ und „(ko-)stetig“ sind in einer recht oberflächlichen Analogie zur Topologie metrischer Räume gewählt. Aufgrund von Proposition 4.10 reicht es, für Stetigkeit nur Produkte und Pullbacks, und für Kostetigkeit nur Koprodukte und Pushouts zu betrachten.

4.13. Beispiel. Die Fundamentalgruppe ist verträglich mit dem Produkt punktierter Räume. Nach dem Satz 2.39 von Seifert-van Kampen ist sie unter gewissen Voraussetzungen verträglich mit Koprodukten und Pushouts, jedoch keinesfalls immer, siehe Beispiel 2.41.

4.14. Lemma. *Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, und $\mathcal{F}\colon \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C} : \mathcal{G}$ zueinander adjungierte Funktoren. Dann ist $\mathcal{G}$ stetig und $\mathcal{F}$ kostetig.*

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen gibt es umgekehrt zu einem stetigen Funktor einen linksadjungierten Funktor, und zu einem kostetigen Funktor einen rechtsadjungierten Funktor. Also ist das obige Lemma oft die Methode der Wahl, um Stetigkeit oder Kostetigkeit zu zeigen.

BEWEIS. Der Beweis ist rein formal. Zunächst überlegt man sich, dass

$$\Delta_{\mathcal{G}C} = \mathcal{G} \circ \Delta_C \qquad \text{und} \qquad \Delta_{\mathcal{F}D} = \mathcal{F} \circ \Delta_D \ .$$

Außerdem induzieren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ aufgrund der Natürlichkeit der Adjunktion auch adjungierte Funktoren $\mathcal{F}\colon \mathcal{D}^{\mathcal{I}} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{I}} : \mathcal{G}$. Für $\mathcal{X}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ schreibt man

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(D, \mathcal{G}(\lim \mathcal{X})\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{F}D, \lim \mathcal{X}\big) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\Delta_{\mathcal{F}D}, \mathcal{X}\big) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{F} \circ \Delta_D, \mathcal{X}\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}\big(\Delta_D, \mathcal{G} \circ \mathcal{X}\big) \ .\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{G}(\lim \mathcal{X})$ der Limes von $\mathcal{G} \circ \mathcal{X}$.

Analog gilt für $\mathcal{X}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}$, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{F}(\operatorname{colim} \mathcal{X}), C\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} \mathcal{X}, \mathcal{G}C\big) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{G}C}\big) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{X}, \mathcal{G} \circ \Delta_C\big) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}\big(\mathcal{F} \circ \mathcal{X}, \Delta_C\big) \ . \quad \square\end{aligned}$$

4.15. BEISPIEL. Wir betrachten das adjungierte Paar $\langle \cdot \rangle_{\Bbbk}\colon \mathcal{S}et \leftrightarrows \mathcal{V}ec_{\Bbbk} : |\cdot|$ aus Beispiel 4.3 (2).

(1) Das freie Erzeugnis verträgt sich mit Kolimiten, beispielsweise gilt

$$\left\langle \coprod_{i \in I} M_i \right\rangle_{\Bbbk} \cong \bigoplus_{i \in I} \langle M_i \rangle_{\Bbbk} \ .$$

Mit allgemeinen Limiten ist $\langle \cdot \rangle_{\Bbbk}$ jedoch nicht verträglich, zum Beispiel gilt

$$\langle M_1 \times M_2 \rangle_{\Bbbk} \cong \langle M_1 \rangle_{\Bbbk} \otimes \langle M_2 \rangle_{\Bbbk} \ ,$$

und das Tensorprodukt ist nicht das kategorielle Produkt. Auf der anderen Seite lässt sich für ein unendliches Produkt von Vektorräumen nicht so einfach eine Basis angeben.

(2) Der vergessliche Funktor $|\cdot|$ vertauscht mit Limiten. Das erklärt, warum das kategorielle Produkt von beliebig vielen Vektorräumen durch das kartesische Produkt realisiert wird. Andererseits liegt dem Koprodukt nicht das Koprodukt der zugrundeliegenden Mengen zugrunde.

Analoge Überlegungen gelten selbstverständlich auch für die Kategorien $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{A}b$ und $\mathcal{M}od_R$. Man beachte beispielsweise, dass das Produkt freier Gruppen im Allgemeinen nicht wieder frei ist.

4.b. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume

In der Kategorie $\mathcal{T}op$ aller topologischer Räume gibt es einige „Pathologien“. Beispielsweise ist nicht jede Kofaserung abgeschlossen, das Exponentialgesetz 1.101 (3) gilt nur unter Zusatzvoraussetzungen, und Produkte von CW-Komplexen sind nicht automatisch selbst CW-Komplexe. Wir betrachten hier die Kategorie $kw\mathcal{H}$ der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume, die diese Probleme nicht hat; mehr zu dieser Kategorie findet sich in [**St**]. Um das Exponentialgesetz zu beweisen und besser zu verstehen, führen wir in Abschnitt 4.c den Begriff einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein.

Wir betrachten eine sogenannte *volle Unterkategorie* $kw\mathcal{H}$ der Kategorie $\mathcal{T}op$, das heißt, unsere Kategorie enthält eine gewisse Auswahl der Objekte von $\mathcal{T}op$, aber für je zwei Objekten X, Y von $kw\mathcal{H}$ gilt

$$\operatorname{Hom}_{kw\mathcal{H}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) \ ,$$

es sind also nach wie vor genau die stetigen Abbildungen als Morphismen erlaubt. Die Definition von $kw\mathcal{H}$ erfolgt, indem wir mit stetigen Abbildungen $f\colon K \to X$ von Kompakta nach X gewisse Eigenschaften „testen“. Dabei erinnern wir uns, dass bei uns alle kompakten Räume gemäß Definition 1.58 als Hausdorff vorausgesetzt sind.

4.16. DEFINITION. Es sei X ein topologischer Raum.

(1) Wir nennen X *kompakt erzeugt,* wenn eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist, falls $f^{-1}(U) \subset K$ für alle kompakten Räume K und alle stetigen $f\colon K \to X$ offen ist.
(2) Wir nennen X *schwach Hausdorff,* wenn $\operatorname{im} f \subset X$ abgeschlossen ist für alle Kompakta K und alle stetigen Abbildungen $f\colon K \to X$.
(3) Es bezeichne $kw\mathcal{H} \subset \mathcal{T}op$ die volle Unterkategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume.

Nach Bemerkung 1.59 (2) und (5) ist jeder Hausdorff-Raum schwach Hausdorff, und da pt kompakt ist, erfüllt jeder schwache Hausdorff-Raum das erste Trennungsaxiom (T1). Ohne Beweis geben wir einige Klassen von Beispielen an.

4.17. Proposition. *Die Kategorie $kw\mathcal{H}$ enthält*

(1) *alle Hausdorff-Räume, die das Abzählbarkeitsaxiom (A1) erfüllen,*
(2) *alle metrischen oder metrisierbaren Räume,*
(3) *alle topologischen Mannigfaltigkeiten, und*
(4) *alle CW-Komplexe.*

Es sei X ein beliebiger topologischer Raum, dann bezeichne kX die gleiche Menge mit der *kompakt erzeugten Topologie*

$$\left\{ U \subset X \;\middle|\; f^{-1}(U) \subset K \text{ offen für alle Kompakta } K \text{ und alle stetigen } f\colon K \to X \right\}.$$

Wir nennen offene Mengen in kX auch *k-offen.* Jede offene Menge ist also auch k-offen: $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_{kX}$.

4.18. Proposition. *Die Zuordnung k ist ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{T}op$ in die Kategorie $k\mathcal{T}op$ der kompakt erzeugten Räume. Er ist rechtsadjungiert zur Inklusion $k\mathcal{T}op \hookrightarrow \mathcal{T}op$.*

Wir verschieben den Beweis in die Übungen 4.80 und 4.81.

4.19. Folgerung. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to k\mathcal{T}op$ ein Diagramm. Dann gilt*

$$\lim{}^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F} = k \lim{}^{\mathcal{T}op} \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\operatorname{colim}{}^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F} = \operatorname{colim}{}^{\mathcal{T}op} \mathcal{F}\,. \tag{2}$$

Insbesondere ist die Kategorie $k\mathcal{T}op$ bivollständig, und der Funktor k ist stetig.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus den Lemma 4.14 und 4.18. Für die zweite Aussage reicht es zu zeigen, dass $\operatorname{colim}^{\mathcal{T}op} \mathcal{F}$ kompakt erzeugt ist, denn universelle Eigenschaften lassen sich immer in volle Unterkategorien übertragen. Nach Proposition 4.10 reicht es, Koprodukte und Pushouts, also Quotienten von Koprodukten, zu betrachten.

Die Topologie auf $X = \coprod_{i\in I} X_i$ ist die feinste Topologie, für die alle Inklusionen $X_j \to X$ stetig sind. Aber dann sind auch die Abbildungen $X_j = kX_j \to kX$ stetig, und da die kompakte erzeugte Topologie feiner ist, folgt, dass X bereits kompakt erzeugt ist. Analog geht der Beweis für Quotienten. □

Aus Lemma 4.14 folgt übrigens auch, dass der Kolimes in $k\mathcal{T}op$, falls es ihn gibt, der gleiche sein muss wie in $\mathcal{T}op$. Aber im Gegensatz zum Limes mussten wir zeigen, dass er existiert.

Die Hausdorff-Eigenschaft lässt sich wie folgt umformulieren: Ein Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn $\Delta X \subset X \times X$ abgeschlossen ist, siehe Übung 1.136. Diese Idee übertragen wir auf kompakt erzeugte Räume.

4.20. Proposition. *Es sei X kompakt erzeugt. Dann ist X schwach Hausdorff genau dann, wenn $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

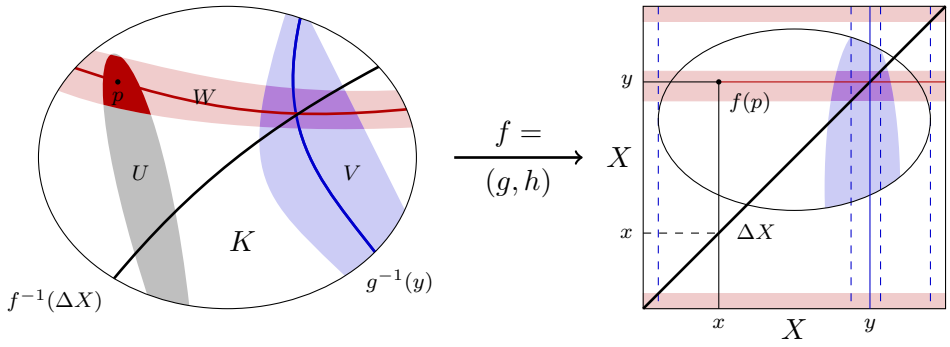


ABBILDUNG 4.1. Für X in $kw\mathcal{H}$ ist $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen.

BEWEIS. Sei zunächst X kompakt erzeugt und $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen. Sei K kompakt und $f\colon K \to X$ beliebig. Zu zeigen ist für alle kompakten L und alle $g\colon L \to X$, dass $g^{-1}(\operatorname{im} f) \subset L$ abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung ist die Menge

$$\left\{ (p,q) \in K \times L \;\middle|\; f(p) = g(q) \right\} = (f \times g)^{-1}(\Delta X) \subset K \times L$$

abgeschlossen, also auch kompakt. Ihr Bild unter der Projektion auf L ist dann ebenfalls abgeschlossen. Aber dieses Bild ist gerade $g^{-1}(\operatorname{im} f)$. Also ist X schwach Hausdorff.

Sei jetzt X kompakt erzeugt und schwach Hausdorff. Zu zeigen ist für jedes Kompaktum K und jede Abbildung $f = (g,h)\colon K \to X \times X$, dass das Urbild von ΔX abgeschlossen ist. Sei $p \in K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, so dass $x = g(p) \neq y = h(p)$. Als einpunktige Menge ist $\{y\} \subset X$ kompakt, also abgeschlossen. Also haben wir disjunkte abgeschlossene Teilmengen $\{p\}$ und $g^{-1}(y) \subset K$.

Da K normal ist, finden wir offene, disjunkte Umgebungen U von p und $V \subset K$ von $g^{-1}(y)$. Dann ist $K \setminus V$ kompakt, somit ist $g(K \setminus V)$ abgeschlossen in X und $W = K \setminus h^{-1}(g(K \setminus V))$ offen in K. Es gilt $p \in W$, da $y = h(p) \in g(V)$. Außerdem gilt $U \cap W \cap f^{-1}(\Delta X) = \emptyset$, dazu sei $q \in U \cap W$. Aus $q \in U$ folgt $q \in K \setminus V$ und somit $g(q) \in g(K \setminus V)$. Aus $q \in W$ folgt andererseits $h(q) \notin g(K \setminus V)$, somit $f(q) = (g(q), h(q)) \notin \Delta X$. Also finden wir für $p \notin f^{-1}(\Delta X)$ eine Umgebung $U \cap W$ in $K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, somit ist ΔX eine k-abgeschlossene Menge in $X \times X$. □

Wir können eine Äquivalenzrelation „$\sim$“ auf einem Raum X als eine Teilmenge

$$R_\sim = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x \sim y \right\} \subset X \times X$$

mit $\Delta_X \subset R_\sim$ schreiben, dann gilt zum Beispiel $R_= = \Delta X$.

4.21. PROPOSITION. *Es sei X ein kompakt erzeugter Raum und „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist $X/\sim$ genau dann ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum, wenn $R_\sim \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

Wir verschieben diesen Beweis auf später. Die Schwierigkeit besteht darin, zu zeigen, dass das Bild $\Delta_{X/\sim}$ von $R_\sim$ in $k((X/\sim) \times (X/\sim))$ wieder abgeschlossen ist.

Wir betrachten jetzt alle Äquivalenzrelationen, die durch k-abgeschlossene Teilmengen dargestellt werden. Da der Durchschnitt über eine Menge solcher Teilmengen wieder eine Äquivalenzrelation darstellt, gibt es eine minimale k-abgeschlossene Äquivalenzrelation „$\approx$“. Wir betrachten den Raum $hX = X/\approx$ mit der Quotiententopologie.

4.22. PROPOSITION. *Die Zuordnung $X \mapsto hX$ ist ein Funktor $k\mathcal{T}op \to kw\mathcal{H}$. Er ist linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\mathcal{T}op$.*

BEWEIS. Nach Proposition 4.21 ist $X/\approx$ ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum.

Sei jetzt Y ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist auch $f \times f\colon k(X \times X) \to k(Y \times Y)$ stetig, somit ist das Urbild von Δ_Y in $k(X \times X)$ abgeschlossen und damit gröber als $R_{\approx_X}$. Das heißt, f induziert eine Abbildung $hX \to Y$, die nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auch stetig ist. Hieraus folgt sowohl, dass h ein Funktor ist, als auch, dass er linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\mathcal{T}op$ ist. □

4.23. Folgerung. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to kw\mathcal{H}$ ein Diagramm. Dann gilt*

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = \lim^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\operatorname{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h \operatorname{colim}^{k\mathcal{T}op} \mathcal{F}\,. \tag{2}$$

Insbesondere ist die Kategorie $kw\mathcal{H}$ bivollständig, und der Funktor h ist kostetig.

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 4.14. Für die erste Aussage reicht es zu zeigen, dass jeder Limes von kompakt erzeugten schwach Hausdorff-Räumen in $k\mathcal{T}op$ bereits schwach Hausdorff ist. Wegen Proposition 4.10 reicht es, Produkte in $k\mathcal{T}op$ und Pullbacks, also Unterräume von Produkten in $k\mathcal{T}op$ zu betrachten.

Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, und es sei $X = k\prod_{i\in I} X_i$ ihr Produkt in $k\mathcal{T}op$. Für alle $j \in I$ ist die Projektionsabbildung

$$\pi_j\colon k(X \times X) \cong k\prod_{i\in I} k(X_i \times X_i) \longrightarrow k(X_j \times X_j)$$

stetig, somit ist $\pi_j^{-1}\Delta X_j$ abgeschlossen in $k(X \times X)$. Aber dann ist auch $\Delta X = \bigcap_{j\in I} \pi_j^{-1}\Delta X_j$ abgeschlossen in $k(X \times X)$, und somit ist X schwach Hausdorff.

Wir können einen Pullback in $\mathcal{T}op$ als Unterraum A eines Produktraums X auffassen. Nach Folgerung 4.19 müssen wir jeweils den Funktor k anwenden, um den Pullback in $k\mathcal{T}op$ zu erhalten. Sei also $A \subset kX$ ein Unterraum. Dann ist kA ebenfalls kompakt erzeugt, und die Inklusion $\iota\colon kA \to A \hookrightarrow kX$ ist stetig. Sei Y ebenfalls kompakt erzeugt, dann ist nach Proposition 4.18 eine Abbildung $F\colon Y \to kA$ genau dann stetig, wenn $F\colon Y \to A$ stetig ist, nach Satz 1.62 (2) also genau dann, wenn $\iota \circ F\colon Y \to kX$ stetig ist. Sei jetzt K kompakt und $f\colon K \to kA$ stetig. Dann ist $\iota \circ f\colon K \to kX$ stetig, also ist $\operatorname{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Aber dann ist auch $\operatorname{im}(f) = \iota^{-1}\operatorname{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Also ist kA schwach Hausdorff, und somit ist jeder Limes von kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räumen in $k\mathcal{T}op$ selbst wieder schwach Hausdorff. □

4.24. Bemerkung. Zusammenfassend erhalten wir für Diagramme $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to kw\mathcal{H}$ also

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = k\lim^{\mathcal{T}op} \mathcal{F} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h\operatorname{colim}^{\mathcal{T}op} \mathcal{F}\,.$$

Im Beweis von Folgerung 4.19 haben wir außerdem gesehen, dass wir den Funktor k auf Produkte und Unterräume anwenden müssen, um in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.62 zu erhalten. Analog haben wir in Folgerung 4.23 den Funktor h auf Koprodukte und Quotienten angewandt, um die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.83 zu gewährleisten. Wir werden in Zukunft meistens in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Dann verstehen mit Unterräume, Quotienten, Produkte, Koprodukte, sowie allgemeine Limiten und Kolimiten ebenfalls in $kw\mathcal{H}$. Insbesondere schreiben wir „k“ und „h“ in der Regel nicht mit, es sei denn, um Verwechslungen zu vermeiden.

4.25. Bemerkung. Der Funktor h vereinfacht topologische Räume, indem er Punkte, die sich nicht gut genug trennen lassen, miteinander identifiziert. Wir wollen uns vergewissern, dass er uns gewisse Konstruktionen nicht kaputt macht.

(1) Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, dann ist auch ihre disjunkte Vereinigung $\coprod_{i\in I} X_i$ wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff (Übung).

(2) Es sei $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \cdots$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, so dass X_i für alle i ein abgeschlossener Unterraum von X_{i+1} ist. Dann ist auch ihre aufsteigende Vereinigung $\operatorname{colim} X_i$ wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff (Übung).

(3) Es sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f\colon kA \to Y$ stetig. Dann ist auch der Pushout $X \cup_f Y$ in $k\mathcal{T}op$ wieder schwach-Hausdorff. Die Teilmengen $A \times Y$ und $A \times A$ sind in $X \times Y$ beziehungsweise $X \times X$, also erst recht in $k(X \times Y)$ beziehungsweise $k(X \times X)$ abgeschlossen. Da f stetig ist, sind auch die Teilmengen

$$(f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) \subset k(kA \times Y) \subset k(X \times Y)$$
$$(f \times f)^{-1}(\Delta Y) \subset k(kA \times kA) \subset k(X \times X)$$

abgeschlossen, also auch

$$\begin{aligned} R_\sim &= \big(\Delta X \cup (f \times f)^{-1}(\Delta Y)\big) \sqcup (f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) \sqcup (\mathrm{id}_Y \times f)^{-1}(\Delta Y) \sqcup \Delta Y \\ &\subset k(X \times X) \sqcup k(X \times Y) \sqcup k(Y \times X) \sqcup k(Y \times Y) = k((X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y)) \,. \end{aligned}$$

Also ist $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\!\sim$ schwach Hausdorff.

(4) Das reduzierte Produkt $X \wedge Y$ in $k\mathcal{T}op$ ist wieder schwach Hausdorff. Denn die einpunktigen Teilmengen $\{x_0\} \subset X$ und $\{y_0\} \subset Y$ sind kompakt und daher abgeschlossen. Die Diagonalen $\Delta X \subset k(X \times X)$ und $\Delta Y \subset k(Y \times Y)$ sind ebenfalls abgeschlossen, also auch $\Delta(X \times Y) = \Delta X \times \Delta Y \subset k(X \times X) \times k(Y \times Y)$, und die Topologie auf $k(X \times X \times Y \times Y) \cong k(k(X \times Y) \times k(X \times Y))$ ist noch feiner. Also ist auch die Menge

$$\begin{aligned} R_\sim = \Delta(X \times Y) \cup \big((X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y) \times (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)\big) \\ \subset k(k(X \times Y) \times k(X \times Y)) \end{aligned}$$

abgeschlossen, und $X \wedge Y = k(X \times Y)/\!\sim$ ist schwach Hausdorff.

Wenn $A \subset X$ nicht abgeschlossen ist, stimmt Aussage (3) nicht mehr, beispielsweise sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathrm{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $h(\mathbb{R} \cup_f \mathrm{pt}) \cong \mathrm{pt}$. Und aus (1)–(3) folgt, wie anfangs behauptet, dass CW-Komplexe schwach Hausdorff sind, siehe Folgerung 4.39.

4.c. Das Exponentialgesetz

Wir kommen jetzt zum Raum der stetigen Abbildungen, siehe auch Abschnitt 1.g. Die folgenden Konstruktionen werden uns helfen, weitere schöne Eigenschaften der Kategorie $kw\mathcal{H}$ zu beweisen. Um den topologischen Aufwand gering zu halten, führen wir den Begriff der abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein. Um den abstrakten Aufwand in Grenzen zu halten, begnügen wir uns mit einer relativ einfachen Version, die für den Anfang ausreicht.

4.26. Definition. Eine *monoidale Kategorie* $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit

- einem Funktor $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, dem *Tensorprodukt,*
- einem *Einheitsobjekt* E, und
- natürlichen Isomorphismen

$$\alpha_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z) \,,$$
$$\lambda_X\colon E \otimes X \xrightarrow{\cong} X \qquad \text{und} \qquad \rho_X\colon X \otimes E \xrightarrow{\cong} X$$

mit $\rho_E = \lambda_E\colon E \otimes E \to E$, so dass für alle Objekte X, Y, Z, W die folgenden Axiome gelten:

$$\alpha_{X,Y,Z\otimes W} \circ \alpha_{X\otimes Y,Z,W} = (\mathrm{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}) \circ \alpha_{X,Y\otimes Z,W} \circ (\alpha_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_W) \,, \tag{1}$$
$$\rho_X \otimes \mathrm{id}_Y = (\mathrm{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ \alpha_{X,E,Y} \,. \tag{2}$$

Sie heißt (*rechts-*) *abgeschlossen,* falls zu jedem Objekt Y ein zu $\cdot \otimes Y$ rechtsadjungierter Funktor $\hom(Y, \cdot)$ existiert. Sie heißt *kartesisch abgeschlossen,* wenn darüberhinaus das Tensorprodukt ein Produkt im Sinne von Bemerkung 1.54 ist und das Einheitsobjekt ein terminales Objekt.

Zu den Eigenschaften (1)–(2) gehören die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) & \\ {\scriptstyle \alpha_{X\otimes Y,Z,W}}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle \alpha_{X,Y,Z\otimes W}} \\ ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\ {\scriptstyle \alpha_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}} \\ (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{\alpha_{X,Y\otimes Z,W}} & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W)\ , \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes E) \otimes Y & \xrightarrow{\alpha_{X,E,Y}} & X \otimes (E \otimes Y) \\ & {\scriptstyle \rho_X \otimes \mathrm{id}_Y}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X \otimes \lambda_Y} & \\ & X \otimes Y\ . & \end{array}$$

Sie besagen, dass die Objekte von $\mathcal{C}$ eine „große“ Halbgruppe oder auch Monoid bilden („groß“ bedeutet, dass der Träger eine echte Klasse sein kann), wobei die üblichen Rechenregeln aber stets nur bis auf eindeutige natürliche Isomorphismen gelten. Man nennt eine Kategorie *streng monoidal,* wenn $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ und $E \otimes X = X = X \otimes E$ für alle Objekte X, Y und Z gelten, und $\alpha_{X,Y,Z}$ λ_X und ρ_X jeweils die Identitäten dieser Objekte sind. Die meisten monoidalen Kategorien sind nicht streng monoidal, aber mit einer Art Auswahlaxiom lässt sich zu jeder monoidalen Kategorie eine äquivalente streng monoidale Kategorie konstruieren.

Der Funktor hom heißt *interner hom-Funktor.* Er ist im ersten Argument kontravariant und im zweiten Argument kovariant, siehe Übung 4.90. „Intern“ bedeutet hier, dass $\hom(Y, Z)$ im Gegensatz zur Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ein Objekt der Kategorie $\mathcal{C}$ ist. Wir können umgekehrt auch *abgeschlossene Kategorien* $(\mathcal{C}, \hom, E)$ als Kategorien mit Einheitsobjekt E, internem hom-Funktor hom und gewissen natürlichen Transformationen definieren.

4.27. Beispiel. Wir geben in Abbildung 4.2 eine Liste uns bekannter Kategorien mit verschiedenen monoidalen Strukturen an. Jede der Kategorien ist jeweils monoidal

- mit Koprodukt und initialem Objekt,
- mit Produkt und terminalem Objekt, beziehungsweise
- mit Tensorprodukt und Einheitsobjekt (falls definiert),

wir erhalten also pro Zeile bis zu drei verschiedene monoidale Kategorien, und nur bei einem Typ von Kategorien ist das abstrakte Tensorprodukt aus Definition 4.26 tatsächlich ein Tensorprodukt.

All diese Beispiele sind sogar *symmetrische monoidale Kategorien,* das heißt, es gibt natürliche Isomorphismen $\tau_{X,Y} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$, die gewisse Zusatzaxiome erfüllen, auf die wir hier noch nicht eingehen wollen.

(1) Die Kategorie $(\mathcal{S}et, \times, \mathrm{pt})$ ist kartesisch abgeschlossen. Das haben wir im Beweis von Satz 1.101 bereits ausgenutzt. Für die Kategorie $(\mathcal{S}et_+, \wedge, S^0)$ der punktierten Mengen verwenden wir die gleiche Notation wie für $\mathcal{T}op_+$. Sie ist abgeschlossen monoidal, aber das kartesische Produkt „$\times$“ ist nicht das Tensorprodukt „$\wedge$“.

Kategorie	Koprodukt	Initiales Objekt	Produkt	Terminales Objekt	Tensor-produkt	Einheits-objekt
$\mathcal{G}rp$	$*$	$\{e\}$	$\times$	$\{e\}$	—	—
$\mathcal{M}od_R, \mathcal{A}b, \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$	$\oplus$	0	$\oplus$	0	$\otimes$	$R, \mathbb{Z}, \Bbbk$
$\mathcal{S}et, (\mathcal{T}op)$, $k\mathcal{T}op, kw\mathcal{H}$	$\sqcup$	$\emptyset$	$\times$	pt	$\times$	pt
$\mathcal{S}et_+, (\mathcal{T}op_+)$, $k\mathcal{T}op_+, kw\mathcal{H}_+$	$\vee$	pt	$\times$	pt	$\wedge$	S^0

Abbildung 4.2. Beispiele monoidaler Kategorien

(2) Die Kategorie $\mathcal{M}od_R$ für einen kommutativen Ring R mit 1 ist abgeschlossen monoidal, denn die linearen Abbildungen zwischen zwei R-Moduln bilden selbst wieder einen R-Modul. Spezialfälle sind $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{V}ec_{\Bbbk} = \mathcal{M}od_{\Bbbk}$. Das Tensorprodukt von Moduln ist Namensgeber für unser Tensorprodukt in Definition 4.26.

(3) In der Unterkategorie $fd\,\mathcal{V}ec_{\Bbbk} \subset \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ der endlich-dimensionalen Vektorräume gibt es einen Dualitätsfunktor $X \mapsto X^* = \hom(X, \Bbbk)$, so dass $\hom(X, Y) \cong X^* \otimes Y$. In den anderen obigen Beispielen gibt es so etwas jedoch nicht. In Abschnitt 7.a führen wir eine Art „stabiler“ topologischer Dualität ein.

(4) Die Kategorien $(\mathcal{T}op, \times, \mathrm{pt})$ und $(\mathcal{T}op_+, \wedge, S^0)$ sind monoidal. Für $\mathcal{T}op_+$ haben wir das in Bemerkung 3.70 angedeutet. Beide Kategorien sind nicht abgeschlossen, da einzelne Punkte im Exponentialgesetz 1.101 nicht ohne Voraussetzungen gelten.

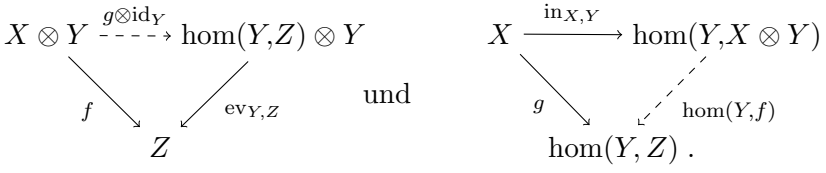
(5) Die Kategorien $k\mathcal{T}op$ und $k\mathcal{T}op_+$ sowie $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ sind nach Satz 4.31 und Folgerung 4.34 abgeschlossen und monoidal. Zur Bedeutung der Symbole „$\times$“ und „$\wedge$“ siehe Bemerkungen 4.35 und 4.25 (4).

4.28. Bemerkung. Es seien X, Y und Z Objekte einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$. Wir bezeichnen die Koeinheit der Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \hom(Y, \cdot)$ mit $\mathrm{ev}_{Y,Z} = \varepsilon_Z \colon \hom(Y, Z) \otimes Y \to Z$ und die Einheit mit $\mathrm{in}_{X,Y} = \eta_X \colon X \to \hom(Y, X \otimes Y)$. Aus der Natürlichkeit der Adjunktion in Bemerkung 4.2 erhalten wir zwei universelle Eigenschaften, siehe Übung 4.91.

(1) *Universelle Eigenschaft des internen hom-Funktors.* Es existiert eine natürliche Transformation $\mathrm{ev}_{Y,Z} \colon \hom(Y, Z) \otimes Y \to Z$, so dass zu jedem Morphismus $f \colon X \otimes Y \to Z$ ein eindeutiger Morphismus $g \colon X \to \hom(Y, Z)$ mit $f = \mathrm{ev}_{Y,Z} \circ (g \otimes \mathrm{id}_Y)$ existiert.

(2) *Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes.* Es existiert eine natürliche Transformation $\mathrm{in}_{X,Y} \colon X \to \hom(Y, X \otimes Y)$, so dass zu jedem Morphismus $g \colon X \to \hom(Y, Z)$ ein eindeutiger Morphismus $f \colon X \otimes Y \to Z$ mit $g = \hom(Y, f) \circ \mathrm{in}_{X,Y}$ existiert.

Die Abbildung g in (2) repräsentiert dabei so etwas wie eine „bilineare Abbildung“ $X \times Y \to Z$.



Insbesondere sehen wir, dass sich die Bijektion $\Phi_{X,Z}$ aus Definition 4.1 und ihr Inverses mit Hilfe der Einheit beziehungsweise der Koeinheit beschreiben lassen; das gilt analog für alle Adjunktionen.

4.29. Bemerkung. In einer Kategorie sind Objekte üblicherweise abstrakt, keine Mengen, deren Elemente man (mit der Sprache der Kategorien) erkennen könnte. Man kann also auch Morphismen nicht als Zuordnungsvorschriften interpretieren. In abgeschlossenen monoidalen Kategorien geht all das jedoch.

Sei $\mathcal{C}$ zunächst nur monoidal. Jedem Objekt X können wir die Menge $|X| = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, X)$ zuordnen. Wenn E das initiale Objekt (und $\otimes$ das Koprodukt) ist, hat diese Menge stets nur ein Element. In $(\mathcal{S}et, \times, \mathrm{pt})$ (und genauso in $\mathcal{T}op$, $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$) hingegen entsprechen die Bildpunkte von Morphismen $\mathrm{pt} \to X$ genau den Elementen von X. In $(\mathcal{M}od_R, \otimes, R)$ identifizieren wir einen Morphismus $E = R \to X$ mit dem Bild von $1 \in R$. In $(\mathcal{S}et_+, \wedge, S^0)$ (und genauso in $\mathcal{T}op_+$, $k\mathcal{T}op_+$ und $kw\mathcal{H}_+$) betrachten wir das Bild desjenigen Punktes in S^0, der nicht Basispunkt ist. In diesen Fällen ist $|X|$ stets die dem Objekt X zugrundeliegende Menge.

Ab jetzt sei $\mathcal{C}$ abgeschlossen. Für $X = E$ erhalten wir mit der Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \hom(Y, \cdot)$ eine bijektive Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\circ\lambda_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(E, \hom(Y, Z)\big) = |\hom(Y, Z)| \ ,$$

da λ_Y ein Isomorphismus ist. Also entspricht $\hom(Y, Z)$ der Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Um Morphismen auf Elementen auszuwerten, benutzen wir die Komposition $\circ$ von Morphismen in $\mathcal{C}$:

$$|\hom(Y, Z)| \times |Y| \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Y) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Z) = |Z| \ .$$

Wir erhalten also eine Abbildung $|\hom(Y, Z)| \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(|Y|, |Z|)$, und man kann überprüfen, dass das einen „vergesslichen“ Funktor $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ liefert.

Sei schließlich $\mathcal{C}$ zusätzlich punktiert, das heißt, es gibt ein Nullobjekt 0, also eines, das gleichzeitig initial und terminal ist. Dann erhalten wir einen vergesslichen Funktor $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et_+$, dabei repräsentiert der Nullmorphismus $E \to 0 \to X$ den Basispunkt von $|X|$.

4.30. Satz (Abstraktes Exponentialgesetz). *In jeder abgeschlossenen monoidalen Kategorie existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\hom(X \otimes Y, Z) \cong \hom(X, \hom(Y, Z)) \ .$$

Der Unterschied zur in Definition 4.26 geforderten Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \hom(Y, \cdot)$ besteht darin, dass hier die internen Hom-Objekte verglichen werden, und nicht die Morphismenmengen.

Beweis. Es sei W ein weiteres Objekt, dann erhalten wir eine Verkettung natürlicher Bijektionen

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W, \underbrace{\hom(X \otimes Y, Z)}_{A}\big) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W \otimes X \otimes Y, Z\big) \xrightarrow{\cong} \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W \otimes X, \hom(Y, Z)\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(W, \underbrace{\hom(X, \hom(Y, Z))}_{B}\big) \ .\end{aligned}$$

Es bezeichne f das Urbild von id_B und g das Bild von id_A für $W = B$ beziehungsweise $W = A$. Wegen der Natürlichkeit der Adjunktionen aus Bemerkung 4.2 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B) \ni \mathrm{id}_B \\ {\scriptstyle \cdot \circ g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cdot \circ g} \\ \mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni g \ . \end{array}$$

Also folgt $f \circ g = \mathrm{id}_A$. Analog sieht man $g \circ f = \mathrm{id}_B$, mithin sind die beiden Objekte A und B im Satz isomorph. □

4.31. Satz. *Die Kategorie $k\mathcal{T}op$ ist kartesisch abgeschlossen.*

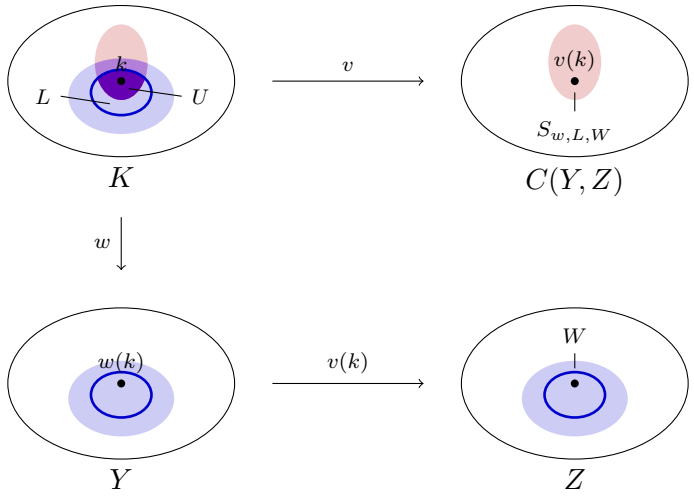


ABBILDUNG 4.3. Stetigkeit der Koeinheit $\mathrm{ev}_{Y,Z}$

Insbesondere gilt in $k\mathcal{T}op$ das Exponentialgesetz wie in Satz 1.101, aber ohne zusätzliche Voraussetzungen an die beteiligten Räume. Wir werden das später auch für $kw\mathcal{H}$ zeigen. Zum Beweis von Proposition 4.21 benötigen wir aber zunächst einmal das Exponentialgesetz in $k\mathcal{T}op$.

BEWEIS. Aufgrund der universellen Eigenschaft ist das Produkt auf $k\mathcal{T}op$ aus Bemerkung 4.24 assoziativ mit Einheitsobjekt pt, somit ist $(k\mathcal{T}op, k(\,\cdot\times\cdot\,), \mathrm{pt})$ eine monoidale Kategorie.

Als internes hom-Objekt zu Y, $Z \in k\mathcal{T}op$ definieren wir

$$\hom(Y,Z) = kC(Y,Z)\ ,$$

wobei $C(Y,Z)$ wie immer die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.97 trage. Nach Proposition 1.98 induziert die kompakt-offene Topologie einen Funktor $C(X,\,\cdot\,)\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$. Wir wenden Proposition 4.18 an und erhalten für beliebige X, Y, $Z \in k\mathcal{T}op$ und $f\colon Y \to Z$, dass

$$\begin{aligned} f\colon Y \to Z \text{ stetig} \quad &\Longrightarrow \quad f\circ\cdot\colon C(X,Y) \to C(X,Z) \text{ stetig} \\ &\Longrightarrow \quad f\circ\cdot\colon kC(X,Y) \to kC(X,Z) \text{ stetig.} \end{aligned}$$

Also erhalten wir einen Funktor $kC(X,\,\cdot\,)\colon k\mathcal{T}op \to k\mathcal{T}op$.

Zu zeigen bleibt, dass $\,\cdot\times Y$ linksadjungiert zu $kC(Y,\,\cdot\,)$ ist. Wir verfahren dazu wie in Abschnitt 1.k und betrachten Koeinheit und Einheit

$$\varepsilon_Z = \mathrm{ev}_{Y,Z}\colon k\big(kC(Y,Z)\times Y\big) \longrightarrow Z \qquad \text{und} \qquad \eta_X = \mathrm{in}_{X,Y}\colon X \longrightarrow kC\big(Y, k(X\times Y)\big)$$

aus den Propositionen 1.99 (2) und 1.100.

Zur Stetigkeit von $\mathrm{ev}_{Y,Z}$ sei zunächst K kompakt,

$$u = (v,w)\colon K \to k\big(kC(Y,Z)\times Y\big)$$

eine Testfunktion und $W \subset Z$ offen. Dann reicht es zu zeigen, dass auch die Menge

$$u^{-1}\big(\mathrm{ev}_{Y,Z}^{-1}(W)\big) = \big\{\, k\in K \;\big|\; v(k)\big(w(k)\big) \in W \,\big\}$$

offen ist. Da $v(k)\circ w$ stetig ist, ist $\big(v(k)\circ w\big)^{-1}(W) \subset K$ offen. Da K normal ist, finden wir eine kompakte Umgebung $L \subset \big(v(k)\circ w\big)^{-1}(W)$ von k in K. Dann liegt $v(k)$ in der Subbasismenge $S_{w,L,W}$ von $C(Y,Z)$. Wegen Stetigkeit von v ist $U = L \cap v^{-1}(S_{w,L,W})$ eine Umgebung von k in K, und für alle $\ell \in U$ folgt

$$\mathrm{ev}_{Y,Z}\big(u(\ell)\big) = v(\ell)\big(w(\ell)\big) \in W\ .$$

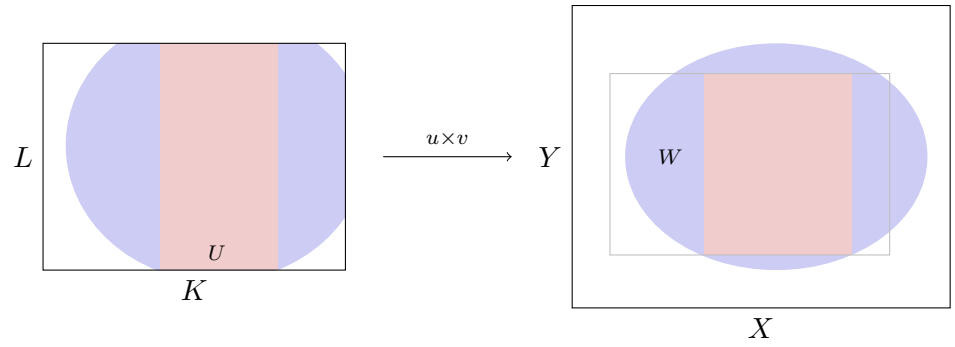


ABBILDUNG 4.4. Stetigkeit der Einheit $\mathrm{in}_{X,Y}$

Damit ist die Stetigkeit von $\mathrm{ev}_{Y,Z} \circ u$ und somit auch von $\mathrm{ev}_{Y,Z}$ gezeigt.

Für die Stetigkeit von $\mathrm{in}_{X,Y}$ betrachten wir Kompakta K, L, Testfunktionen $u\colon K \to X$ und $v\colon L \to Y$, sowie eine k-offene Menge $W \subset X \times Y$. Dann ist die Menge

$$\begin{aligned} U = u^{-1}\big(\mathrm{in}_{X,Y}^{-1}(S_{v,L,W})\big) &= \big\{\, k \in K \;\big|\; \text{für alle } \ell \in L \text{ gilt } \big(u(k), v(\ell)\big) \in W \,\big\} \\ &= K \setminus \big\{\, k \in K \;\big|\; \text{es gibt } \ell \in L \text{ mit } \big(u(k), v(\ell)\big) \notin W \,\big\} \\ &= K \setminus \pi_K\big((u \times v)^{-1}(X \times Y \setminus W)\big) \end{aligned}$$

offen, denn $X \times Y \setminus W$ ist k-abgeschlossen, und das Urbild in $K \times L$ somit abgeschlossen und sogar kompakt, da $K \times L$ kompakt ist. Also ist das Bild unter $\pi_K\colon K \times L \to K$ ebenfalls kompakt, sein Komplement also offen. Es folgt die Stetigkeit von $\mathrm{in}_{X,Y}$.

Sei jetzt $f\colon k(X \times Y) \to Z$ stetig, dann ist auch $g = kC(Y, f) \circ \mathrm{in}_{X,Y}\colon X \to kC(Y, Z)$ stetig. Und ist $g\colon X \to kC(Y, Z)$ stetig, dann umgekehrt auch $f = \mathrm{ev}_{Y,Z} \circ (g \times \mathrm{id}_Y)\colon k(X \times Y) \to Z$. □

An dieser Stelle können wir endlich den Beweis von Proposition 4.21 nachholen. Dazu bedarf es einiger Vorarbeit. Wir nennen eine Abbildung $q\colon X \to Y$ eine *Quotientenabbildung,* wenn q stetig und surjektiv ist und Y die Quotiententopologie aus Definition 1.82 trägt. Äquivalent dazu erfüllt f die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.83.

4.32. PROPOSITION. *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung in $k\mathcal{T}op$ und Z kompakt erzeugt. Dann ist auch $q \times \mathrm{id}_Z\colon k(X \times Z) \to k(Y \times Z)$ eine Quotientenabbildung.*

BEWEIS. Die Abbildung $q \times \mathrm{id}_Z$ ist stetig. Sei jetzt W kompakt erzeugt und $g\colon k(Y \times Z) \to W$ eine beliebige Abbildung. Zu zeigen ist, dass g stetig ist, falls $g \circ (q \times \mathrm{id}_Z)$ stetig ist. Zu g und $g \circ (q \times \mathrm{id}_Z)$ erhalten wir adjungierte Abbildungen $h\colon Y \to kC(Z, W)$ und $h \circ q\colon X \to kC(Z, W)$ von Mengen wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} g \in \mathrm{Hom}\big(k(Y \times Z), W\big) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}\big(Y, kC(Z, W)\big) \ni h \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \cdot \circ (q \otimes \mathrm{id}_Z)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \cdot \circ q} \\ g \circ (q \otimes \mathrm{id}_Z) \in \mathrm{Hom}\big(k(X \times Z), W\big) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}\big(X, kC(Z, W)\big) \ni h \circ q\,. \end{array}$$

Wenn $g \circ (q \times \mathrm{id}_Z)$ stetig ist, ist auch $h \circ q$ stetig, da $k\mathcal{T}op$ abgeschlossen ist. Da q eine Quotientenabbildung ist, ist h stetig. Aber dann ist auch g stetig. □

BEWEIS von Proposition 4.21. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf dem kompakt erzeugten Raum X und $q\colon X \to Y = X/\!\sim$ die Quotientenabbildung. Wie im Beweis der Folgerung 4.19 schließen wir, dass Y ebenfalls kompakt erzeugt ist.

Nach Proposition 4.32 erhalten wir eine Quotientenabbildung

$$q \times q \colon k(X \times X) \xrightarrow{q \times \mathrm{id}_X} k(X/\!\sim \times X) \xrightarrow{\mathrm{id}_{X/\sim} \times q} k(X/\!\sim \times X/\!\sim) \ .$$

Nach Proposition 4.20 ist $X/\!\sim$ genau dann schwach Hausdorff, wenn $\Delta(X/\!\sim) \subset k(X/\!\sim \times X/\!\sim)$ abgeschlossen ist. Aber das gilt genau dann, wenn $R_\sim = (q \times q)^{-1}(\Delta(X/\!\sim)) \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist. □

Somit sind jetzt alle Aussagen in Abschnitt 4.b vollständig bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass auch $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ abgeschlossen sind.

4.33. Proposition. *Es seien Y, Z kompakt erzeugt und Z sei schwach Hausdorff. Dann ist auch $kC(Y,Z)$ schwach Hausdorff.*

Beweis. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} F \subset kC(Y,Z)$ für alle Kompakta K und alle $F \colon K \to kC(Y,Z)$. Für alle Kompakta L und alle Testabbildungen $G \colon L \to C(Y,Z)$ muss also $G^{-1}(\operatorname{im} F) \subset L$ abgeschlossen sein. Betrachte jetzt die zugehörigen Abbildungen $f \colon k(K \times Y) \to Z$ und $g \colon k(L \times Y) \to Z$ sowie $\iota_y \colon k(K \times L) \to k(K \times Y \times L \times Y)$ mit $\iota_y(k,\ell) = (k,y,\ell,y)$, dann gilt

$$\begin{aligned} G^{-1}(\operatorname{im} F) &= \big\{\, \ell \in L \;\big|\; \text{es gibt } k \in K \text{ mit } f(k,y) = g(\ell,y) \in Z \text{ für alle } y \in Y \,\big\} \\ &= \pi_L \bigcap_{y \in Y} \iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z) \ . \end{aligned}$$

Da Z schwach Hausdorff ist, ist $\Delta Z \subset k(Z \times Z)$ abgeschlossen, also auch $\iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z) \subset k(K \times L) = K \times L$. Somit ist $G^{-1}(\operatorname{im} F)$ das Bild einer abgeschlossenen, mithin kompakten Teilmenge von $K \times L$, und somit selbst kompakt, also auch abgeschlossen in L, was zu zeigen war. □

Wir vervollständigen jetzt die letzten zwei Zeilen der Tabelle in Beispiel 4.27.

4.34. Folgerung. *Die Kategorien $\big(kw\mathcal{H}, k(\,\cdot \times \cdot\,), \mathrm{pt}\big)$ und $\big(kw\mathcal{H}_+, k(\,\cdot \wedge \cdot\,), S^0\big)$ der unpunktierten und der punktierten kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume sind abgeschlossen und monoidal.* □

4.35. Bemerkung. Wie schon in Bemerkung 4.24 gesagt, werden wir im Folgenden oft — meist stillschweigend — in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Beispielsweise schreiben wir $X \times Y$ und $X \wedge Y$ anstelle von $k(X \times Y)$ und $k(X \wedge Y)$. Unter einer Einbettung verstehen wir eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf das mit der kompakt erzeugten Unterraum-Topologie versehene Bild ist.

Für gut punktierte Räume X, Y in $kw\mathcal{H}_+$ schreiben wir

$$Y^X = k\big\{\, f \in kC(X,Y) \;\big|\; f(x_0) = y_0 \,\big\} \subset kC(X,Y) \ .$$

Im nicht punktierten Fall sei $Y^{X_+} = kC(X,Y)$ auch dann, wenn Y keinen Basispunkt besitzt. Wenn $Y = (Y, y_0)$ punktiert ist, haben Y^X und Y^{X_+} die konstante Abbildung auf y_0 als Basispunkt. Nach Definition bezeichnet $[X,Y]$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen, also die Wegzusammenhangskomponenten von Y^X. Daher erhalten wir die punktierte Menge

$$[X,Y] = \pi_0(Y^X) \ .$$

Anstelle von punktierten Räumen, Paaren und punktierten Paaren würden wir vielleicht lieber nur gut punktierte Räume und Kofaserungen betrachten. Dabei meinen wir mit Kofaserungen nach wie vor Hurewicz-Kofaserungen, wobei wir Definition 3.55 im Sinne von Bemerkung 4.35 in $kw\mathcal{H}$ verstehen. Die Kategorie der gut punktierten Räume ist allerdings nicht abgeschlossen, da Y^X im Allgemeinen nicht wieder gut punktiert ist. In der Tat gibt es auch andere Gründe, nicht nur gut punktierte Räume zu betrachten. Im Abschnitt 4.e über Modellkategorien kommen wir auf diese Frage noch einmal zurück.

Für den Begriff des Umgebungsdeformationsretraktes verweisen wir auf Proposition 3.59.

4.36. PROPOSITION. *Sei $A \to X$ Kofaserung in $kw\mathcal{H}$, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen und $A \to X$ ist eine Einbettung. Für ein Paar (X, A) in $kw\mathcal{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *(X, A) ist ein Umgebungsdeformationsretrakt;*
(2) *$X \times \{0\} \cup A \times I$ ist starker Deformationsretrakt von $X \times I$;*
(3) *$X \times \{0\} \cup A \times I$ ist Retrakt von $X \times I$;*
(4) *(X, A) ist eine Kofaserung.*

BEWEIS. Man zeigt wie in Bemerkung 3.58, dass $i\colon A \to X$ genau dann eine Kofaserung ist, wenn $Zi \subset X \times I$ ein Retrakt ist. Wie in Übung 3.128 folgt, dass i eine Einbettung ist, und mit einem ähnlichen Trick wie in Übung 3.129 sehen wir in Übung 4.84, dass $\mathrm{im}(i) \subset X$ abgeschlossen ist. Die Äquivalenz der Punkte (1)–(4) folgt wie im Beweis von Proposition 3.59. □

4.d. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead

Wir erinnern uns an die Konstruktion von CW-Komplexen in Abschnitt 1.l vor Definition 1.106. Wir modifizieren diese Konstruktion wie folgt. Wie immer sei $S^{n-1} = \partial D^n$ und $B^n = \mathring{D}^n$.

4.37. DEFINITION. Ein Paar (X, A) in $\mathcal{T}op$ heißt *CW-Paar,* wenn es Mengen J^n, Räume X^{n-1} und *Verklebeabbildungen* $\varphi_j^n\colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in J^n$ gibt, so dass

$$X^{-1} = A\,, \tag{1}$$

$$X^n = \Big(\coprod_{j \in J^n} D^n \Big) \cup_{\varphi^n} X^{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,, \tag{2}$$

wobei $\varphi^n\colon \coprod_{j \in J^n} S^{n-1} \to X^{n-1}$ von den φ_j^n induziert wird, und

$$X = \operatorname{colim} X^n \qquad \text{in } \mathcal{T}op\,. \tag{3}$$

Ein *punktierter CW-Komplex* (X, x_0) ist ein CW-Paar der Form $(X, \{x_0\})$.

Die Räume X^n heißen *n-Gerüste* oder *n-Skelette,* die induzierten Abbildungen

$$\Phi_j^n\colon D^n \to X^n \hookrightarrow X \qquad \text{mit} \qquad \Phi_j^n|_{S^{n-1}} = \varphi_j^n$$

heißen *charakteristische Abbildungen.* Man nennt $e_j^n = \Phi_j^n(B^n)$ eine *offene* und $\bar{e}_j^n = \Phi_j^n(D^n)$ eine *abgeschlossene n-Zelle* von X.

Kolimiten sind Quotienten disjunkter Vereinigungen. Somit ist eine Menge $U \subset X$ wie in Definition 1.106 genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $(\Phi_j^n)^{-1}(U) \subset D^n$ für alle $n \geq 0$ und alle $j \in J^n$ offen sind. Für einen beliebigen Raum Y ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ wegen der universellen Eigenschaften des Pushouts und des Kolimes genau dann stetig, wenn $f|_A$ und alle $f \circ \Phi_j^n\colon D^n \to Y$ stetig sind.

4.38. PROPOSITION. *Es sei (X, A) ein CW-Paar und K kompakt. Dann trifft für jede stetige Abbildung $f\colon K \to X$ das Bild* $\mathrm{im}\, f$ *nur endlich viele Zellen.*

Insbesondere ist jede Zelle e_j^n an nur endlich viele Zellen in X^{n-1} angeklebt, da S^{n-1} kompakt ist. Außerdem ist jede kompakte Teilmenge von X in einem der Gerüste X^n enthalten.

BEWEIS. Wir gehen vor wie im Beweis von Satz 1.112. Für alle n sei

$$J'^n = \big\{\, j \in J^n \;\big|\; e_j^n \cap \mathrm{im}\, f \neq \emptyset \,\big\}\,,$$

und für alle $j \in J'^n$ wählen wir $x_j^n \in e_j^n \cap \mathrm{im}\, f$. Per Induktion über n ist die Menge

$$P = \big\{\, x_j^n \;\big|\; j \in J'^n \,\big\} \subset \mathrm{im}\, f \cap X^n$$

in X^n abgeschlossen und diskret. Dazu konstruieren wir induktiv disjunkte Umgebungen $U^m_{j,n}$ der x^m_j in X^n für alle $m \leq n$. Für $m < n$ reicht es dazu,

$$(\Phi^n_i)^{-1}(U^m_{j,n}) = \left\{ p \in D^n \;\middle|\; |p| > \frac{2}{3} \text{ und } \frac{p}{|p|} \in (\varphi^n_i)^{-1}(U^m_{j,n-1}) \right\}$$

anzugeben, sowie $(\Phi^n_i)^{-1}(U^n_{j,n}) = B_{\frac{1}{3}}(0)$ falls $i = j$ und $\emptyset$ sonst.

Dann ist die obige Menge P als abgeschlossene Teilmenge der quasi-kompakten Menge im f wieder quasi-kompakt, und da sie diskret ist, endlich. Also trifft im f nur Zellen bis zu einer endlichen Dimension n_0, und in jeder Dimension nur endlich viele. □

4.39. Folgerung. *Sei (X, A) ein CW-Paar mit A aus $kw\mathcal{H}$, dann ist (X, A) ein Paar in $kw\mathcal{H}$.*

Insbesondere stimmt der Kolimes in Definition 4.37 (3) nach Folgerung 4.23 mit dem Kolimes in $kw\mathcal{H}$ überein.

Beweis. Es sei $A = X^{-1}$ in $kw\mathcal{H}$. Da $S^{n-1} \subset D^n$ abgeschlossen und $\varphi^n_j \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ stetig ist, ist nach Proposition 3.64 und Bemerkung 4.25 induktiv auch X^n in $kw\mathcal{H}$ für alle n.

Nach Folgerung 4.19 ist der Kolimes X der X^n zumindest kompakt erzeugt. Um zu zeigen, dass X auch schwach Hausdorff ist, sei K kompakt und $f \colon K \to X$ stetig. Da $\operatorname{im} f \subset X^n$ für ein n, ist $\operatorname{im} f$ in X^n und damit auch in X abgeschlossen. Also ist X auch schwach Hausdorff. □

Da A nicht normal sein muss, können wir nicht erwarten, dass X wie in Satz 1.110 normal ist. Als Ersatz dafür reicht für manche Zwecke das folgende Resultat.

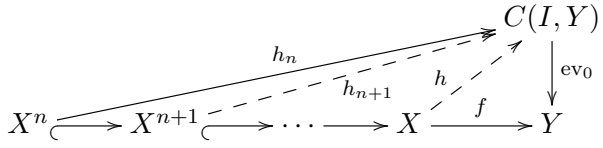
4.40. Proposition. *Es sei (X, A) ein CW-Paar, dann sind für alle $m \leq n$ die Paare (X, X^n), (X^n, X^m) und (X^m, A) abgeschlossene Kofaserungen.*

Beweis. Da (D^n, S^{n-1}) eine abgeschlossene Kofaserung ist, ist auch $\left(\coprod_{j\in J^n} D^n, \coprod_{j\in J^n} S^{n-1}\right)$ eine abgeschlossene Kofaserung. Aufgrund von Proposition 3.64 und Definition 4.37 (2) ist dann auch

$$(X^n, X^{n-1}) = \left(\Big(\coprod_{j\in J^n} D^n \Big) \cup_{\varphi^n} X^{n-1}, X^{n-1} \right)$$

eine abgeschlossene Kofaserung. Da $X^{-1} = A$, sind wegen Übung 3.127 (1) alle Paare (X^n, X^m) und (X^m, A) abgeschlossene Kofaserungen.

Sei jetzt $n \geq -1$, sei Y ein weiterer Raum, und seien $f \colon X \to Y$ und $h_n \colon X^n \times I \to Y$ mit $f|_{X^n} = h_n|_{X^n \times \{0\}}$ wie in Definition 3.55 gegeben. Konstruiere induktiv $h_k \colon X^k \to Y^{I_+}$ mit der Homotopieausdehnungseigenschaft, so dass das Diagramm



(4.1)

kommutiert. Aufgrund der Kolimes-Eigenschaft in $\mathcal{T}op$ existiert auch h. Da I lokalkompakt ist, entspricht h nach Satz 1.101 (2) der gesuchten Homotopie $X \times I \to Y$. Da X ein $kw\mathcal{H}$-Raum ist, ist $X^n \subset X$ wie in den Übungen 3.129 und 4.84 abgeschlossen. □

Wir erinnern uns an Unterkomplexe von CW-Komplexen aus Definition 1.111. Analog definieren wir einen relativen Unterkomplex Y von (X, A) als einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ mit $A \subset Y$, der sich als Vereinigung von A und offenen Zellen von X schreiben lässt. Das nächste Resultat ist Übung 4.94.

4.41. Folgerung. *Es sei Y ein Unterkomplex von (X, A), dann ist (X, Y) eine Kofaserung.*

Wir betrachten eine naheliegende Klasse von Abbildungen zwischen CW-Paaren.

4.42. Definition. Es seien (X, A) und (Y, B) CW-Paare. Eine Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ von Paaren heißt *zellulär,* wenn $\mathrm{im}(f|_{X^n}) \subset Y^n$ für alle $n \geq -1$ gilt. Die CW-Paare mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie $\mathcal{CWP}air$. Analog definieren wir Kategorien $\mathcal{CW}$ und $\mathcal{CW}_+$ der nicht-punktierten und der punktierten CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen.

4.43. Satz (Zelluläre Approximation). *Jede Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ von CW-Paaren ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Wenn f auf einem Unterkomplex Z von (X, A) bereits zellulär ist, können zelluläre Abbildung und Homotopie relativ zu Z gewählt werden.*

Beweis. Wir konstruieren induktiv Homotopien $h^n\colon X^n \times I \to Y$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} h^{-1}(\,\cdot\,, t) &= f|_A && \text{für alle } t \in I\,, \\ h^n(\,\cdot\,, 0) &= f|_{X^n} && \text{für alle } n\,, \\ h^n|_{X^{n-1}\times I} &= h^{n-1} && \text{für alle } n\,, \\ \text{und} \qquad h^n(\,\cdot\,, 1)&\colon X^n \to Y^n && \text{für alle } n\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Exponentialgesetzes fassen wir die h^n als Abbildungen $X^n \to Y^I$ auf und erhalten mit der universellen Eigenschaft des Kolimes die gesuchte Abbildung $h\colon X \to Y^I$, oder äquivalent $h\colon X \times I \to Y$.

Es sei also $n \geq 0$, und die Homotopie h^{n-1} sei bereits konstruiert. Dann setzen wir sie n-Zelle für n-Zelle von X auf $X^n \times I$ fort. Sei e^n_j mit $j \in J^n$ eine n-Zelle von X. Um h^{n-1} auf $e^n_j \times I$ wie gewünscht fortzusetzen, reicht es, eine Abbildung $g^n_j\colon D^n \times I \to Y$ anzugeben, so dass

$$\begin{aligned} g^n_j|_{D^n\times\{0\}} &= f \circ \Phi^n_j\,, \\ g^n_j|_{S^{n-1}\times I} &= h^{n-1} \circ (\varphi^n_j \times \mathrm{id}_I)\,, \\ \text{und} \qquad g^n_j|_{D^n\times\{1\}}&\colon D^n \times I \longrightarrow Y^n\,. \end{aligned}$$

Da

$$\big(D^n \times I, (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)\big) \cong \big(D^n \times I, D^n \times \{0\}\big)\,,$$

reicht es zu zeigen, dass jede Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \to (Y, Y^{n-1})$ als Abbildung von Paaren homotop ist zu einer Abbildung nach (Y^n, Y^{n-1}).

Sei also eine Abbildung $g\colon (D^n, S^{n-1}) \to (Y, Y^{n-1})$ gegeben. Da D^n kompakt ist, trifft g nach Proposition 4.38 nur endlich viele offene Zellen von Y. Sei m die maximale Dimension einer Zelle in Y, die getroffen wird; ohne Einschränkung gelte $m > n$. Es seien also $c^m_1, \ldots, c^m_k \subset Y^m$ die m-Zellen von Y, die noch getroffen werden, und ψ^m_k sei die Verklebeabbildung von c^m_k. Betrachte $Y' = Y^{m-1} \cup c^m_1 \cup \cdots \cup c^m_{k-1}$ und schreibe

$$Y' \cup c^m_k = \big((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi^m_k} Y'\big) \cup_{B^m\setminus\{0\}} B^m\,.$$

Da D^n zusammenhängend ist, trifft g nur diejenigen Wegzusammenhangskomponenten von Y, die Punkte im Bild von ψ^m_k enthalten (falls $m \geq 2$, ist das nur eine). Wir dürfen daher annehmen, dass Y' keine weiteren Wegzusammenhangskomponenten enthält. Dann ist $((D^m\setminus\{0\})\cup_{\psi^m_k} Y', B^m\setminus\{0\})$ ein 0-zusammenhängendes und $(B^m, B^m \setminus \{0\})$ ein $(m-1)$-zusammenhängendes Paar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 und Homotopieinvarianz ist die Abbildung

$$0 = \pi_n(B^m, B^m \setminus \{0\}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \pi_n\big(Y' \cup c^m_k, (D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi^m_k} Y'\big) \cong \pi_n\big(Y' \cup c^m_k, Y'\big)$$

surjektiv, da $n \leq m-1$. Wir können also g relativ zu S^{n-1} zu einer Abbildung homotopieren, die c^m_k nicht trifft. Genauso verfahren wir mit den Zellen $c^m_{k-1}, \ldots, c^m_1$ und erhalten eine Abbildung mit Bild in Y^{m-1}. Diesen Prozess setzen wir fort, bis wir eine Homotopie von g zu einer Abbildung mit Bild in (Y^n, Y^{n-1}) gefunden haben. □

Später können wir den letzten Schritt im Beweis leicht mit der nächsten Folgerung begründen. Aber da die Folgerung zelluläre Approximation benutzt, brauchten wir oben einen anderen Beweis.

4.44. Folgerung. *Es sei (X, A) ein CW-Paar mit $X = \operatorname{colim} X^n$ wie oben.*

(1) *Dann sind die Inklusionen $\iota\colon X^n \to X$ und $\iota\colon (X^n, A) \to (X, A)$ jeweils n-zusammenhängende Abbildungen.*
(2) *Wenn $J^{m+1} = \cdots = J^n = \emptyset$, ist (X, X^m) ein n-zusammenhängendes Paar.*

Beweis. Wir schreiben S^k als CW-Komplex $* \cup_{S^{k-1}} D^k$ und wenden zelluläre Approximation an. □

4.45. Definition. Eine Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ zwischen Paaren heißt *schwache Homotopieäquivalenz,* wenn $\pi_k f\colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(Y, B, f(x_0))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x_0 \in A$ ein Isomorphismus ist.

Zwei Paare (X, A) und (Y, B) heißen *schwach homotopieäquivalent,* wenn es $n \geq 0$, Paare (X_i, A_i) für $i = 0, \ldots, n$ mit $X = X_0$ und $Y = X_n$ und (Z_i, C_i) für $i = 0, \ldots, n-1$ und schwache Homotopieäquivalenzen $f_i\colon (X_i, A_i) \to (Z_i, C_i)$ und $g_i\colon (X_{i+1}, A_{i+1}) \to (Z_i, C_i)$ für $0 \leq i < n$ gibt.

Analog definieren wir schwache Homotopieäquivalenz für Räume.

Somit bedeutet „schwache Homotopieäquivalenz“ das gleiche wie „n-zusammenhängende Abbildung“ für alle $n \geq 0$.

Offensichtlich ist jede Homotopieäquivalenz eine schwache Homotopieäquivalenz, die Umkehrung muss jedoch nicht gelten, siehe Beispiel 4.52. Um tatsächlich eine Äquivalenzrelation zu erhalten, haben wir Symmetrie und Transitivität durch die Einführung von Zwischenschritten wie im folgenden Diagramm sichergestellt:

$$(X, A) = (X_0, A_0) \xrightarrow{f_0} (Z_0, C_0) \xleftarrow{g_0} (X_1, A_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (Z_{n-1}, C_{n-1}) \xleftarrow{g_{n-1}} (X_n, A_n) = (Y, B)\ .$$

In Übung 4.95 sehen wir, wie man diese Situation mit Hilfe von Satz 4.51 unten etwas vereinfachen kann.

4.46. Satz (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz $f\colon (Y, A) \to (X, A)$ von CW-Paaren relativ zu A ist eine Homotopieäquivalenz. Wenn die Inklusion $\iota\colon Y \to X$ eines relativen Unterkomplexes (Y, A) von (X, A) eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann ist Y ein Deformationsretrakt von X.*

In der ersten Aussage dürfen wir nicht von Abbildungen $(Y, B) \to (X, A)$ sprechen, denn bereits für Abbildungen $f\colon (B, B) \to (A, A)$ kann sie falsch sein. Um zu zeigen, dass schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, müssen wir später noch sicherstellen, dass die Räume X_i und Z_i in Definition 4.45 alle als CW-Komplexe gewählt werden können.

Beweis. Es sei $f\colon (Y, A) \to (X, A)$ eine stetige Abbildung relativ zu A, die wir nach Satz 4.43 als zellulär voraussetzen dürfen. Es sei Zf der Abbildungszylinder aus Definition 3.57. Da $f|_A = \mathrm{id}_A$, enthält Zf den Abbildungszylinder $A \times I$ von id_A als Unterraum. Wir definieren den *relativen Abbildungszylinder* $Z_A f$ als Pushout

$$\begin{array}{ccc} Zf & \longrightarrow & Z_A f \\ \uparrow & & \uparrow \\ A \times I & \longrightarrow & A\ , \end{array}$$

induziert von der Projektion $A \times I \to A$. Wir betrachten $(Z_A f, A)$ als CW-Paar mit Unterpaar (X, A), so dass $(Z_A f, X)$ zu jeder m-Zelle c_k^m von Y eine m-Zelle $c_k^m \times \{0\}$ und eine $(m+1)$-Zelle $c_k^m \times (0, 1) \subset Z_A f$ enthält. Man beachte, dass der Rand der letzteren im m-Gerüst von $Z_A f$

liegt. Die Inklusion $\iota\colon Y \to Z_A f$ mit $\iota(y) = (y, 0)$ und die Projektion $p\colon Z_A f \to X$ mit $[(y,t)] \mapsto [f(y)]$ sind dann ebenfalls zellulär.

Wir erhalten f als zusammengesetzte Abbildung

$$Y \xhookrightarrow{\iota} Z_A f \xrightarrow{p} X \ .$$

Da p eine Deformationsretraktion ist, ist mit f auch ι eine schwache Homotopieäquivalenz. Aus der zweiten Behauptung folgt dann, dass Y ein Deformationsretrakt von $Z_A f$ ist, insbesondere ist f dann auch eine Homotopieäquivalenz.

Zur zweiten Behauptung konstruieren wir induktiv Homotopien $h^n\colon (X^n \cup Y) \times I \to X$ relativ zu Y ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43, so dass $h^n(\,\cdot\,, 0) = \mathrm{id}$, $\mathrm{im}(h^n(\,\cdot\,, 1)) \subset Y$, und $h^n|_{(X^{n-1}\cup Y)\times I} = h^{n-1}$, wobei $h^{-1} = \pi_Y$. Wie oben ergibt sich als Vereinigung die gesuchte Deformation $h\colon X \times I \to X$.

Im Falle $n = 0$ besagt unsere Voraussetzung, dass jede Zusammenhangskomponente von X einen Punkt aus Y enthält, und wir wählen $h^0(x, \,\cdot\,)$ als Pfad in X von x nach Y^0 für alle $x \in X^0 \setminus Y^0$.

Wir nehmen jetzt an, dass $n \geq 1$, und dass die Homotopie $h^{n-1} = h|_{(X^n\cup Y)\times I}$ bereits konstruiert ist. Dann setzen wir sie n-Zelle für n-Zelle von $X \setminus Y$ zu h^n fort. Ähnlich wie im obigen Beweis recht es dafür, eine Abbildung $g\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, X^{n-1} \cup Y)$ als Abbildungen von Paaren zu einer Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \to (X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y)$ zu homotopieren.

Da die Inklusion eine schwache Homotopieäquivalenz ist, schließen wir aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{n-1}(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_{n-1}(Y, A) \xleftarrow{\partial} \pi_n(X, Y) \longleftarrow \pi_n(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_n(Y, A) \longleftarrow \cdots$$

des Tripels (X, Y, A) aus Übung 3.112, dass $\pi_n(X, Y) = 0$, und die gesuchte Homotopie existiert. □

4.47. Bemerkung. Für zwei schwach homotopieäquivalente Räume X und Y gibt es nach Definition 4.45 Isomorphismen $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$ für alle $k \geq 0$; diese werden induziert von den Abbildungen f_i und g_i. Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Dazu betrachten wir beispielsweise die Räume

$$X = S^2 \times \mathbb{R}P^3 \qquad \text{und} \qquad Y = \mathbb{R}P^2 \times S^3 \ .$$

Beide Räume haben als universelle Überlagerung $S^2 \times S^3$, und die isomorphe Fundamentalgruppen $\mathbb{Z}/2$. Dennoch werden wir später sehen, dass sie nicht homotopieäquivalent sind.

Als nächstes versuchen wir, einen beliebigen topologischen Raum durch einen CW-Komplex zu ersetzen. Bis auf schwache Homotopieäquivalenz ist das möglich. Für spätere Anwendungen formulieren wir den entsprechenden Begriff noch etwas allgemeiner.

4.48. Definition. Ein *n-zusammenhängendes CW-Modell* für ein Paar (Y, A) ist ein n-zusammenhängendes CW-Paar (X, A) zusammen mit einer Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, A)$ relativ zu A, so dass $f_*\colon \pi_n(X, a) \to \pi_n(Y, a)$ injektiv ist und $f_*\colon \pi_k(X, a) \to \pi_k(Y, a)$ ein Isomorphismus für alle $k > n$ und alle $a \in A$.

Eine *CW-Approximation* eines Paares (Y, A) besteht aus einem CW-Paar (X, A) und einer Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, A)$ relativ zu A, so dass $f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0))$ für alle $k \geq 0$ und alle $x_0 \in X$ ein Isomorphismus ist.

Eine CW-Approximation ist so etwas wie ein „(-1)-zusammenhängendes CW-Modell“. Wenn A je einen Punkt pro Wegzusammenhangskomponente von Y enthält, ist eine CW-Approximation ein „0-zusammenängendes CW-Modell“ von (Y, A).

Sei n beliebig. Für $k < n$ gilt $\pi_k(X) \cong \pi_k(A)$, da das Paar (X, A) n-zusammenhängend sein soll. Für $k > n$ hingegen hatten wir $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$ gefordert. Im Fall $k = n$ faktorisiert die

Abbildung $\iota_*\colon \pi_n(A,a) \to \pi_n(Y,a)$ nach Voraussetzung als

$$\iota_*\colon \pi_n(A,a) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \pi_n(X,a) \xhookrightarrow{f_*} \pi_n(Y,a)\ .$$

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass $\pi_n(X,a)$ in natürlicher Weise isomorph ist zu $\operatorname{im}\iota_*$. Also suchen wir einen CW-Komplex X, der im obigen Sinne zwischen A und Y interpoliert. Das werden wir erreichen, indem wir an A Zellen der Dimension $k > n$ ankleben.

4.49. Bemerkung. Wir betrachten einen punktierten CW-Komplex (X, x_0), somit ist $A = \{x_0\}$.

(1) Ein 0-zusammenhängendes CW-Modell von X ist beispielsweise die Zusammenhangskomponente X_0 von X, die x_0 enthält.
(2) Ein 1-zusammenhängendes CW-Modell von X ist beispielsweise die universelle Überlagerung $p\colon \tilde{X}_0 \to X_0$, denn $\pi_1(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = \pi_0(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = 0$ und $p_*\colon \pi_k(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \cong \pi_k(X_0, x_0) \cong \pi_k(X, x_0)$ nach Folgerung 3.26. Wir überlegen uns dazu, dass die universelle Überlagerung eines CW-Komplexes wieder eine natürliche CW-Struktur trägt.

Daher nennt man in diesem Spezialfall ein n-zusammenhängendes CW-Modell eines punktierten CW-Komplexes auch eine „n-zusammenhängende Überlagerung“.

4.50. Beispiel. Es folgen einige konkrete Beispiele.

(1) Da $\pi_k(S^1) = 0$ für alle $k \geq 2$ nach Beispiel 3.27, ist $\{*\} \to S^1$ ein n-zusammenhängendes CW-Modell für alle $n \geq 1$.
(2) Nach Beispiel 3.33 liefert die Hopf-Faserung $p\colon S^3 \to S^2$ Isomorphismen $p_*\colon \pi_k(S^3) \to \pi_k(S^2)$ für alle $k \geq 3$. Also ist die Hopf-Faserung ein 2-zusammenhängendes CW-Modell für S^2.

Weitere Beispiele betrachten wir in Übung 4.96.

4.51. Satz (CW-Approximation). *Zu jedem Paar (Y, A) und jedem $n \geq 0$ existiert ein n-zusammenhängendes CW-Modell. Zu jedem Paar (Y, A) existiert eine CW-Approximation.*

Sei $f_1\colon (X, A) \to (Y, A)$ ein n-zusammenhängendes und $f_2\colon (Z, B) \to (W, B)$ ein m-zusammenhängendes CW-Modell mit $n \geq m$, wobei wir CW-Approximationen wie (-1)-zusammenhängende CW-Modelle behandeln. Sei $g\colon (Y, A) \to (W, B)$ eine Abbildung, dann existiert eine zelluläre Abbildung $\ell\colon (X, A) \to (Z, B)$, so dass $f_2 \circ \ell$ relativ A zu $g \circ f_1$ homotop ist. Je zwei solche Abbildungen sind relativ A homotop.

Beweis. Für die erste Behauptung behandeln wir jede Wegzusammenhangskomponente von Y einzeln und nehmen daher ab jetzt an, dass Y wegzusammenhängend ist. Falls $A = \emptyset$, ist $X = \emptyset$ das eindeutige n-zusammenhängende CW-Modell. Anderfalls fixieren wir einen Basispunkt in $x_0 \in A$.

Dann konstruieren wir ein CW-Paar (X, A) und eine Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, A)$ relativ zu A. Für alle k konstruieren wir induktiv ein k-Skelett X^k mit einer Abbildung $f^k\colon X^k \to Y$, so dass $f^k|_{X^{k-1}} = f^{k-1}$ und

$$\begin{aligned} & f^k_*\colon \pi_n(X^k) \hookrightarrow \pi_n(Y) && \text{injektiv, falls } n \geq 0, \\ & f^k_*\colon \pi_m(X^k) \xrightarrow{\cong} \pi_m(Y) && \text{ein Isomorphismus für alle } m \text{ mit } n < m < k, \\ \text{und} \quad & f^k_*\colon \pi_k(X^k) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \pi_k(Y) && \text{surjektiv ist.} \end{aligned}$$

Wir starten mit $X^n = A$ und $f^n = f|_{X^n} = f|_A$. Dann folgt mit Folgerung 4.44 (2) bereits, dass (X, A) ein n-zusammenhängendes Paar ist.

Wenn alle $f^k\colon X^k \to Y$ konstruiert sind, setzen wir schließlich

$$X = \operatorname{colim} X^k \qquad \text{und} \qquad f = \operatorname{colim} f^k\colon X \longrightarrow Y\ .$$

Nach zellulärer Approximation gilt $\pi_k(X) \cong \pi_k(X^{k+1})$, also erhalten wir eine n-zusammenhängende CW-Approximation.

Sei also $k > n$, und seien X^{k-1} und $f^{k-1}\colon X^{k-1} \to Y$ bereits konstruiert, so dass die obigen Bedingungen erfüllt sind. Da die Inklusion $X^{k-1} \hookrightarrow X^k$ nach Folgerung 4.44 (1) eine $(k-1)$-zusammenhängende Abbildung ist und f_*^{k-1} über f_*^k faktorisiert, erfüllt f_*^k die obigen Eigenschaften für alle $m < k-1$, und $f_*^k\colon \pi_{k-1}(X^k) \to \pi_{k-1}(Y)$ ist automatisch surjektiv.

Die Konstruktion von X^k und f^k erfolgt in zwei Schritten. Falls $k = 1$, sei J_1^1 die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X^0, die den Basispunkt x_0 nicht enthalten. Falls $k \geq 2$, wählen wir eine Erzeugermenge J_1^k des Kernes von $f_*^{k-1}\colon \pi_{k-1}(X^{k-1}) \to \pi_{k-1}(Y)$. Für jedes $j \in J_1^k$ sei $\varphi_j^k\colon S^{k-1} \to X^{k-1}$ eine punktierte Abbildung, die das entsprechende Element von $\pi_{k-1}(X^{k-1})$ darstellt. Da $[f^{k-1} \circ \varphi_j^k] = 0 \in \pi_{k-1}(Y)$, existiert eine Abbildung $g_j^k\colon D^k \to Y$ mit $g_j^k|_{S^{k-1}} = f^{k-1} \circ \varphi_j^k$. Wir kleben eine Zelle $\bar{e}_j^k$ mit φ_j^k an X^{k-1} an und setzen f^{k-1} durch f_j^k auf $\bar{e}_j^k$ fort, so dass

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{g_j^k}{\frown} & \\ D^k & \xrightarrow{\Phi_j^k} & X^{k-1} \cup \bar{e}_j^k & \overset{f_j^k}{\searrow} & Y \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow_{f^{k-1}} & \\ S^{k-1} & \xrightarrow{\varphi_j^k} & X^{k-1} & & \end{array} .$$

Sei $\psi^k\colon \coprod_{j \in J_1^k} S^{k-1} \to X^{k-1}$ durch die φ_j^k für $j \in J_1^k$ induziert, dann setzen wir

$$X_1^k = \left(\coprod_{j \in J_1^k} D^k \right) \cup_{\psi^k} X^{k-1} \qquad \text{und} \qquad f_1^k = f^{k-1} \cup \bigcup_{j \in J_1^k} f_j^k\colon X_1^k \longrightarrow Y \ .$$

Nach Konstruktion ist $f_{1*}^k\colon \pi_{k-1}(X^k) \to \pi_{k-1}(Y)$ jetzt injektiv und somit ein Isomorphismus,

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k-1}(X^{k-1}) & \twoheadrightarrow & \pi_{k-1}(X_1^k) \\ {\scriptstyle f_*^{k-1}}\downarrow & \swarrow_{f_{1*}^k} & \downarrow \\ \pi_{k-1}(Y) & \xleftarrow{f_*^k} & \pi_{k-1}(X^k) \ . \end{array}$$

Daran ändert sich nichts mehr, wenn wir weitere k-Zellen hinzufügen.

Im zweiten Schritt wählen wir eine Erzeugermenge J_2^k von $\pi_k(Y)$ und Abbildungen $f_j^k\colon S^k \to (Y, y_0)$, die die entsprechenden Elemente von $\pi_k(Y)$ repräsentieren. Als Verklebeabbildung für die neuen k-Zellen wählen wir die konstante Abbildung $S^{k-1} \to \{x_0\} \to X^{k-1}$. Jetzt sei $J^k = J_1^k \sqcup J_2^k$, und wir erhalten

$$X^k = X_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} S^k \qquad \text{und} \qquad f^k = f_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} f_j^k\colon X^k \longrightarrow Y \ .$$

Dann ist $f_*^k\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ surjektiv, und die erste Behauptung somit vollständig bewiesen.

Für die zweite Behauptung erhalten wir X^0 und $f^0\colon X^0 \to Y$, indem wir aus jeder Wegzusammenhangskomponente Y_0 von Y, die keinen Punkt aus A enthält, einen Punkt $y_0 \in Y_0$ zu A hinzunehmen. Anschließend verfahren wir weiter wie oben für $n = 0$, beginnend bei $k = 1$. Da $\pi_0(A) \to \pi_0(Y)$ bereits surjektiv ist, liefert die Konstruktion am Ende auch einen Isomorphismus $\pi_0(X \to \pi_0(Y)$.

Zur letzten Behauptung nehmen wir an, dass $X^n = A$ falls $n \geq 0$. Andernfalls bilden wir wie oben ein n-zusammenhängendes CW-Modell (X', A) von (X, A) mit $X'^n = A$. Nach dem Satz 4.46 von Whitehead sind (X', A) und (X, A) homotopieäquivalent relativ zu A, so dass wir (X, A) durch (X', A) ersetzen dürfen. Außerdem nehmen wir an, dass $Z \to W$ eine Inklusionsabbildung ist,

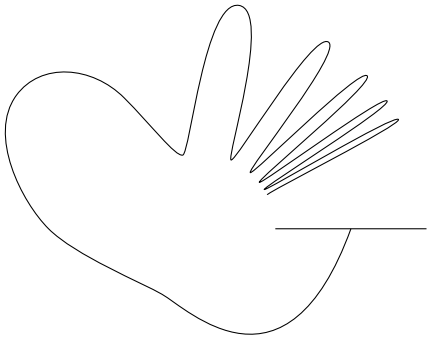


ABBILDUNG 4.5. Das Topologische Huhn

die wir ι nennen. Andernfalls ersetzen wir (W, B) durch den relativen Abbildungszylinder $(Z_B f_2, B)$, der (W, B) als Deformationsretrakt enthält, und g durch die entsprechende Abbildung im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (X', A) & \xrightarrow{\sim} & (X, A) & \xrightarrow{f_1} & (Y, A) \\ \downarrow{\scriptstyle \ell} & & & \searrow^{g} & \downarrow \\ (Z, B) & \xrightarrow{\iota} & (Z_B f_2, B) & \xleftarrow{\sim} & (W, B)\,. \end{array}$$

f_2

Jetzt können wir ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43 induktiv Zelle für Zelle Homotopien $h^k\colon X^k \times I \to W$ konstruieren, so dass $h^k(\,\cdot\,,0) = (g \circ f_1)|_{X^k}$, $h^k(\,\cdot\,,1)\colon X^k \to Z \subset W$ und $h^k|_{X^{k-1}\times I} = h^{k-1}$, wobei $h^n = (g \circ f_1 \circ p_X)|_{A\times I}\colon A \times I \to B \subset Z$ stationär sei. Wie oben ergibt sich als Vereinigung eine Homotopie $h\colon X \times I \to X$ von $g \circ f_1$ zu einer Abbildung nach Z. Nach Satz 4.43 macht eine weitere Homotopie diese Abbildung zellulär.

Sei jetzt $h^{k-1}\colon X^{k-1} \times I \to W$ bereits konstruiert, und sei e^k_j eine k-Zelle von X. Da $h^{k-1}(\,\cdot\,,1) \circ \varphi^k_j$ nach Induktionsvoraussetzung S^{k-1} nach Z abbildet, reicht es ähnlich wie im Beweis des Satzes 4.46 von Whitehead, eine Abbildung $(D^k, S^{k-1}) \to (W, Z)$ als Abbildung von Paaren zu einer Abbildung $D^k \to Z$ zu homotopieren, um h^{k-1} auf $e^k_j \times I$ fortzusetzen. Das ist möglich, denn aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (W, Z) erhalten wir

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(W) \longleftarrow \pi_{k-1}(Z) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(W, Z)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(W) \xleftarrow{\cong} \pi_k(Z) \longleftarrow \cdots\,.$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien ℓ_0, $\ell_1\colon X \to Z$ wie oben gegeben. Die zugehörigen Homotopien h_0, $h_1\colon X \times I \to W$ liefern eine Homotopie relativ zu A von ℓ_0 und ℓ_1 als Abbildungen nach W. Mit dem gleichen Trick wie oben können wir diese Homotopie relativ zu $A \times I \cup X \times \{0, 1\}$ Zelle für Zelle zu einer Homotopie zwischen ℓ_0 und ℓ_1 mit Werten in Z deformieren, was noch zu zeigen war. □

4.52. BEISPIEL. Wir betrachten das *topologische Huhn*

$$Y = \left\{ \left(2 + \sin \frac{2\pi^2}{\varphi}\right) e^{i\varphi} \;\middle|\; \varphi \in (0, 2\pi] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C}\,,$$

siehe Abbildung 4.5, auch bekannt als *polnischer Kreis.* Die starken Oszillationen machen den Übergang von Punkten mit positivem Argument zur positiven reellen Achse zu einem unüberwindbaren Hindernis für Abbildungen $S^k \to Y$, somit ist $\pi_k(Y) = 0$ für alle k. Eine CW-Approximation wäre

demnach ein einzelner Punkt $X = \{x_0\}$, den wir auf y_0 abbilden. Dass $X \to Y$ keine Homotopieäquivalenz ist, sehen wir daran, dass es eine nicht-zusammenziehbare Abbildung $Y \to S^1$ gibt, gegeben durch $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Da alle CW-Approximationen nach Satz 4.51 homotopieäquivalent sind, sagen wir, dass Y nicht den *Homotopietyp eines CW-Komplexes* hat. Wir haben jetzt also auch ein Beispiel von schwach homotopieäquivalenten, aber nicht homotopieäquivalenten Räumen.

In Übung 4.95 können wir jetzt zeigen, dass je zwei schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, und dass schwach homotopieäquivalente topologische Räume homotopieäquivalente CW-Approximationen besitzen.

4.53. Bemerkung. Die Sätze 4.43, 4.46 und 4.51 zusammen erklären die Rolle der Homotopiegruppen und der CW-Komplexe in der Homotopietheorie.

(1) Zu jedem topologischen Raum Y gibt es eine CW-Approximation $f_1 \colon X \to Y$, und zu jedem Morphismus $g \colon Y \to W$ und jeder CW-Approximation $f_2 \colon Z \to W$ gibt es bis auf Homotopie einen entsprechenden Morphismus $\ell \colon X \to Z$. Da all dies nur bis auf Homotopie wohldefiniert ist, erhalten wir Funktoren $\mathcal{H}k\mathcal{T}op \to \mathcal{HCW}$ und $\mathcal{H}kw\mathcal{H} \to \mathcal{HCW}$, die mit schwacher Homotopieäquivalenz verträglich sind.
(2) Diese Funktoren bilden keine Äquivalenzen von Kategorien, da die Abbildung $[Y, W] \to [X, Z]$ im Allgemeinen nicht bijektiv ist, wie wir anhand der Abbildung $Y \to S^1$ im obigen Beispiel gesehen haben. Im nächsten Abschnitt werden wir den Begriff der Homotopie und der Homotopiekategorie etwas allgemeiner formulieren, um dieses Problem zu lösen.

Letztlich sollte es nicht allzusehr verwundern, dass CW-Komplexe und Homotopiegruppen so gut zusammenarbeiten: sowohl Homotopiegruppen als auch Abbildungen von CW-Komplexen in andere Räume basieren auf dem Verhalten von Abbildungen der Paare (D^k, S^{k-1}) in andere Räume, was wir in den vorangegangenen Beweisen auch immer wieder benutzt haben.

Als letztes in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche der Standardkonstruktionen aus CW-Komplexen wieder CW-Komplexe machen.

4.54. Proposition. *Die folgenden Konstruktionen mit CW-Konstruktion liefern in den Kategorien $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$ wieder CW-Komplexe:*

(1) *beliebige Koprodukte,*
(2) *Pushouts entlang zellulärer Abbildungen von einem Unterkomplex in einen anderen CW-Komplex,*
(3) *Kolimiten von Inklusionen von Unterkomplexen,*
(4) *Produkte und reduzierte Produkte endlich vieler CW-Komplexe.*

In (4) dürfen wir nicht mit dem gewöhnlichen topologischen Produkt arbeiten, da das Produkt zweier unendlich großer CW-Komplexe im Allgemeinen eine gröbere als die CW-Topologie trägt. Die Kategorie $\mathcal{CW}$ ist nach Proposition 4.10 kovollständig. Sie ist jedoch nicht bivollständig, da bereits die einfachsten Pullbacks, nämlich Urbilder von Punkten aus Y^0 unter zellulären Abbildungen $X \to Y$ im Allgemeinen keine CW-Komplexe mehr sind.

Beweis. In jedem der Punkte (1)–(4) findet sich eine natürliche CW-Struktur auf dem neu konstruierten Raum. In (1)–(3) liefern die universellen Eigenschaften, dass diese CW-Struktur die gleiche Topologie induziert wie die universelle Konstruktion. Die Details sind Übung 4.97. In (4) reduzieren wir den Beweis für Produkte zunächst auf kompakte, das heißt, endliche CW-Komplexe, siehe Übung 4.98. Hieraus leitet man mit (2) das analoge Resultat für $X \wedge Y$ ab. □

Für kompliziertere Konstruktionen sind CW-Komplexe leider nicht mächtig genug. Immerhin gilt aber folgendes Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

4.55. Satz (Milnor). *Es seien X, Y homotopieäquivalent zu CW-Komplexen, dann ist auch der Abbildungsraum $C(X,Y)$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex.*

4.e. Modellkategorien

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass der Begriff der „schwachen Homotopieäquivalenz" es uns ermöglicht, anstelle beliebiger topologischer Räume nur CW-Komplexe zu betrachten, die wir weit besser verstehen. Wir haben in Bemerkung 4.53 (2) aber auch gesehen, dass unser Begriff einer naiven Homotopiekategorie $\mathcal{H}kw\mathcal{H}$ nicht gut zur Methode der CW-Approximation passt. Daher werden wir in diesem Abschnitt einen etwas anderen Begriff einer Homotopiekategorie entwickeln. Mehr Details dazu finden Sie in [**Ho, Qui**].

Bisher haben wir die Begriffe Faserung, Kofaserung und schwache Äquivalenz recht wahllos benutzt. In diesem Kapitel führen wir den Begriff einer Modellkategorie ein, der all diese Begriffe umfasst. Laut Quillen ist „Modellkategorie" eine Abkürzung für „Kategorie von Modellen für eine Homotopietheorie". Die Kategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume ohne Basispunkte trägt mehrere solcher Modellstrukturen. Für Retrakte von Abbildungen verweisen wir auf Übung 3.117.

4.56. Definition. Eine *Modellstruktur* $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ auf einer Kategorie $\mathcal{M}$ besteht aus drei Unterkategorien, den *Faserungen* $f\mathcal{M}$, den *Kofaserungen* $c\mathcal{M}$, und den *schwachen Äquivalenzen* $w\mathcal{M}$, sowie zwei funktoriellen Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ für alle Morphismen f in $\mathcal{M}$, so dass die folgenden Axiome gelten.

(M1) *Retrakte.* Ein Retrakt einer Faserung, Kofaserung oder schwachen Äquivalenz ist wieder vom gleichen Typ.

(M2) *Zwei-von-drei-Eigenschaft.* Seien $f\colon Y \to Z$ und $g\colon X \to Y$ Morphismen. Wenn zwei der drei Morphismen f, g und $f \circ g$ schwache Äquivalenzen sind, dann auch der dritte.

(M3) *Liftungseigenschaft.* Wenn im äußeren kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

der Morphismus i eine Kofaserung, p eine Faserung und i oder p eine schwache Äquivalenz ist, dann existiert eine Abbildung $h\colon X \to E$, so dass das gesamte Diagramm kommutiert.

(M4) *Funktorielle Faktorisierungen.* In den Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ sind i, j Kofaserungen, p, q Faserungen und p und j schwache Äquivalenzen.

Eine *Modellkategorie* $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ ist eine bivollständige Kategorie mit einer Modellstruktur.

Die Unterkategorien $c\mathcal{M}$, $f\mathcal{M}$ und $w\mathcal{M}$ sind im Allgemeinen nicht voll. Stattdessen folgt aus den Axiomen, dass sie jeweils alle Objekte enthalten. Wir nennen eine Faserung oder Kofaserung *trivial* oder *azyklisch,* wenn sie außerdem eine schwache Äquivalenz ist.

4.57. Bemerkung. Wir beginnen mit einigen einfachen Schlussfolgerungen.

(1) *Eckmann-Hilton-Dualität.* Wenn man in einer Katgeorie mit Modellstruktur alle Pfeile umdreht, erhält man wieder eine Modellstruktur; allerdings tauschen Faserungen und Kofaserungen ihre Rollen. Das bedeutet: wenn ein bestimmter Sachverhalt in allen Modellstrukturen (oder in allen Modellkategorien) gilt, dann gilt die Eckmann-Hilton-duale Aussage ebenfalls in allen Modellstrukturen (Modellkategorien).

(2) In einer Modellstruktur $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ legen $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ gemeinsam $f\mathcal{M}$ fest, siehe Übung 4.99. Das heißt aber nicht, dass zur jeder Wahl von $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ bereits eine Modellstruktur existiert.
(3) Es sei $A \to X$ eine Kofaserung und $A \to Y$ beliebig, dann ist der Pushout $Y \to X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung, siehe Übung 4.100.

Da Modellkategorien bivollständig sind, gibt es immer ein initiales Objekt $\emptyset$ und ein terminales Objekt $*$, siehe Beispiel 4.9(1) und (2). In einer punktierten Kategorie (zum Beispiel $\mathcal{T}op_+$) stimmen beide überein, wir behalten aber trotzdem die obige Notation bei.

4.58. Definition. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie mit initialem Objekt $\emptyset$ und terminalem Objekt $*$. Ein Objekt X von $\mathcal{M}$ heißt *fibrant,* wenn $X \to *$ eine Faserung ist, und *kofibrant,* wenn $\emptyset \to X$ eine Kofaserung ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{cf}$ die volle Unterkategorie der Objekte, die sowohl fibrant als auch kofibrant sind.

4.59. Beispiel. Es folgen einige Beispiele von Modellstrukturen auf Kategorien topologischer Räume.

(1) Es sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}op$, $k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ eine Kategorie topologischer Räume. Dann besitzt $\mathcal{T}$ eine Modellstruktur, in der $w\mathcal{M}$ gerade die Homotopieäquivalenzen sind. Faserungen sind die Hurewicz-Faserungen aus Definition 3.22 und Kofaserungen die abgeschlossenen Kofaserungen aus Definition 3.55. In dieser Kategorie sind alle Objekte fibrant und kofibrant, es gilt also $\mathcal{T}op_{cf} = \mathcal{T}op$. Wir nennen sie die *Hurewicz-,* die *naive* oder die *Strøm-Modellstruktur.* Wir haben Axiom (M1) in den Übungen 3.117, 3.127 und 4.101 bewiesen, und (M3) in den Übungen 3.131 und 3.132. Axiom (M2) gilt offensichtlich.
(2) Da schwache Homotopieäquivalenz allein mit Hilfe der Homotopiegruppen definiert ist, ist dieser Begriff unter Umständen hilfreicher als Homotopieäquivalenz im klassischen Sinne. In der sogenannten *Standard-, Serre-* oder *Quillen-Modellstruktur* sind die schwachen Äquivalenzen genau die schwachen Homotopieäquivalenzen, die Faserungen sind die Serre-Faserungen aus Definition 3.22, und die Kofaserungen sind Retrakte von relativen Zellkomplexen. *Relative Zellkomplexe* sind etwas allgemeiner als die relativen CW-Komplexe aus Definition 4.37. Hier darf man in jedem Schritt beliebig viele Zellen beliebiger Dimension ankleben, so dass eine Zelle auch an eine Zelle gleicher oder größerer Dimension angeklebt werden kann. Jetzt ist immer noch jedes Objekt fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch Zellkomplexe und ihre Retrakte.
(3) Die *gemischte* oder *Cole-Modellstruktur* benutzt schwache Homotopieäquivalenzen und Hurewicz-Faserungen. Die passenden Kofaserungen werden durch Bemerkung 4.57 (2) gegeben. Nach wie vor sind alle Objekte fibrant, kofibrant sind nur Räume vom Homotopietyp eines CW-Komplexes.
(4) Anstatt Homotopiegruppen zur Definition von schwacher Äquivalenz heranzuziehen, könnte man auch die Kategorie der Überlagerungen und die Kohomologie lokal konstanter Garben zur Definition von $w\mathcal{M}$ benutzen. In diesem Fall wäre beispielsweise der polnische Kreis (das „topologische Huhn“) aus Beispiel 4.52 zu S^1 schwach äquivalent. Leider ist mir keine Modellstruktur bekannt, die auf derartigen schwachen Äquivalenzen aufbaut.

In allen Fällen ist (M4) recht aufwändig nachzuprüfen, weshalb wir darauf hier verzichten wollen.

4.60. Definition. Sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie. Zwei Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heißen *linkshomotop,* wenn es einen Raum Z (den *Zylinder*) mit Abbildungen $\iota_0, \iota_1\colon X \to Z$, eine schwache Äquivalenz $p\colon Z \to X$ und eine *Linkshomotopie* $h\colon Z \to Y$ gibt, so dass das folgende

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{(f,g)} & Y \\ {\scriptstyle (\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X)}\downarrow & \searrow^{(\iota_0,\iota_1)} & \uparrow{\scriptstyle h} \\ X & \xleftarrow[\sim]{p} & Z\,. \end{array} \tag{1}$$

Sie heißen *rechtshomotop,* wenn es einen Raum P (den *Pfadraum*) mit Abbildungen $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \colon P \to Y$, eine schwache Äquivalenz $u \colon Y \to P$ und eine *Rechtshomotopie* $k \colon X \to P$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xleftarrow{(f,g)} & X \\ {\scriptstyle (\mathrm{id}_Y,\mathrm{id}_Y)}\uparrow & \nwarrow^{(\varepsilon_0,\varepsilon_1)} & \downarrow{\scriptstyle k} \\ Y & \xrightarrow[\sim]{u} & P\,. \end{array} \tag{2}$$

Der „klassische“ Homotopiebegriff für stetige Abbildungen aus Definition 2.2 entspricht Linkshomotopie mit dem festen Zylinder $X \times I$. Nach dem Exponentialgesetz 1.101 (2) ist das äquivalent zu Rechtshomotopie mit dem Pfadraum Y^I. Die Definition hier ist zum einen allgemeiner, weil sie auch für Modellkategorien funktioniert, die überhaupt nichts mit topologischen Räumen zu tun haben, als auch potentiell gröber, weil man in $\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ auch andere Zylinder und Pfadräume benutzen darf und dadurch unter Umständen mehr Homotopien bekommt.

4.61. Bemerkung. Diese beiden Begriffe sind zueinander dual und stimmen nicht immer überein. Sie hängen beide von den schwachen Äquivalenzen in $\mathcal{M}$ ab, aber nicht von der Wahl der Faserungen und der Kofaserungen. Wenn X kofibrant ist, ist Linkshomotopie eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}(X, Y)$, und Linkshomotopie impliziert Rechtshomotopie. Die dazu duale Aussage gilt ebenfalls. Wenn wir uns also auf die volle Unterkategorie $\mathcal{M}_{cf}$ einschränken, stimmen beide Homotopiebegriffe überein und definieren eine Äquivalenzrelation auf den Morphismen-Mengen. Es bezeichne $\mathcal{H}\mathcal{M}_{cf}$ eine Kategorie mit den gleichen Objekten wie $\mathcal{M}_{cf}$ und Homotopieklassen von Morphismen.

4.62. Definition. Es sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Eine *Homotopiekategorie* zu $\mathcal{M}$ ist eine Kategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ mit einem Funktor $\mathrm{Ho} \colon \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}\mathcal{M}$, der alle schwachen Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, so dass jeder andere Funktor $\mathcal{M} \to \mathcal{E}$, der schwache Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, auf eindeutige Weise über $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ faktorisiert. Für Objekte X, Y von $\mathcal{M}$ definieren wir

$$[X, Y] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\mathcal{M}}(\mathrm{Ho}\, X, \mathrm{Ho}\, Y)\,.$$

Man kann sich anhand der Diagramme zu Definition 4.60 überzeugen, dass der Funktor Ho links- oder rechtshomotope Abbildungen auf den gleichen Morphismus in $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ abbildet. Er verhält sich also ähnlich wie der Funktor $\mathcal{T}op \to \mathcal{H}\mathcal{T}op$. Er kann aber auch Abbildungen identifizieren, die auf den ersten Blick nicht homotop sind, siehe Bemerkung 4.53 (2).

In der Sprache von Kategorien ist $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ die *Lokalisierung* von $\mathcal{M}$ an $w\mathcal{M}$. Insbesondere hängt die Homotopiekategorie nicht von der Wahl der Faserungen und Kofaserungen ab. Außerdem ist die Lokalisierung bis auf Äquivalenzen von Kategorien eindeutig, so dass insbesondere $[X, Y]$ wohldefiniert ist. Man kann Lokalisierungen (mit gewissen mengentheoretischen Schwierigkeiten) konstruieren, wobei man die Objekte beibehält und als Morphismen Äquivalenzklassen von „Zickzacks“ der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} & C_1 & & \cdots & & C_k & \\ {\scriptstyle\sim}\swarrow & & \searrow & {\scriptstyle\sim}\swarrow & \searrow & {\scriptstyle\sim}\swarrow & \searrow & \\ A & & A_1 & & A_{k-1} & & B \end{array}$$

einführt, bei denen alle nach links weisenden Pfeile aus $w\mathcal{M}$ stammen, ähnlich wie in Definition 4.45. Bei Quillen heißen die hier definierten Modellkategorien *abgeschlossen,* das heißt, dass ein Morphismus in $\mathcal{M}$ genau dann eine schwache Äquivalenz ist, wenn er in $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ auf einen Isomorphismus abgebildet wird. Das hat nichts mit dem Begriff „abgeschlossen“ aus Abschnitt 4.c zu tun.

Die Modellstruktur erlaubt eine einfachere Beschreibung der Homotopiekategorie bis auf Äquivalenz. An dieser Stelle kommen auch Faserungen und Kofaserungen ins Spiel.

4.63. Satz (Fundamental- über Modellkategorien, Quillen). *Es sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, dann induziert der Funktor* Ho *eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{HM}_{cf} \to \mathrm{Ho}\mathcal{M}$.*

Insbesondere ist $\mathrm{Ho}\mathcal{M}$ selbst eine Kategorie im herkömmlichen Sinn. Wir haben in Bemerkung 4.53 gesehen, dass der klassische Abbildungs- und Homotopiebegriff nicht gut zu schwachen Homotopieäquivalenzen passt. Um $[X, Y]$ wie in Definition 4.62 zu bestimmen, kann man also X und Y durch schwach äquivalente, fibrant-kofibrante Objekte ersetzen, bevor man $[X, Y]$ durch Homotopien im Sinne von Definition 4.60 beschreiben kann. In der Tat reicht es sogar, X durch ein kofibrantes und Y durch ein fibrantes Objekt zu ersetzen.

4.64. Beispiel. Wir wollen uns dieses Resultat anhand der obigen Modellstrukturen auf $\mathcal{T} = \mathcal{T}op$, $k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ anschauen. In der Tat bilden topologische Räume eine interessante Beispielkategorie, um das Verhalten verschiedener Modellkategorien zu studieren. Allerdings sind in Beispiel 4.59 stets alle Objekte fibrant. Quillen hat gesehen, dass das nicht in jeder Modellkategorie so sein muss.

(1) In der Strøm-Modellstruktur sind alle Objekte fibrant und kofibrant. Wenn $f, g\colon X \to Y$ im klassischen Sinne von Definition 2.2 homotop sind, können wir $Z = X \times I$ in Definition 4.60 (1) wählen, somit sind f und g linkshomotop. Seien umgekehrt f und g linkshomotop, dann ist $p\colon Z \to X$ eine Homotopieäquivalenz, und es existiert ein Homotopieinverses $q\colon X \to Z$. In der Notation von Definition 4.60 (1) sind dann ι_0, ι_1 und q im klassischen Sinne homotop. Wir erhalten klassische Homotopien

$$f = h \circ \iota_0 \sim h \circ \iota_1 = g\ .$$

Also stimmt der neue Homotopiebegriff in der Strøm-Modellstruktur mit dem klassischen überein, und es ist $\mathrm{Ho}\mathcal{T} = \mathcal{HT}$ die Homotopiekategorie aus Bemerkung 2.5 (2).

(2) Wenn wir zu punktierten Räumen übergehen, müssen wir als schwache Äquivalenzen punktierte Abbildungen $f\colon X \to Y$ zulassen, für die eine punktierte Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert, so dass $g \circ f$ und $f \circ g$ als unpunktierte Abbildungen homotop zur Identität sind, siehe Übung 4.103 mit $A = \mathrm{pt}$.

Nach wie vor sind alle Objekte fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch die gut punktierten Räume aus Definition 3.55. Die zugehörige Homotopiekategorie hat als Objekte also nur gut punktierte Räume, und hier sind schwache Äquivalenzen wieder genau die punktierten Homotopieäquivalenzen. Somit erhalten wir die korrekte Homotopiekategorie, indem wir uns in unser naiven Homotopiekategorie auf gut punktierte Räume einschränken. Jeden nicht gut punktierten Raum X können wir, wenn nötig, durch den Abbildungszylinder der Inklusion $\{x_0\} \hookrightarrow X$ ersetzen.

(3) In der Quillen-Modellkategorie ist jeder Raum nach Satz 4.51 zu einem CW-Komplex schwach äquivalent. Also reicht es, Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ zwischen CW-Komplexen zu betrachten.

Klassische Homotopie impliziert wieder Homotopie im neuen Sinn. Seien also f, g im Sinne von Definition 4.60 homotop. Wir approximieren das Zylinderobjekt Z durch einen CW-Komplex $k\colon W \to Z$ und erhalten mit Satz 4.51 zwei Abbildungen $j_0, j_1\colon X \to W$,

so dass $k \circ j_i = \iota_i$ für $i = 0, 1$. Außerdem ist $p \circ k$ eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.46 von Whitehead. Sei $q\colon X \to W$ ein Homotopieinverses, dann folgt im klassischen Sinne $q \sim j_0 \sim j_1$, und wie oben sind auch f und g im klassischen Sinne homotop.

Also ist die Homotopiekategorie zur Quillen-Modellstruktur äquivalent zur naiven Homotopiekategorie $\mathcal{HCW}$ der CW-Komplexe, siehe Bemerkung 4.53 (1). Letztere ist deutlich übersichtlicher als die Kategorie $\mathcal{HT}_{cf}$ aller Retrakte von Zellkomplexen, die uns der Satz von Quillen liefert. Außerdem ist $\mathcal{HCW}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{HT}op$.Wir erhalten $[X, Y]$, indem wir X durch einen schwach homotopieäquivalenten CW-Komplex ersetzen, bevor wir klassische Homotopien betrachten.

4.f. Faser- und Kofaser-Sequenzen

Ab sofort sei stets $\mathcal{T}$ eine „schöne“ Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie $\mathcal{T}_+$. Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf $\mathcal{T}_+$, beispielsweise die Strøm- oder die Quillen-Modellstruktur aus Beispiel 4.59 (1) beziehungsweise (2). In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen $w\mathcal{T}_+$, Faserungen $f\mathcal{T}_+$ und Kofaserungen $c\mathcal{T}_+$. Mit $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir eine zugehörige Homotopiekategorie, also etwa die „naive“ Homotopiekategorie $\mathcal{HT}_+$ der gut punktierten Räume im ersten und $\mathcal{HCW}_+$ im zweiten Fall, siehe Beispiel 4.64. Wir verstehen die Notation $[X, Y]$ im Sinne von Definition 4.62, das heißt, wir ersetzen X durch einen schwach äquivalenten kofibranten Raum, bevor wir naive Homotopieklassen betrachten (Y ist ja stets fibrant). Die allermeisten Konstruktionen im Folgenden lassen sich komplett in der Sprache der Modellkategorien für beliebige Modellkategorien durchführen. Wir werden aber die meiste Zeit mit konkreten topologischen Methoden arbeiten.

4.65. Bemerkung. Wir haben uns in den Abschnitten 4.a–4.d große Mühe gegeben, „schöne“ Kategorien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_+$ mit vielen angenehmen Eigenschaften zu konstruieren, damit wir im letzten Abschnitt 4.e Modell - und Homotopiekategorien einführen konnten. Umso größer ist die Ernüchterung, wenn wir feststellen, dass die Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ gar nicht so schöne Eigenschaften hat. Sie ist beispielsweise weder vollständig noch kovollständig, siehe etwa Übung 4.104.

Daher führen wir viele typische Konstruktionen nicht in der Homotopiekategorie durch, sondern zunächst in $\mathcal{T}_+$. Erst am Schluss betrachten wir die Früchte unserer Arbeit in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$. So „leben“ die Faser- und Kofasersequenzen, die wir gleich betrachten, natürlicherweise in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$. Wir beschreiben sie dennoch in $\mathcal{T}_+$, um im Zweifel etwas bessere Kontrolle über ihre Eigenschaften zu haben.

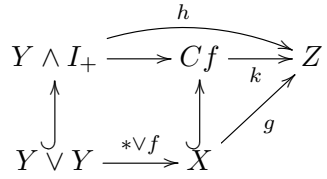
In den Homotopiekategorien $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ gibt es keinen natürlichen Begriff exakter Sequenzen. In diesem Abschnitt lernen wir zwei Typen von Sequenzen kennen, die sich ähnlich wie exakte Sequenzen verhalten.

In Definition 3.71 haben wir den reduzierten Kegel $CA = A \wedge (I, 0)$ eines Raumes A und den Abbildungskegel $Cf = CY \cup_f X$ einer Abbildung $f\colon Y \to X$ kennengelernt. Nach Bemerkung 3.72 (1) und (3) sind (CA, A) und (Cf, X) immer Kofaserungen in der Strøm-Modellstruktur. Der Homotopiequotient $X /\!\!/ A$ ist gerade der Abbildungskegel der Inklusion $A \hookrightarrow X$.

4.66. Bemerkung. Der Abbildungskegel $Cf = CY \cup_f X$ von $f\colon Y \to X$ hat einige schöne Eigenschaften.

(1) Es sei Z ein weiterer punktierter Raum. Aus der universellen Eigenschaft 1.86 eines Pushouts folgt, dass eine Abbildung $k\colon Cf \to Z$ genau einer punktierten Abbildung $g\colon X \to Z$ und einer punktierten Nullhomotopie h von der konstanten Abbildung $Y \to \{z_0\} \hookrightarrow Z$

zu $g \circ f$ entspricht.



(2) Betrachte die Inklusion $\iota\colon X \to Cf$. Wir schreiben $f^* = \cdot \circ f\colon [X,Z] \to [Y,Z]$. Mit (1) sieht man, dass die Sequenz

$$[Cf,Z] \xrightarrow{\iota^*} [X,Z] \xrightarrow{f^*} [Y,Z]$$

punktierter Mengen für alle Z bei $[X,Z]$ im Sinne von Definition 3.17 exakt ist.

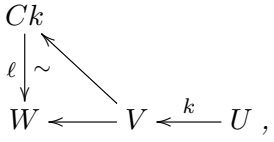
Wir erinnern uns an die iterierte Einhängung $S^kX = S^k \wedge X$ aus Definition 3.68 und Bemerkung 3.70 (2). Sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann schreiben wir im Folgenden $-Sf$ für die Abbildung $(\overline{\mathrm{id}}_{S^1}) \wedge f\colon S^1X \to S^1Y$. Dabei sei $\overline{\mathrm{id}}_{S^1}$ eine punktierte Selbstabbildung vom Grad -1, etwa gegeben durch komplexe Konjugation auf $S^1 \subset \mathbb{C}$. Man beachte, dass dann $-S(-Sf)$ zu S^2f homotop ist.

4.67. Satz (Barratt-Puppe-Sequenz). *Es sei $f\colon Y \to X$ eine Abbildung zwischen kofibranten punktierten Räumen. Dann existiert eine natürliche Sequenz*

$$\cdots \longleftarrow S^2Cf \xleftarrow{S^2\iota} S^2X \xleftarrow{S^2f} S^2Y \xleftarrow{Sj} SCf \xleftarrow{-S\iota} SX \xleftarrow{-Sf} SY \xleftarrow{-j} Cf \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{f} Y \qquad (*)$$

in $\mathcal{T}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) *Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm*



bei dem ℓ eine schwache Äquivalenz ist;

(2) *Sei g eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von g abgeschnittene Sequenz in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ gerade mit der entsprechenden Sequenz für g überein;*

(3) *Für jeden Raum Z ist die induzierte Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow [S^2Cf,Z] \xrightarrow{(S^2\iota)^*} [S^2X,Z] \xrightarrow{(S^2f)^*} [S^2Y,Z] \xrightarrow{(Sj)^*} [SCf,Z] \xrightarrow{(-S\iota)^*}$$
$$\longrightarrow [SX,Z] \xrightarrow{(-Sf)^*} [SY,Z] \xrightarrow{-j^*} [Cf,Z] \xrightarrow{\iota^*} [X,Z] \xrightarrow{f^*} [Y,Z]$$

von Mengen exakt.

Eine Sequenz (*) mit der Eigenschaft (1) heißt auch *Kofasersequenz.* Zusammen mit f legt (1) die Sequenz (*) bereits bis auf Isomorphie in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig fest. Übrigens lässt sich dieser Satz für beliebige punktierte Modellkategorien auch abstrakt aus den Axiomen herleiten. Die Minuszeichen in (*) ergeben sich aus der Konstruktion und sind nötig für (2). Sie spielen eine Rolle in der Theorie sogenannter „triangulierter Kategorien“. Die analoge Sequenz ohne Minuszeichen ist offensichtlich isomorph zu (*), so dass man die Minuszeichen später manchmal weglässt.

Nach Bemerkung 3.77 (1) ist die *Puppe-Sequenz* (3) bis zur Stelle $[SY,Z]$ eine exakte Sequenz von Gruppen, und nach 3.77 (2) sogar eine exakte Sequenz abelscher Gruppen bis zur Stelle $[S^2Y,Z]$.

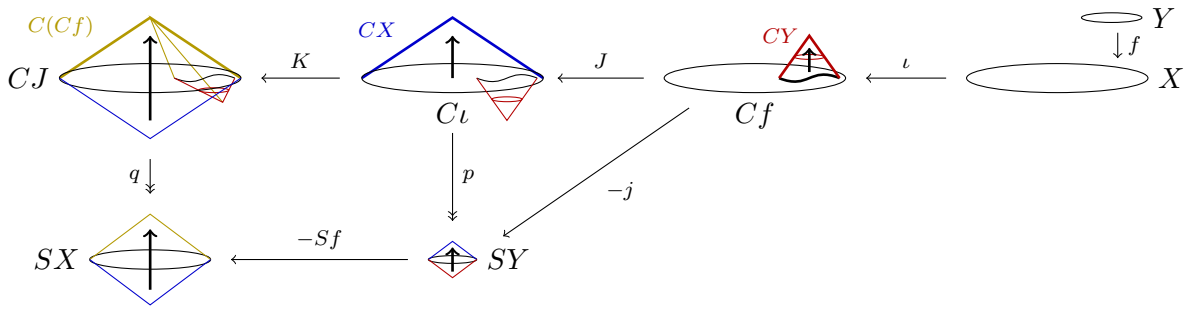


ABBILDUNG 4.6. Zur Kofasersequenz der Abbildung $f\colon Y \to X$

Nach Übung 4.111 wirkt die Gruppe $[SY, Z]$ auf $[Cf, Z]$; ähnliche Gruppenwirkungen haben wir in den Sätzen 3.19 und 3.25 gesehen. Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\cdots \longleftarrow X_3 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-koexakt*. Diese Eigenschaft ist schwächer als (1) und legt (*) nicht eindeutig fest. Beispielsweise können wir Cf durch einen Raum W ersetzen, der Cf als Retrakt besitzt, und die Sequenz (*) links von X durch die entsprechende Sequenz zur Abbildung $X \to W$ ersetzen, ohne die Exaktheit von (3) zu zerstören. Die schwache Äquivalenz ℓ in (1) ist ebenfalls nicht eindeutig bestimmt, denn die Gruppe $[SU, W]$ operiert auf der Menge der möglichen Homotopieklassen von Homotopieäquivalenzen. Das hängt eng damit zusammen, dass $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ nicht alle Kolimiten enthält, siehe Bemerkung 4.65.

BEWEIS. Wir arbeiten hier nur in der Strøm-Modellstruktur. In der Quillen-Modellstruktur reicht es, die Abbildung f wie in Satz 4.51 durch eine zelluläre Abbildung zwischen CW-Komplexen zu ersetzen. Dadurch werden alle weiteren Abbildungen in (1) ebenfalls zu zellulären Abbildungen zwischen CW-Komplexen.

Wir konstruieren die Sequenz (*) Schritt für Schritt und beweisen (1) und (2), dann folgt die Exaktheit der Sequenz (3) aus Bemerkung 4.66 (2). Am Anfang der Sequenz (*) ist nichts zu tun.

Wir betrachten zu $\iota\colon X \to Cf$ den Abbildungskegel

$$C\iota = CX \cup_\iota Cf\ .$$

Dabei befolgen wir die Konvention, dass der zuletzt konstruierte Kegel immer die Orientierung festlegt; das wird auch die diversen Minuszeichen in (*) erklären. Die Pfeile in Abbildung 4.6 zeigen jeweils in Richtung der jeweiligen Kegelspitze.

Da (CY, Y) eine Kofaserung ist, sind (Cf, X) und $(C\iota, CX)$ nach Proposition 3.64 ebenfalls Kofaserungen. Außerdem ist CX zusammenziehbar, also ist die Quotientenabbildung $p\colon C\iota \to C\iota/CX$ eine Homotopieäquivalenz nach Proposition 3.62. Da CX die „Basis“ des Abbildungskegels $C\iota$ ist, ist $C\iota/CX$ natürlich homöomorph zur Einhängung SY. Wir beweisen (1) an der Stelle Cf, indem wir die Abbildung $j\colon Cf \to SY$ definieren wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C\iota & \xleftarrow{J} & Cf & \xleftarrow{\iota} & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \swarrow_{-j} & & & \\ SY\ . & & & & \end{array}$$

Das Vorzeichen rührt daher, dass die Orientierung von Cf durch CY festgelegt wird, die von SY jedoch durch den Kegel $CX \subset C\iota$.

Im nächsten Schritt sei $J\colon Cf \to C\iota$ die natürliche Inklusion. Wie oben ist $CJ = C(Cf) \cup_J C\iota$, und $(CJ, C(Cf))$ ist eine Kofaserung. Da die „Basis“ $C(Cf)$ von CJ zusammenziehbar ist, erhalten wir wieder eine Homotopieäquivalenz

$$q\colon CJ \xrightarrow{\sim\!\!\!\rightarrow} CJ/C(Cf) \cong SX \ .$$

Das linke Quadrat in Abbildung 4.6 kommutiert bis auf die punktierte Homotopie $h\colon C\iota \times I \to SX$ mit

$$\begin{aligned} & h\big((y,s),t\big) = \big(f(y), 1-s+st\big) && \text{für } (y,s) \in CY \subset C\iota \ , \\ \text{und} \qquad & h\big((x,s),t\big) = (x, st) && \text{für } (x,s) \in CX \subset C\iota \ , \end{aligned}$$

wobei der Kegelparameter s jeweils an der Spitze den Wert 0 und an der Basis den Wert 1 annimmt. Es folgt $h(\,\cdot\,,0) = (-Sf) \circ p$ und $h(\,\cdot\,,1) = q \circ K$, wobei $K\colon C\iota \to CJ$ wieder die natürliche Inklusion bezeichne. Wir erhalten das kommutative Diagramm in Abbildung 4.6. Damit ist (1) an der Stelle SY ebenfalls gezeigt.

Als letztes beweisen wir induktiv (1) und (2), indem wir die Sequenz (*) mit der verschobenen Sequenz zur Abbildung ι vergleichen wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longleftarrow & SX & \xleftarrow{-Sf} & SY & \xleftarrow{-j} & Cf & \xleftarrow{\iota} & X & \xleftarrow{f} & Y \\ & & \| & & \uparrow{\scriptstyle p}\ \sim & & \| & & \| & & \\ \cdots & \longleftarrow & SCf & \xleftarrow{-S\iota} & SX & \xleftarrow{-q\circ K} & C\iota & \xleftarrow{J} & Cf & \xleftarrow{\iota} & X \ . \end{array}$$

Dies erlaubt uns, die Sequenz (*) Schritt für Schritt nach links fortzusetzen. Die Eigenschaft (1) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für die ι-Sequenz eine Position weiter rechts. □

4.68. Beispiel. Es sei $f\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung. Wenn wir an S^2 eine Zelle mit der Verklebeabbildung f ankleben, erhalten wir die komplex projektive Ebene $\mathbb{C}P^2$, siehe Übung 1.168. Insbesondere ist $\mathbb{C}P^2 \cong Cf$, da $D^4 \cong CS^3$. Der Quotient von $\mathbb{C}P^2$ nach dem 2-Gerüst S^2 ist homöomorph zu S^4. Wir erhalten also eine Kofasersequenz

$$\cdots \longleftarrow S^3 \xleftarrow{Sf} S^4 \longleftarrow \mathbb{C}P^2 \longleftarrow S^2 \xleftarrow{f} S^3 \ .$$

Völlig analog führen wir jetzt Fasersequenzen ein. Dabei lassen wir uns wie in Abschnitt 3.f vom Prinzip der Eckmann-Hilton-Dualität leiten. Wir erinnern uns daran, dass $Y^{I_+} = C(I,Y)$ die unpunktierten und Y^I die punktierten Abbildungen von $I = (I,0)$ nach Y bezeichnet. Diese Räume sind dual zum reduzierten Zylinder $Y \wedge I_+$ beziehungsweise zum reduzierten Kegel CY.

4.69. Definition. Es sei $f\colon X \to Y$ eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir die *Pfad-Faserung*

$$p\colon Pf \longrightarrow Y^{I_+} \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} Y \ ,$$

indem wir $Pf = \big\{\, (\gamma, x) \in Y^{I_+} \times X \;\big|\; \gamma(1) = f(x) \,\big\} \to Y^{I_+}$ als Pullback

$$\begin{array}{ccc} Y^{I_+} & \longleftarrow & Pf \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*\mathrm{ev}_1} \\ Y & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

konstruieren. Die typische Faser der Pfadfaserung ist die *Homotopiefaser*

$$Ff = \big\{\, (\gamma, x) \in Y^{I_+} \times X \;\big|\; \gamma(0) = y_0 \text{ und } \gamma(1) = f(x) \,\big\} = \big\{\, (\gamma, x) \in Y^I \times X \;\big|\; \gamma(1) = f(x) \,\big\} \ .$$

4.70. Bemerkung. Die Pfadfaserung hat folgende Eigenschaften, siehe auch Abbildung 4.7 und Übung 4.105.

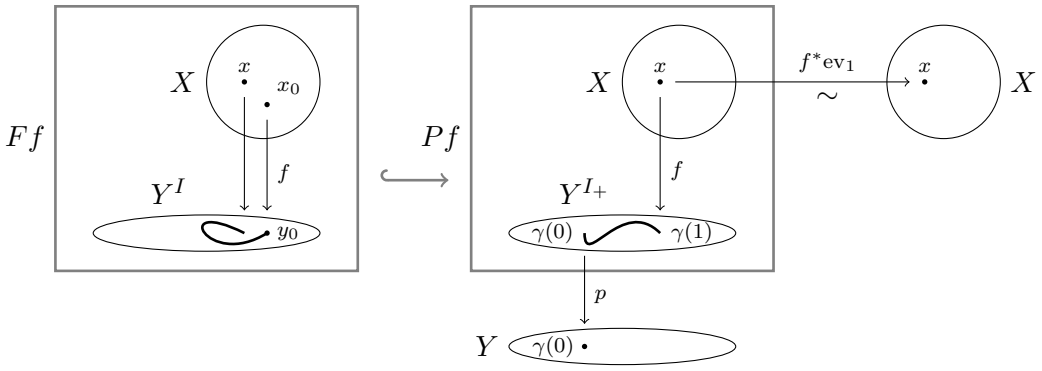


ABBILDUNG 4.7. Die Pfadfaserung einer Abbildung $f\colon X \to Y$

(1) Die Abbildungen

$$\mathrm{ev}_0\colon Y^{I_+} \longrightarrow Y\ , \qquad \mathrm{ev}_1\colon Y^{I_+} \longrightarrow Y\ ,$$
$$p\colon Pf \longrightarrow Y \qquad \text{und} \qquad f^*\mathrm{ev}_1\colon Pf \longrightarrow X$$

sind Hurewicz-Faserungen mit Faser Y^I beziehungsweise Ff, siehe Definition 3.22.

(2) Wenn wir Y mit den konstanten Pfaden in Y^{I_+} identifizieren, ist Y ein Deformationsretrakt von Y^{I_+}. Dabei können wir ev_0 oder ev_1 als Retraktionsabbildung wählen. Wählen wir entsprechend zu $x \in X$ den konstanten Pfad im Punkt $f(x)$ und benutzen $\iota\colon X \to Pf$ mit

$$\iota(x) = \big(t \mapsto f(x), x\big)$$

um X mit $\operatorname{im}\iota \subset Pf$ zu identifizieren, so wird X zu einem Deformationsretrakt von Pf.

(3) Es gilt $p \circ \iota = f$, und $f \circ f^*\mathrm{ev}_1$ ist punktiert homotop zu p, somit können wir jede beliebige Abbildung f durch eine Hurewicz-Faserung $p\colon Pf \to Y$ mit homotopieäquivalentem Totalraum ersetzen.

(4) Wenn $f\colon X \to Y$ bereits eine Hurewicz-Faserung ist, dann ist die Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent zur Faser $f^{-1}(y_0)$.

4.71. BEMERKUNG. Dual zu Bemerkung 4.66 hat die Homotopiefaser folgende Eigenschaften.

(1) Die Homotopiefaser Ff lässt sich auf zwei Weisen als Pullback darstellen:

$$\begin{array}{ccc} Y^I & \longleftarrow & Ff \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q=f^*\mathrm{ev}_1} \\ Y & \xleftarrow{\ f\ } & X \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} Pf & \longleftarrow & Ff \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & \mathrm{pt}\ . \end{array}$$

(2) Eine Abbildung $k\colon Z \to Ff$ entspricht genau einer Abbildung $g\colon Z \to X$ und einer punktierten Nullhomotopie h von der konstanten Abbildung $Z \to \{y_0\} \hookrightarrow Y$ zur Abbildung $f \circ g$.

(3) Wir schreiben $f_* = f \circ \cdot : [Z, X] \to [Z, Y]$. Aus (2) folgt, dass die Sequenz

$$[Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

punktierter Mengen exakt ist.

Der folgende Satz ist Eckmann-Hilton dual zum Satz 4.67 von Barratt-Puppe. Der Beweis ist daher Übung 4.106. Wir überlegen uns aber, dass $\Omega^k X = X^{S^k}$ zu $S^k X = X \wedge S^k$ dual ist. Sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann schreiben wir $-\Omega f$ für die Abbildung, die $\alpha \in \Omega X$ auf $f \circ \alpha \circ \overline{\mathrm{id}}_{S^1}$ abbildet. Dann ist $-\Omega(-\Omega f)$ homotop zu $\Omega^2 f$.

Da jede Hurewicz-Faserung eine Serre-Faserung ist, sieht diese Sequenz in der Quillen-Modellstruktur genau so aus wie in der Strøm-Modellstruktur. Allerdings sollten wir in (3) den Raum Z zunächst durch einen schwach äquivalenten CW-Komplex ersetzen, wenn wir die Menge $[Z, \cdot]$ aus Definition 4.62 durch die Menge naiver Homotopieklassen ersetzen wollen.

4.72. Satz. *Zu jeder Abbildung $f\colon X \to Y$ existiert eine natürliche Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow \Omega^2 Ff \xrightarrow{\Omega^2 q} \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega r} \Omega Ff \xrightarrow{-\Omega q} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{r} Ff \xrightarrow{q} X \xrightarrow{f} Y \qquad (*)$$

punktierter Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

(1) *Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} Ff & & & & \\ {\scriptstyle k}\uparrow{\scriptstyle \sim} & \searrow^{q} & & & \\ W & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f} & U\ , \end{array}$$

bei dem k eine Homotopieäquivalenz ist;

(2) *Sei g eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von g abgeschnittene Sequenz in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ mit der entsprechenden Sequenz für g überein;*

(3) *Für jeden gut punktierten Raum Z ist die induzierte Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow [Z, \Omega^2 Ff] \xrightarrow{(\Omega^2 q)_*} [Z, \Omega^2 X] \xrightarrow{(\Omega^2 f)_*} [Z, \Omega^2 Y] \xrightarrow{(-\Omega r)_*} [Z, \Omega Ff] \xrightarrow{(-\Omega q)_*}$$
$$\longrightarrow [Z, \Omega X] \xrightarrow{(-\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{r_*} [Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

von Mengen exakt.

Eine Sequenz mit der Eigenschaft (1) heißt *Fasersequenz.* Die Sequenz (*) wird durch (1) und die Abbildung f bis auf Isomorphie in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig festgelegt. Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-exakt.* Wiederum ist die Sequenz (*) nicht allein durch diese Eigenschaft bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig festgelegt, und k in (1) ist nicht bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

Als Spezialfall der Sequenz (3) mit $Z = S^0$ erhalten wir die lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen aus Satz 3.25, wenn wir Ff durch die Faser F und $[S^0, \Omega^k \cdot]$ mit Hilfe des Exponentialgesetzes durch $[S^k, \cdot]$ ersetzen, siehe Übung 4.109. Die Abbildung r nennt man auch *Fasertransport.* Sie beschreibt, wohin der Basispunkt der Faser durch so etwas wie Paralleltransport entlang einer Schleife in Y verschoben wird und liefert somit einen Punkt in der Homotopiefaser.

4.73. Beispiel. Es sei $\iota\colon S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion des 2-Gerüstes und $f\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die Abbildung $\iota \circ f$ auf $D^4 = CS^3$ fortsetzen. Das liefert uns eine Abbildung $g\colon S^3 \to F\iota$. Der Schleifenraum $\Omega\mathbb{C}P^\infty$ ist nach Übung 4.107 zu S^1 homotopieäquivalent. Aus der obigen langen exakten Sequenz (3) für $Z = S^k$ und Beispiel 3.33 folgt, dass $g_*\colon \pi_k(S^3) \to \pi_k(F\iota)$ ein Isomorphismus ist für alle $k \geq 3$. Für $k = 1, 2$ überlegt man sich, dass $\pi_k(\Omega S^2) \to \pi_j(\Omega\mathbb{C}P^1) = \pi_j(S^1)$ ein Isomorphismus ist für $j = 0, 1$. Außerdem sind sowohl S^3 als auch $F\iota$ zusammenhängend. Somit ist g eine schwache Homotopieäquivalenz. Da $F\iota$ nach einer etwas allgemeineren Version des Satzes 4.55 von Milnor den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat, ist g nach dem Satz 4.46 von Whitehead sogar eine Homotopieäquivalenz. Wir erhalten somit eine Fasersequenz

$$\cdots \longrightarrow S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}P^\infty\ .$$

Auf der rechten Seite können wir die Fasersequenz sogar noch durch die Abbildung $\mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{H}P^\infty$ fortsetzen.

4.g. Übungen zu Kapitel 4

Übungen zu Abschnitt 4.a.

4.74. Übung. Es seien $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Wir nennen natürliche Transformationen $\varepsilon\colon \mathcal{F}\circ\mathcal{G} \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ ein Einheiptenpaar, wenn

$$\varepsilon_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\eta_X = \mathrm{id}_{\mathcal{F}X} \quad \text{und} \quad \mathcal{G}\epsilon_Y \circ \eta_{\mathcal{G}Y} = \mathrm{id}_{\mathcal{G}Y}$$

für alle Objekte X von $\mathcal{C}$ und Y von $\mathcal{D}$ gilt. Zeigen Sie wahlweise:

(1) Es sei $\Phi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y)$ eine Adjunktion im Sinne von Definition 4.1, dann bilden

$$\varepsilon_Y = \Phi^{-1}_{\mathcal{G}Y,Y}(\mathrm{id}_{\mathcal{G}Y}) \quad \text{und} \quad \eta_X = \Phi_{X,\mathcal{F}X}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}X})$$

ein Einheitenpaar.

(2) Es sei ε und η ein Einheitenpaar, dann liefert $\Phi_{X,Y} = \mathcal{G}\cdot \circ \eta_X$ eine Adjunktion im Sinne von Definition 4.1.

4.75. Übung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Kolimiten.

(1) Der Kolimes $\mathrm{colim}(A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B)$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Pushout.
(2) Jeder Kolimes lässt sich als Pushout von Koprodukten schreiben.

4.76. Übung. Es sei $\mathcal{I}$ die Kategorie mit einem Objekt aus Beispiel 4.5 und $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ ein Funktor. Beschreiben Sie $\mathcal{F}$ in Termen der linearen Algebra und geben Sie $\lim \mathcal{F}$ und $\mathrm{colim}\, \mathcal{F}$ an.

4.77. Übung. Welche Rechenregeln ergeben sich aus Lemma 4.14 und dem Exponentialgesetz für Mengen aus Beispiel 4.3 (1)

(1) für disjunkte Vereinigungen und kartesische Produkte, sowie
(2) für kartesische Produkte und Mengen von Abbildungen?

4.78. Übung. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann bezeichne $\mathcal{C}^{op}$ die Kategorie mit den gleichen Objekten und

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \text{und} \quad f \circ_{op} g = g \circ f$$

für alle f, g und für alle $X, Y \in \mathcal{C}$.

Überprüfen Sie:

(1) Sei $\mathcal{I}$ ein Diagramm. Dann sind $\mathcal{I}$-Limiten in $\mathcal{C}$ gerade $\mathcal{I}^{op}$-Kolimiten in $\mathcal{C}^{op}$ und umgekehrt.
(2) Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entsprechen Funktoren $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ und Funktoren $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ entsprechen Funktoren $G\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.
(3) Es seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ adjungierte Funktoren, dann sind auch $G\colon \mathcal{D}^{op} \rightleftarrows \mathcal{C}^{op} : F$ adjungiert.
(4) Es seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}^{op} : G$ adjungierte Funktoren, dann sind auch $G\colon \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}^{op} : F$ adjungiert.

Übungen zu Abschnitt 4.b. Zur Erinnerung: unter „kompakt“ verstehen wir stets überdeckungskompakt und Hausdorffsch, siehe Definition 1.58.

4.79. Übung. Zeigen Sie:

(1) Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorff, und schwache Hausdorff-Räume erfüllen (T1).

(2) Sei X schwach Hausdorff, K kompakt und $f\colon K \to X$ stetig. Dann ist $\operatorname{im} f$ kompakt (insbesondere Hausdorff), und f ist *eigentlich,* das heißt, Urbilder kompakter Teilmengen sind kompakt.

4.80. Übung. Zeigen Sie:

(1) Die k-offenen Mengen von X bilden eine Topologie $\mathcal{O}_{kX}$ auf X; diese ist feiner als $\mathcal{O}_X$. Schreibe $kX = (X, \mathcal{O}_{kX})$, dann ist insbesondere $\mathrm{id}_X\colon kX \to X$ stetig.
(2) Sei K kompakt, dann ist $f\colon K \to X$ genau dann stetig, wenn $f\colon K \to kX$ stetig ist.
(3) Es gilt $\mathcal{O}_{k(kX)} = \mathcal{O}_{kX}$, also ist kX kompakt erzeugt.
(4) Ein Raum X ist genau dann kompakt erzeugt, wenn für jeden Raum Y und jede Abbildung $g\colon X \to Y$ von Mengen äquivalent sind:
   (a) die Abbildung g ist stetig, und
   (b) für jedes Kompaktum K und jede stetige Abbildung $f\colon K \to X$ ist $g \circ f\colon K \to Y$ stetig.

4.81. Übung. Zeigen Sie:

(1) Der Funktor $k\colon \mathcal{T}op \to k\mathcal{T}op$ ist rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor $k\mathcal{T}op \hookrightarrow \mathcal{T}op$, das heißt, für alle $X \in k\mathcal{T}op$, $Y \in \mathcal{T}op$ gibt es eine natürliche Bijektion
$$\hom_{k\mathcal{T}op}(X, kY) = \hom_{\mathcal{T}op}(X, Y)\ .$$
(2) Es sei $X \in k\mathcal{T}op$ und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann hat kA die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums in der Kategorie $k\mathcal{T}op$ aus Satz 1.50.
(3) Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Räumen in $k\mathcal{T}op$, dann hat $k\prod_{i\in I} X_i$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in der Kategorie $k\mathcal{T}op$ aus Satz 1.53.

4.82. Übung. Wir betrachten die topologischen Räume
$$X = \bigvee_{i\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (I, 0) \quad \text{und} \quad Y = \bigvee_{j\in\mathbb{N}} (I, 0)$$
und die Teilmenge
$$P = \left\{ \left(\frac{1}{1+i_j}, \frac{1}{1+i_j} \right) \in I_i \times I_j \;\middle|\; i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, j \in \mathbb{N} \right\} \subset X \times Y.$$
Zeigen Sie:

(1) Statten wir den Raum $X \times Y$ mit der CW-Topologie, die durch die abgeschlossenen 2-Zellen $\overline{e}^2_{ij} = [0,1] \times [0,1]$ für $(i,j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ gegeben ist, aus, dann ist P abgeschlossen.
(2) In der Produkttopologie auf $X \times Y$ gilt $0 \in \overline{P}$.
(3) Die CW-Topologie in (1) stimmt mit der Topologie auf $k(X \times Y)$ zur Produkttopologie auf $X \times Y$ überein.

Hinweis: Jede Umgebung von 0 enthält in der Produkttopologie eine Teilmenge der Form
$$\Big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} [0, a_i) \Big) \times \Big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} [0, b_j) \Big) \qquad \text{mit } 0 < a_i, b_j \leq 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ und alle } j \in \mathbb{N}\ .$$

4.83. Übung. Zeigen Sie:

(1) Disjunkte Vereinigungen von Familien in $kw\mathcal{H}$ sind wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.
(2) Sei $X_0 \subset X_1 \subset \cdots$ eine aufsteigende Familie in $kw\mathcal{H}$, so dass X_i für alle i in X_{i+1} abgeschlossen ist. Dann ist der Kolimes in $\mathcal{T}op$ wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.
(3) CW-Komplexe sind kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.

4.84. Übung. Zeigen Sie in Analogie zu Aufgabe 3.129: wenn X ein kompakt erzeugter schwach Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ ist, dann ist $A \subset X$ eine k-abgeschlossene Teilmenge.

4.85. Übung. Es sei $X \in kw\mathcal{H}$, und es sei $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen in $kw\mathcal{H}$, so dass $X \cong \operatorname{colim} X_n$. Außerdem sei K kompakt und $f\colon K \to X$ stetig.

(1) Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} f \subset X_n$ für ein hinreichend großes n.
(2) Folgern Sie für $x_0 \in X_0$, dass $\pi_k(X, x_0) = \operatorname{colim} \pi_k(X_n, x_0)$.

Hinweis. Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: es sei $(x_n)_n$ eine Folge in X, so dass $x_n \in X \setminus X_{n-1}$, dann ist $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subset X$ abgeschlossen.

4.86. Übung. Es bezeichne $|\cdot| : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ den vergesslichen Funktor, der einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zuordnet.

(1) Geben Sie je einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor zu $|\cdot|$ an.
(2) Gibt es links- und rechtsadjungierte Funktoren zur Einschränkung $|\cdot| : kw\mathcal{H} \to \mathcal{S}et$?

Hinweis zu (2). Welche Auswirkungen hat die Existenz der jeweiligen Adjungierten nach Lemma 4.14 auf Pullbacks und Pushouts?

4.87. Übung. Es bezeichne $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} S^1$ den Quotienten topologischer Räume. Bestimmen Sie den Kolimes der Folge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

zum einen in der Kategorie $\mathcal{T}op$, zum anderen in der Kategorie $kw\mathcal{H}$.

4.88. Übung. Wir betrachten den inversen Limes X der Folge

$$S^1 \xleftarrow{\cdot 1} S^1 \xleftarrow{\cdot 2} S^1 \xleftarrow{\cdot 3} S^1 \longleftarrow \cdots$$

topologischer Räume. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ des ersten Raumes in den Limes X. Ist diese Abbildung eine Einbettung? Ist sie surjektiv?

Übungen zu Abschnitt 4.c.

4.89. Übung. Konstruieren Sie die natürlichen Transformationen α, λ und ρ aus Definition 4.26, zeigen Sie, dass sie Isomorphismen sind, und beweisen Sie die Axiome (1) und (2)

(1) entweder für $(\mathcal{C}, \times, E)$, falls endliche Produkte in $\mathcal{C}$ existieren und E terminal ist,
(2) oder für $(\mathcal{C}, \sqcup, E)$, falls endliche Koprodukte in $\mathcal{C}$ existieren und E initial ist.

4.90. Übung. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie.

(1) Benutzen Sie die Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \hom(Y, \cdot)$ und die Funktorialität von $\otimes$ im zweiten Argument, um zu zeigen, dass $\hom(\cdot, Z)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor ist.
(2) Zeigen Sei, dass $\hom(\cdot, \cdot)$ ein *Bifunktor* ist, das heißt, dass für alle $f\colon Z \to W$, $g\colon X \to Y$ gilt

$$\hom(X, f) \circ \hom(g, Z) = \hom(g, W) \circ \hom(Y, f)\colon\ \hom(Y, Z) \longrightarrow \hom(X, W)\ .$$

4.91. Übung. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Beweisen Sie die universellen Eigenschaften des internen hom-Funktors und des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.28 mit Hilfe von Bemerkung 4.2. Überlegen Sie sich außerdem, dass die Zuordnungen $f \mapsto g$ in (1) und $g \mapsto f$ in (2) zueinander invers sind.

4.92. Übung. Beweisen Sie Proposition 4.36, orientieren Sie sich dabei am Beweis von Proposition 3.59.

4.93. Übung. Es seien X, Y, Z in $kw\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

(1) $kC(\cdot, Z)\colon kw\mathcal{H} \rightleftarrows kw\mathcal{H}^{op} : kC(\cdot, Z)$ ist eine Adjunktion.
(2) $kC(X \sqcup Y, Z) \cong k(kC(X, Z) \times kC(Y, Z))$.
(3) $kC(X, k(Y \times Z)) \cong k(kC(X, Y) \times kC(X, Z))$.
(4) Was muss eine abgeschlossene monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, \hom, E)$ erfüllen so, dass (i) und (ii) analog gelten?

Übungen zu Abschnitt 4.d.

4.94. Übung. Beweisen Sie Folgerung 4.41.

4.95. Übung. Zeigen Sie:
(1) Schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe sind homotopieäquivalent.
(2) Schwach homotopieäquivalente topologische Räume haben homotopieäquivalente CW-Approximationen.

4.96. Übung. Geben Sie k-zusammenhängende CW-Modelle für $(\mathbb{C}P^n, *)$ an für alle $k \leq 2n$.
Zusatz: Wie sieht es mit $(\mathbb{H}P^n, *)$ aus?

4.97. Übung. Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage:
Pushouts längst zellulären Abbildungen auf Unterkomplexen sowie Kolimiten einer Folge zellulärer Inklusionen von CW-Komplexen liefern wieder CW-Komplexe.

4.98. Übung. Seien X, Y CW-Komplexe mit charakteristischen Abbildungen $(\Phi_i^m)_{m,i}$, $(\Psi_j^n)_{n,j}$, dann sei Z der CW-Komplex auf der Menge $X \times Y$ mit den charakteristischen Abbildungen

$$\Phi_i^m \times \Psi_j^n \colon D^m \times D^n \cong D^{n+m} \to X \times Y \ .$$

Zeigen Sie:
(1) $\mathrm{id}\colon Z \to k(X \times Y)$ ist stetig.
(2) Wenn X, Y endlich sind, ist $\mathrm{id}\colon Z \to k(X \times Y)$ ein Homöomorphismus.
(3) $\mathrm{id}\colon Z \to k(X \times Y)$ ein Homöomorphismus.

Hinweis: Es reicht bei (3) zu zeigen, dass für alle Kompakta K und alle stetigen $f\colon K \to X \times Y$ die Abbildung $\mathrm{id} \circ f\colon K \to Z$ stetig ist.

Übungen zu Abschnitt 4.e.

4.99. Übung. Es sei $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellstruktur. Zeigen Sie, dass $f\mathcal{M}$ gerade die Menge aller $p\colon E \to B$ in $\mathcal{M}$ ist, die für alle trivialen Kofaserungen $i\colon A \to X$ die Liftungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

erfüllen.
Hinweis: Wenn p die Liftungseigenschaft hat, zerlegen Sie $p = q \circ j$ wie in Axiom (M4) und schreiben Sie p als Retrakt von q.

4.100. Übung. Es sei $A \to X$ eine Kofaserung und $A \to Y$ beliebig. Zeigen Sie, dass der Pushout $Y \to X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung ist.

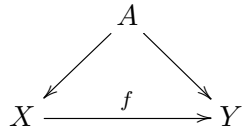
4.101. Übung. Es sei $f\colon A \to B$ ein Retrakt von $g\colon X \to Y$ im Sinne von Übung 3.117 in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie:
(1) Wenn g ein Isomorphismus ist, dann ist auch f ein Isomorphismus.
(2) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn g eine Homotopieäquivalenz ist, dann auch f.

(3) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn g eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann auch f.

Hinweis: (2) und (3) folgen aus (1) dank Funktorialität.

4.102. Übung. Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Zeigen Sie, dass man stets drei „triviale“ Modellstrukturen auf $\mathcal{C}$ erhält, indem man für zwei der drei Kategorien $w\mathcal{C}$, $f\mathcal{C}$ und $c\mathcal{C}$ alle Morphismen zulässt, und für die dritte nur Isomorphismen. Bestimmen Sie die zugehörigen Homotopiekategorien zum einen anhand der Definition 4.62, zum anderen mit dem Satz 4.63 von Quillen.

4.103. Übung. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie und A ein Objekt von $\mathcal{M}$. Die Kategorie $A \downarrow \mathcal{M}$ „unter A“ enthält als Objekte Morphismen der Form $A \to X$ in $\mathcal{M}$, und als Morphismen kommutative Diagramme der Form



in $\mathcal{M}$. Wir nennen einen Morphismus Faserung, Kofaserung beziehungsweise schwache Äquivalenz in $A \downarrow \mathcal{M}$, wenn f in $\mathcal{M}$ vom entsprechenden Typ ist. Zeigen Sie, dass $A \downarrow \mathcal{M}$ mit dieser Struktur wieder eine Modellkategorie bildet.

4.104. Übung. Es seien $f\colon A \to X$ und $g\colon A \to Y$ stetige, punktierte Abbildungen. Wir definieren den *Homotopie-Pushout*

$$Z = X \cup_f Y = X \sqcup A \wedge I_+ \sqcup Y / \sim ,$$

wobei wir $A \times \{0\}$ via f an X und $A \times \{1\}$ via g and Y ankleben. Wir erhalten Inklusionsabbildungen $i\colon X \to Z$ und $j\colon Y \to Z$. Zeigen Sie:

(1) Seien punktierte Abbildungen $p\colon X \to W$ und $q\colon Y \to W$ gegeben, so dass $p \circ f$ zu $q \circ g\colon A \to W$ homotop sind, dann existiert eine Abbildung $k\colon Z \to W$ mit $k \circ i = p$ und $k \circ j = q$.
(2) Wenn man f und g durch punktiert homotope Abbildungen f', g' ersetzt, erhält man einen zu Z punktiert homotopieäquivalenten Raum $X \cup_{f'} Y$.
(3) Warum muss der Raum Z trotzdem kein Pushout in der Homotopiekategorie sein? Geben Sie dazu ein Beispiel.

Übungen zu Abschnitt 4.f.

4.105. Übung. Es sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.70.

(1) Die Pfadfaserung $Pf \to Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser Ff.
(2) Der Unterraum $\mathrm{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von Pf.
(3) Die Abbildung $f \circ (f^* \mathrm{ev}_1)$ ist zu $p\colon Pf \to Y$ punktiert homotop.
(4) Wenn f eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent.

4.106. Übung. Beweisen Sie Eigenschaft (1) für die Sequenz (*) aus Satz 4.72 an einer der Stellen Ff oder ΩY, indem Sie den Beweis von Satz 4.67 mit Eckmann-Hilton-Dualität übertragen.

4.107. Übung. Es sei $\iota\colon S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion. Die Abbildung $S^1 \wedge S^1 \cong S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ induziert eine Abbildung

$$S^1 \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{C}P^\infty) .$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Aus den Sätzen von Milnor und Whitehead folgt, dass sie sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

4.108. Übung. Es sei $\iota\colon S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion und $F\iota$ ihre Homotopiefaser. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die durch die Hopf-Faserung induzierte Abbildung $g\colon S^3 \to S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ auf ganz D^4 fortsetzen.

Konstruieren Sie damit eine Abbildung $S^3 \to F\iota$. Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz 3.25 für Faserungen, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

4.109. Übung. Es sei (X, A) ein Paar punktierter Räume und $\iota\colon A \to X$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass $\pi_k(F\iota) \cong \pi_{k+1}(X, A)$ für alle $k \geq 0$.

4.110. Übung. Setzen Sie die Sequenz aus Beispiel 4.73 nach links fort, indem Sie sich überlegen, dass ΩS^1 zu $\mathbb{Z}$ und $\Omega^k S^1$ für $k \geq 2$ zu einem Punkt homotopieäquivalent ist.

4.111. Übung. Beweisen Sie eine der folgenden Aussagen.

(1) Es gibt in der Sequenz aus Satz 4.67 (3) eine natürliche Wirkung der Gruppe $[SY, Z]$ auf der Menge $[Cf, Z]$, deren Bahnen genau den Urbildern von Elementen von $[X, Z]$ unter ι^* entsprechen.
(2) Es gibt in der Sequenz aus Satz 4.72 (3) eine natürliche Wirkung der Gruppe $[Z, \Omega Y]$ auf der Menge $[Z, Ff]$, deren Bahnen genau den Urbildern von Elementen von $[Z, X]$ unter q^* entsprechen.

KAPITEL 5

Homologie

Wir haben am Ende von Kapitel 3 gesehen, dass stabile Homotopiegruppen etwas leichter zu handhaben sind als die ursprünglichen Homotopiegruppen. Wir nehmen das als Inspiration für die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologie- und Kohomologiefunktoren. In der Literatur ist gern von Homologietheorien die Rede, aber eigentlich ist das ganze nur Teil einer größeren Theorie, daher verwenden wir den etwas bescheideneren Begriff Funktor.

5.a. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir geben die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologiefunktoren an, leiten einige elementare Schlussfolgerungen ab, und geben ein Beispiel einer solchen Theorie. Weitere Homologiefunktoren konstruieren wir später.

Ab sofort sei wieder $\mathcal{T}$ eine „schöne“ Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$. An einzelnen Stellen werden wir sogar nur die Kategorie $\mathcal{CW}$ der CW-Komplexe und ihrer zellulären Abbildungen betrachten. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie $\mathcal{T}_+$. Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf $\mathcal{T}_+$, beispielsweise die punktierte Strøm- oder Quillen-Modellstruktur, siehe Beispiel 4.64 (2) und Übung 4.103. In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen, Faserungen und Kofaserungen in $\mathcal{T}_+$. Anstelle von „kofibrant“ sagen wir nach wie vor „gut punktiert“ und erinnern uns daran, dass in beiden Modellstrukturen alle Räume fibrant sind. Mit $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir wieder eine zugehörige Homotopiekategorie, und mit $[X,Y]$ die „Homotopieklassen“ im Sinne von Definition 4.62.

Als Zielkategorie wählen wir im Folgenden der Einfachheit halber stets die Kategorie $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$ der (Links-) Moduln über einem Ring R. Im Prinzip könnten wir stattdessen eine Kategorie wählen, die viele wichtige Eigenschaften mit den Kategorien $\mathcal{M}od_R$ gemeinsam hat. Ein paar dieser Eigenschaften listen wir gleich auf. Wir könnten also beispielsweise eine sogenannte *Grothendieck-Kategorie* wählen, siehe (7) unten. Nach dem *Satz von Gabriel-Popescu* ist jede Grothendieck-Kategorie $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ mit $R = \operatorname{End} G$, siehe (7), das heißt, sie erbt viele Eigenschaften von $\mathcal{M}od_R$. Allerdings erhalten wir unter Umständen andere Limiten und Kolimiten — dieses Phänomen haben wir in Abschnitt 4.b bereits beim Übergang von $\mathcal{T}op$ zu den vollen Unterkategorien $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$ beobachtet. Insgesamt gibt es kaum Vorteile, allgemeinere Kategorien als $\mathcal{M}od_R$ zu betrachten, daher arbeiten wir lieber direkt in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$. Später werden wir darüber hinaus oft annehmen, dass R kommutativ oder sogar ein Hauptidealring ist. Das liefert uns gleich die wichtigsten Zielkategorien, nämlich

$$\mathcal{M}od_{\mathbb{Z}} = \mathcal{A}b \qquad \text{und} \qquad \mathcal{M}od_{\Bbbk} = \mathcal{V}ec_{\Bbbk} \qquad \text{für einen Körper } \Bbbk\,.$$

Die wichtigsten Körper wiederum werden $\Bbbk = \mathbb{Q}$ und $\Bbbk = \mathbb{Z}/2$ oder allgemeiner $\mathbb{Z}/p$ für eine Primzahl p sein.

5.1. Bemerkung. Es sei R ein Ring. Dann hat die Kategorie $\mathcal{M}od_R$ der (Links-) R-Moduln folgende wichtige Eigenschaften.

(1) *Punktiert:* Es gibt ein Nullobjekt 0, und daher zwischen je zwei Objekten X, Y einen Nullmorphismus $0\colon X \to 0 \to Y$, siehe Bemerkung 4.29.

(2) *Additiv:* Zusätzlich zu (1) gibt es endliche Produkte und Koprodukte, und für je zwei Objekte ist die natürliche Abbildung

$$X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$$

ein Isomorphismus. Wir nennen das Koprodukt daher auch *direkte Summe.* Jetzt kann man Morphismen $f, g\colon X \to Y$ addieren:

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xleftarrow{\cong} X \sqcup X \xrightarrow{f \sqcup g} Y \sqcup Y \xrightarrow{\mathrm{id} \sqcup \mathrm{id}} Y \ .$$

Diese Addition entspricht genau der elementweisen Addition, also $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in Y$. Allein aus der kategoriellen Beschriebung folgt, dass $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ eine abelsche Halbgruppe ist, und das die Verknüpfung von Morphismen bilinear ist. Zusätzlich fordert man noch, dass $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ sogar ein Gruppe ist.

(3) *Prä-Abelsch:* Zusätzlich zu (1), (2) hat jeder Morphismus $f\colon X \to Y$ einen *Kern* $\ker f \hookrightarrow X$ und einen *Kokern* $Y \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$. Bisher haben wir sie als Faser und Kofaser bezeichnet:

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \rightarrowtail & X \\ \vdots & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ 0 & \twoheadrightarrow & Y \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{coker} f & \twoheadleftarrow & Y \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ 0 & \leftarrow & X \ . \end{array}$$

(4) *Abelsch:* Zusätzlich zu (1)–(3) ist jedes Unterobjekt *normal,* das heißt, Kern eines Morphismus, und jeder Quotient ist *konormal,* das heißt, Kokern eines Morphismus. Wir verzichten hier auf die kategorielle Beschreibung. Als Folge gilt der *Homomorphiesatz:* Für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ gilt

$$\operatorname{im} f = \ker \operatorname{coker} f \cong \operatorname{coker} \ker f = \operatorname{coim} f \ .$$

Außerdem können wir in abelschen Kategorien über exakte Sequenzen sprechen.

(5) *Vollständig und Kovollständig:* Alle Limiten und Kolimiten existieren, siehe Abschnitt 4.a. Aus (1)–(4) folgt bereits, dass alle endlichen Limiten und Kolimiten existieren.

(6) *Exakte gerichtete Kolimiten:* Jede Folge von Abbildungen kurzer exakter Sequenzen hat als Kolimes wieder eine kurze exakte Sequenz, siehe Beweis von Lemma 5.37. Man beachte, dass die analoge Eigenschaft für Limiten im Allgemeinen nicht gilt, siehe Abschnitt 6.b. Hier ist also zum ersten Mal das Dualitätsprinzip verletzt.

(7) *Grothendieck-Kategorie:* Zusätzlich zu (1)–(6) hat $\mathcal{M}od_R$ einen *Erzeuger* R, das heißt, der Funktor $|\cdot| : \mathcal{M}od_R \to \mathcal{S}et_+$ aus Bemerkung 4.29, der ein Objekt X auf $|X| = \mathrm{Hom}_R(R,X)$ abbildet, ist *treu.* Für alle Objekte ist also $\mathrm{Hom}_R(X,Y) \to \mathrm{Abb}(|X|,|Y|)$ injektiv. In beliebigen Grothendieck-Kategorien ist $|X|$ wegen (2) eine abelsche Gruppe, damit sogar ein $\operatorname{End} R$-Modul, und $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\operatorname{End} R}(|X|,|Y|)$ ist bijektiv.

(8) *Abgeschlossen Monoidal:* Wenn R kommutativ ist, ist $\mathcal{M}od_R$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.c.

In der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ gelten viele Lemmata der homologischen Algebra, von denen wir bis jetzt nur das Vierer- und Fünfer-Lemma 3.20 kennengelernt haben. Dank (4) lassen sich viele Sätze über exakte Sequenzen durch „Diagrammjagd“ beweisen, und dank (7) dürfen wir dabei mit Elementen (nicht mit Morphismen) arbeiten, siehe etwa Satz 5.6 über die Mayer-Vietoris-Sequenz. Eigenschaft (8) wird wichtig, sobald wir zu sogenannten „multiplikativen“ Theorien übergehen. Später werden wir manchmal zusätzlich fordern, dass R ein Hauptidealring ist, siehe etwa Abschnitt 5.f.

5.2. Definition. Es sei R ein Ring und $\mathcal{T}_+$ eine punktierte Kategorie topologischer Räume mit einer Modellstruktur. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Homologiefunktor* $\left(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet\right)$ auf $\mathcal{T}_+$ mit Werten

in $\mathcal{M}od_R$ besteht aus einer Familie von Funktoren

$$\tilde{h}_\bullet = \big(\tilde{h}_n \colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R\big)_{n\in\mathbb{Z}} ,$$

und einer Familie natürlicher Transformationen $\partial_\bullet = (\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\partial_n(X,A)\colon \tilde{h}_n(X/A) \to \tilde{h}_{n-1}(A)$ für alle Kofaserungen (X,A) in $c\mathcal{T}_+$, die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homotopieinvarianz.* Für jede schwache Äquivalenz $f\colon X \to Y$ ist $\tilde{h}_n f\colon \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_n(Y)$ ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(2) *Homologiesequenz.* Für jede Kofaserung (X,A) mit den natürlichen Abbildungen $\iota\colon A \to X$ und $p\colon X \to X/A$ ist die folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A) \xleftarrow{\partial_n} \tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{\tilde{h}_n p} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\tilde{h}_n \iota} \tilde{h}_n(A) \longleftarrow \cdots$$

(3) *Summenaxiom.* Sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie gut punktierter Räume, dann ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_i\colon X_i \to \bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)$ induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i\in I} \tilde{h}_n\iota_i \colon \bigoplus_{i\in I} \tilde{h}_n(X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\Big(\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)\Big)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt $\big(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet\big)$ einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Homologiefunktor* mit *Koeffizienten* $M \in \mathcal{M}od_R$, wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}_n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Diagramme in Definition 4.60 gilt $\tilde{h}_n f = \tilde{h}_n g$ für alle n, wenn f und $g\colon X \to Y$ (rechts- oder links-) homotop sind. Nach Definition 4.62 und dem Satz 4.63 von Quillen ist (1) äquivalent dazu, dass sich $\tilde{h}_n$ auf der Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ definieren lässt. Axiome (2) und (3) sprechen nur über Kofaserungen beziehungsweise kofibrante Objekte. Für beliebige Paare (Y,X) und allgemeiner Abbildungen $f\colon X \to Y$ ersetzt man den Quotienten durch den Homotopiequotienten $X/\!\!/A$ beziehungsweise durch den Abbildungskegel aus Definition 3.71. Aufgrund der Homotopieinvarianz von $\tilde{h}$ gilt Axiom (2) in dieser Situation analog.

Wir betrachten die Kategorie der Pfeile in $c\mathcal{T}_+$, das ist die volle Unterkategorie von $\mathcal{P}air$, die alle Kofaserungen (X,A) enthält. Die Zuordnungen $(X,A) \mapsto \tilde{h}_n(X/A)$ und $(X,A) \mapsto \tilde{h}_{n-1}(A)$ sind zwei Funktoren von dieser Kategorie in die Kategorie $\mathcal{M}od_R$. Der *Verbindungshomomorphismus* oder die *Randabbildung* ∂_n im Axiom (2) ist eine natürliche Transformation im Sinne von Definition 3.3 zwischen diesen beiden Funktoren. Sei $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ eine Abbildung zwischen Kofaserungen, dann erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(A) & \xrightarrow{\tilde{h}_n\iota} & \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}_n(f|_A)} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}_n f} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}_n \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}_{n-1}(f|_A)} & & \\
\ldots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(B) & \xrightarrow{\tilde{h}_n\iota} & \tilde{h}_n(Y) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(B) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Dabei ergibt sich die Kommutativität der zwei linken Quadrate aus der Natürlichkeit von ι und p (siehe oben) und der Funktorialität von $\tilde{h}_n$, während die Kommutativität des rechten Quadrats aus der Natürlichkeit von $\partial_\bullet$ folgt. Streng genommen sollten wir in der Sequenz (2) Minuszeichen wie in den Faser- und Kofasersequenzen 4.67 und 4.72 einbauen. Diese ändern jedoch nichts an der Exaktheit und der Natürlichkeit und werden daher meist weggelassen.

Später schreiben wir meistens nur $\tilde{h}_\bullet$ anstelle von $\big(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet\big)$. Außerdem kürzen wir gern $\tilde{h}_k f$ durch f_* ab, wenn klar ist, zwischen welchen Homologien f_* abbildet.

In der Literatur gibt es viele Varianten dieser Axiome. Die natürliche lange exakte Sequenz (2) zusammen mit Homotopieinvarianz (1) bilden dabei stets den „harten Kern“; siehe Proposition 5.34 für eine äquivalente Darstellung. Auf das Summenaxiom (3) können wir wegen Bemerkung 5.7 verzichten, wenn wir nur endliche Koprodukte betrachten wollen; diese reichen aber nicht für alle Anwendungen aus. Andere Axiome können wir bei Bedarf zusätzlich fordern, zum Beispiel, dass (3) sogar für alle gerichteten Kolimiten gilt. Die ursprünglichen Axiome von Eilenberg und Steenrod beziehen sich übrigens auf *unreduzierte* Homologie, siehe Bemerkung 5.5 (2) unten.

Die Axiome (1)–(3) sind auf beliebige punktierte Modellkategorien $\mathcal{C}_+$ an Stelle von $\mathcal{T}_+$ anwendbar. Beispielsweise ist die Homologie eines Kettenkomplexes aus Definition 5.15 ein Homologiefunktor im Sinne der obigen Definition bezüglich einer passenden Modellstruktur auf $\mathcal{C}h_R$. Für Axiom (4) braucht man ein spezielles Objekt, das die Rolle der S^0 übernimmt. Oft ist es das Einselement in einer geschlossenen monoidalen Struktur auf $\mathcal{C}_+$.

Wir kennen bereits einen allgemeinen Homologiefunktor. Dieser wird uns später dabei helfen, weitere Homologiefunktoren zu konstruieren.

5.3. Folgerung (aus Satz 3.82 und den Propositionen 3.79 und 3.84). *Die stabilen Homotopiegruppen bilden einen allgemeinen Homologiefunktor* $\pi^s_\bullet \colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{A}b$.

Stabile Homotopiegruppen erfüllen aber nicht das Dimensionsaxiom, denn nach Satz 3.101 gilt $\pi^s_1(S^0) \cong \mathbb{Z}/2 \neq 0$.

5.4. Lemma. *Es sei X schwach zusammenziehbar, das heißt, schwach äquivalent zum Ein-Punkt-Raum* pt. *Dann gilt $\tilde{h}_k(X) = 0$ für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$.*

Beweis. Betrachte $(X, A) = (\mathrm{pt}, \mathrm{pt})$ mit den natürlichen Abbildungen $\iota = p = \mathrm{id}_X$. Nach Axiom (2) ist die Sequenz

$$\tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{p_*} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(A)$$

bei $\tilde{h}_n(X)$ exakt, also folgt

$$\tilde{h}_n(X) = \mathrm{im}(\mathrm{id}) = \ker(\mathrm{id}) = 0 \,. \qquad \square$$

5.5. Bemerkung. Wir betrachten die Rolle des Basispunktes in der Homologie. Dazu sei X ein Raum mit Basispunktes x_0. Wegen der Homotopieinvarianz 5.2 (1) dürfen wir X, wenn nötig, durch einen schwach äquivalenten Raum $X \vee (I, 0)$ mit gutem Basispunkt $(I, 1)$ ersetzen.

(1) Es sei $X_+ = X \sqcup \{*\}$ ein Raum mit neuem Basispunkt $*$, dann betrachten wir die punktierten Abbildungen

$$\begin{aligned} &\iota \colon S^0 \longrightarrow X_+ && \text{mit} \quad S^0 = \{x_0, *\} \subset X_+ \,, \\ &r \colon X_+ \longrightarrow S^0 && \text{mit} \quad r(x) = x_0 \quad \text{für alle } x \in X \,. \end{aligned}$$

Dann ist S^0 ein Retrakt von X_+, und $S^0 \hookrightarrow X_+$ ist eine Kofaserung mit Kofaser $X \cong X_+/S^0$. Funktoren bilden Retrakte auf Retrakte ab, und Retrakte in abelschen Kategorien sind direkte Summanden. Also erhalten wir einen Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(X_+) \cong \tilde{h}_k(X) \oplus \tilde{h}_k(S^0) \,.$$

Die linke Seite ist funktoriell in X in $\mathcal{T}$. Allerdings hängt der Isomorphismus selbst von der Wahl von x_0 ab, siehe Übung 5.72.

(2) Zu jedem allgemeinen reduzierten Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ definieren wir einen allgemeinen *unreduzierten* Homologiefunktor $h_\bullet$ auf $\mathcal{P}air$ und auf $\mathcal{T}$ durch

$$h_k(X, U) = \tilde{h}_k(X /\!\!/ U) \qquad \text{und} \qquad h_k(X) = h_k(X, \emptyset) = \tilde{h}_k(X_+) \,.$$

Man nennt $h_k(X,U)$ auch *relative Homologie,* siehe Übung 5.84 für CW-Komplexe. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome [**ES**, Section I.3] fordern anstelle von Axiom 5.2 (2) eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow h_{n-1}(U) \xleftarrow{\partial_n} h_n(X,U) \longleftarrow h_n(X) \longleftarrow h_n(U) \longleftarrow \cdots$$

für alle Paare (X,U), nicht nur für Kofaserungen. Außerdem benötigt man ein Ausschneidungsaxiom, siehe Satz **??**. Diese Forderungen sind dann zu 5.2 (2) äquivalent.

(3) Umgekehrt können wir die reduzierte Homologie aus der unreduzierten Homologie nach Wahl eines Basispunktes x_0 rekonstruieren als

$$\tilde{h}_k(X) = h_k(X, \{x_0\}) .$$

(4) Wir erhalten wegen Satz 3.97, Folgerung 5.3 und (2) als Beispiel eines allgemeinen unreduzierten Homologiefunktors den gerahmten Bordismus

$$\Omega^{\mathrm{fr}}_\bullet(X) = \pi^s_\bullet(X_+) .$$

In Zukunft meinen wir immer reduzierte Homologiefunktoren, solange wir nicht anderes sagen. Als nächstes wollen wir einige möglichst allgemeine Sätze über Homologiefunktoren aus den Axiomen herleiten.

5.6. Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es seien $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ Kofaserungen und $X = A \cup B$ ihr Pushout. Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein allgemeiner Homologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

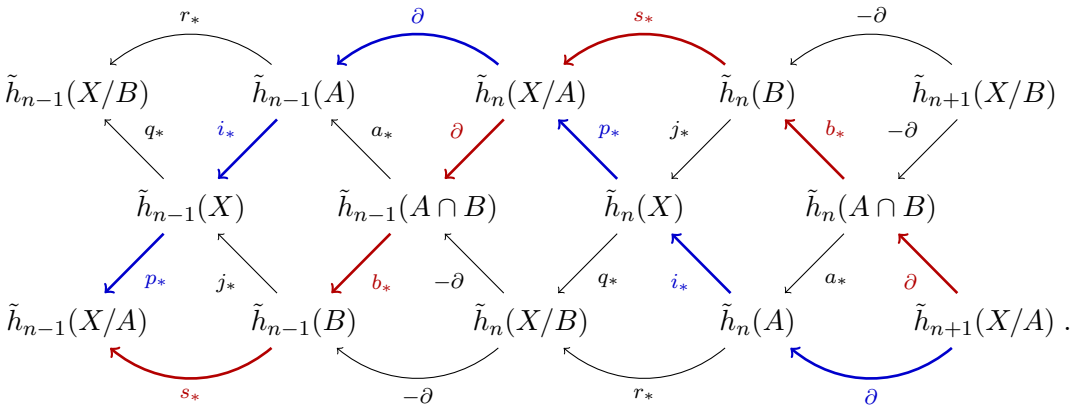
$$\begin{array}{ccc} A\cap B & \xrightarrow{a} & A \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array} .$$

Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus $\partial\colon \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_{n-1}(A\cap B)$, so dass die Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A\cap B) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{h}_n(A)\oplus\tilde{h}_n(B) \xleftarrow{(a_*,-b_*)} \tilde{h}_n(A\cap B) \longleftarrow \cdots$$

exakt ist.

Beweis. Wir wissen aus Folgerung 3.65, dass (X,A) und (X,B) unter den obigen Voraussetzungen ebenfalls Kofaserungen sind. Außerdem gilt $X/A \cong B/(A\cap B)$ und $X/B \cong A/(A\cap B)$. Wir fassen die $\tilde{h}$-Sequenzen für die Paare (X,A), (X,B), $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ im folgenden Diagramm zusammen:



Die linke und die rechte Raute kommutieren, weil $\tilde{h}_\bullet$ ein Funktor ist. Die „runden Dreiecke“ kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz (2), angewandt auf die Paarabbildung $(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beziehungsweise $(A, A\cap B) \hookrightarrow (X, B)$, und weil $X/A \cong B/(A\cap B)$ beziehungsweise $X/B \cong A/(A\cap B)$. Die Kommutativität der mittleren Raute können wir erst später in Bemerkung 5.8 zeigen; sie wird im Folgenden auch nicht benutzt.

Als Verbindungshomomorphismus wählen wir $\partial \circ p_* = -\partial \circ q_*$. Da ∂ natürlich ist, ist dieser Verbindungshomomorphismus ebenfalls natürlich, hängt allerdings von der Reihenfolge der Mengen A und B ab. Um zu zeigen, dass die Sequenz exakt ist, veranstalten wir eine Diagrammjagd zwischen den (oben farbig gezeichneten) exakten Sequenzen der Paare (X, A) und $(B, A\cap B)$.

Beispielsweise folgt die Exaktheit bei $h_n(A)\oplus h_n(B)$ aus folgendem Argument. Sei zunächst $\gamma \in \tilde{h}_n(A\cap B)$. Aus der Kommutativität der rechten Raute folgt

$$\big((i_* + j_*) \circ (a_*, -b_*)\big)(\gamma) = (i_* \circ a_*)(\gamma) - (j_* \circ b_*)(\gamma) = 0\ .$$

Seien jetzt $\alpha \in \tilde{h}_n(A)$ und $\beta \in \tilde{h}_n(B)$ gegeben, so dass $i_*\alpha + j_*\beta = 0$. Dann liegt $\xi = -j_*\beta = i_*\alpha$ im Bild von i_*, also im Kern von p_*. Es folgt $s_*\beta = -p_*\xi = 0$, also existiert ein Element $\gamma' \in \tilde{h}_n(A\cap B)$ mit $-b_*\gamma' = \beta$. Da $(i_* \circ a_*)\gamma' = (j_* \circ b_*)\gamma' = \xi = i_*\alpha$, also $i_*(\alpha - a_*\gamma') = 0$, existiert ein $\delta \in \tilde{h}_{n+1}(X/A)$ mit $\partial\delta = \alpha - a_*\gamma' \in \tilde{h}_n(A)$. Dann ist $\gamma = \gamma' + \partial\delta \in \tilde{h}_n(A\cap B)$ das gesuchte Urbild von (α, β).

Die Exaktheit an den anderen Stellen ist Inhalt der Übung 5.73. □

5.7. Bemerkung. Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz sehen wir, dass das Summenaxiom (3) für endliche Summen bereits aus den Axiomen (1) und (2) folgt, denn mehr haben wir im obigen Beweis nicht gebraucht. Sei dazu $X = Y \vee Z$ mit Basispunkt in $Y \cap Z = \mathrm{pt}$, dann erhalten wir mit Lemma 5.4, dass

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n-1}(\mathrm{pt})}_{=0} \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{h}_n(Y)\oplus\tilde{h}_n(Z) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(\mathrm{pt})}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

5.8. Bemerkung. Aufgrund der Symmetrie des Diagramms im Beweis von Satz 5.6 erhalten wir analog zur Mayer-Vietoris-Sequenz eine zweite Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(A\cap B) \xleftarrow{\partial-\partial} \tilde{h}_n(X/A)\oplus\tilde{h}_n(X/B) \xleftarrow{(p_*,-q_*)} \tilde{h}_n(X) \longleftarrow \cdots$$

Nun kann man sich überzeugen, dass $X/(A\cap B) \cong (X/A)\vee(X/B)$, indem man $X/(A\cap B)$ als Pushout von $A/(A\cap B)$ längs $\mathrm{pt} \to B/(A\cap B)$ schreibt. Dann entspricht die obige Sequenz nach Bemerkung 5.7 gerade der exakten Sequenz des Paares $(X, A\cap B)$. Aus ihrer Exaktheit schließen wir, dass auch die mittlere Raute im obigen Diagramm kommutiert.

5.9. Bemerkung. Nach Folgerung 5.3 bilden die stabilen Homotopiegruppen $\pi^s_\bullet$ einen Homologiefunktor, somit ist die Mayer-Vietoris-Sequenz für $\pi^s_\bullet$ exakt. Wenn ähnliche Zusammenhangsvoraussetzungen für die Paare $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ wie in Folgerung 3.65 gelten, existiert eine ähnliche endliche exakte Sequenz für die „instabilen“ Homotopiegruppen $\pi_\bullet$. Wir überlassen Konstruktion und Beweis dem Leser als Übung 5.74. Allerdings muss man für π_1 aufpassen, da der Satz 2.39 von Seifert-van Kampen sich nur dann gut in die lange exakte Sequenz einfügt, wenn mindestens eine der Gruppen $\pi_1(A)$, $\pi_1(B)$ oder $\pi_1(A\cap B)$ verschwindet.

5.10. Satz. *Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor und k, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$. Dann existiert für jeden gut punktierten Raum X ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X)\ . \tag{1}$$

Falls $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in $\mathcal{M}od_R$ ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases} \tag{2}$$

Aussage (1) liefert für $\tilde{h}_\bullet = \pi^s_\bullet$ eine offensichtliche Folgerung aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76.

Jetzt wird auch der Name „Dimensionsaxiom“ klar: ein reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M \ncong 0$ „sieht“ die Dimension der Sphären S^n. Daher lassen sich manche derAnwendungen des Satzes 3.42 von Brouwer-Hopf aus (2) folgern, beispielsweise der Fixpunktsatz 3.44 von Brouwer und der Satz 3.51 von der Invarianz der Dimension. Für den Satz 3.48 vom Igel benötigen wir zusätzlich den Abbildungsgrad, siehe Satz 5.11 unten.

Beweis. Diesen Beweis können wir entweder analog zum Satz 3.42 oder mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz führen. Wir entscheiden uns für Letzteres. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $n \geq 1$ zerlegen wir $S^n X$ in zwei reduzierte Kegel $C^n_\pm X \cong (I,0) \wedge \cdots \wedge (I,0) \wedge X \cong D^n \wedge X$ mit Basispunkt auf dem Durchschnitt $S^{n-1}X = C^n_+ X \cap C^n_- X$. Da $(C^n_\pm X, S^{n-1}X)$ Kofaserungen sind und $C^n_\pm X$ zusammenziehbar, erhalten wir mit Lemma 5.4 und Satz 5.6 die exakte Sequenz

$$\cdots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(C^n_+ X) \oplus \tilde{h}_{k-1}(C^n_- X)}_{=0} \leftarrow \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1}X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_k(S^n X) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(C^n_+ X) \oplus \tilde{h}_k(C^n_- X)}_{=0} \leftarrow \cdots$$

Wir erhalten induktiv den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1}X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X)\,.$$

Wenn $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in $\mathcal{M}od_R$ ist, folgt die zweite Behauptung aus der ersten und dem Dimensionsaxiom 5.2 (4). □

Wir betrachten jetzt stetige Abbildungen $f\colon S^n \to S^n$. Nach dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf und Übung 3.120 ist für alle $n \geq 1$ der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 ein Ringisomorphismus $\deg\colon \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$. Wegen Homotopieinvarianz hängt $f_*\colon \tilde{h}_k(S^n) \to \tilde{h}_k(S^n)$ nur vom Abbildungsgrad $\deg f$ ab. Für spätere Anwendungen ist die Charakterisierung des Abbildungsgrades für differenzierbare f aus Folgerung 3.91 hilfreich, bei der es reicht, die Urbilder eines regulären Wertes von f mit dem durch die jeweilige Orientierung von df gegebenen Vorzeichen zu zählen.

Da $\mathcal{M}od_R$ additiv ist, ist $\operatorname{Hom}_R\big(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n)\big)$ eine abelsche Gruppe, oder äquivalent ein $\mathbb{Z}$-Modul. Wir können also Elemente von $\operatorname{Hom}_R\big(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n)\big)$ mit ganzen Zahlen multiplizieren.

5.11. Satz. *Sei $\tilde{h}_\bullet$ ein Homologiefunktor, und $k \in \mathbb{Z}$, m, $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon S^m \to S^n$ seien stetig.*

(1) *Falls $m < n$, gilt $f_* = 0\colon \tilde{h}_k(S^m) \to \tilde{h}_k(S^n)$.*
(2) *Falls $m = n$, gilt $f_* = \deg f\colon \tilde{h}_k(S^n) \to \tilde{h}_k(S^n)$.*
(3) *Falls $m > n$ und falls $\tilde{h}_\bullet$ das Dimensionsaxiom (4) erfüllt, gilt $f_* = 0\colon \tilde{h}_k(S^m) \to \tilde{h}_k(S^n)$.*

Insbesondere liefert dieser Satz eine weitere Charakterisierung des Abbildungsgrades. Allerdings können wir den Abbildungsgrad nur dann mit Hilfe von $\tilde{h}_\bullet$ bestimmen, wenn $\mathbb{Z}$ treu auf $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ wirkt. Das ist beispielsweise nicht der Fall, wenn $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/n$ ist für ein $n \neq 0$.

Beweis. Nach Satz 3.42 (1) ist f homotop zur konstanten Abbildung, falls $m < n$. In diesem Fall faktorisiert f_* über $\tilde{h}_k(\mathrm{pt}) = 0$, und es folgt Behauptung (1).

Falls $\tilde{h}_\bullet$ das Dimensionsaxiom erfüllt und $m \neq n$, gilt $\tilde{h}_k(S^m) = 0$ oder $\tilde{h}_k(S^n) = 0$, und es folgt (3).

Zu (2) reicht es, zu zeigen, dass $\tilde{h}\colon \pi_n(S^n) \to \mathrm{End}_R\big(\tilde{h}_k(S^n)\big)$ mit $f \mapsto f_*$ ein Homorphismus abelscher Gruppen ist. Denn $\deg \mathrm{id}_{S^n} = 1$, und wegen Folgerung 3.46 und Funktorialität folgt

$$f_* = (\deg f \cdot \mathrm{id}_{S^n})_* = \deg f \cdot (\mathrm{id}_{S^n})_* = \deg f \ .$$

Es sei $S^{n-1} \subset S^n$ ein Äquator, der den Basispunkt erhält. Wir betrachten die Quotientenabbildung $d\colon S^n \to S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$. Seien $f,\, g\colon S^n \to S^n$ gegeben, dann können wir die Summe $[f] + [g] \in \pi_n(S^n)$ nach Definition 3.1 darstellen durch die zusammengesetzte Abbildung

$$S^n \xrightarrow{d} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} S^n \ .$$

Wir wenden den Homologiefunktor $\tilde{h}_n$ an und erhalten

$$\tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{d_*} \tilde{h}_n(S^n) \oplus \tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{f_* \oplus g_*} \tilde{h}_n(S^n) \ . \tag{*}$$

Um die Abbildung d_* besser zu verstehen, betrachten wir zunächst $f = \mathrm{id}_{S^n}$, $g = 0$. Dann ist $(f \vee g) \circ d$ homotop zur Identität, und wir erhalten

$$(\mathrm{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} \oplus 0) \circ d_* = \mathrm{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} \ .$$

Indem wir die Rollen von f und g vertauschen, sehen wir insgesamt, dass $d_* = \Delta$ die Diagonalabbildung in die direkte Summe ist.

Wir vergleichen jetzt das Diagramm (*) mit der Addition von Morphismen in $\mathcal{M}od_R$ nach Bemerkung 5.1 (3) und erhalten wie gewünscht

$$((f \vee g) \circ d)_* = (f_* \oplus g_*) \circ \Delta = f_* + g_* \in \mathrm{Hom}_R\big(\tilde{h}_n(S^n), \tilde{h}_n(S^n)\big) \ . \qquad \square$$

5.12. Bemerkung. Aussage (3) gilt nicht für allgemeine Homologiefunktoren. Dazu betrachten wir wieder $\pi^s_\bullet$. Es sei $f\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung. Aus Satz 3.101 wissen wir, dass $0 \neq [f] \in \pi^s_3(S^2) = \pi^s_1(S^0)$. Außerdem sei $1 = [\mathrm{id}_{S^n}] \in \pi^s_0(S^0)$. Es folgt

$$f_*(1) = f_*[\mathrm{id}_{S^3}] = [f \circ \mathrm{id}_{S^3}] = [f] \neq 0 \in \pi^s_3(S^2) \cong \mathbb{Z}/2 \ .$$

5.b. Zelluläre Homologie

Wir zeigen, dass sich die (gewöhnliche) Homologie $\tilde{h}_\bullet$ von CW-Komplexen allein aus den Koeffizienten $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ und gewissen Daten der CW-Struktur berechnen lässt. Dieses Ergebnis ist aus mehreren Gründen interessant:

- Es zeigt, dass die Eilenberg-Steenrod-Axiome gewöhnliche Homologiefunktoren auf der Unterkategorie der CW-Komplexe bereits vollständig festlegen, in der Quillen-Modellstruktur also auf ganz $\mathcal{T}_+$;
- Es zeigt auch, dass gewöhnliche Homologiefunktoren mit beliebigen Koeffizienten in $\mathcal{M}od_R$ stets existieren;
- Für einfach konstruierte Räume erhalten wir sehr effizientes Verfahren zur Bestimmung der Homologiegruppen.

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen.

5.13. Proposition. *Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein Homologiefunktor, der das Summenaxiom 5.2 (3) erfüllt, und es sei X ein CW-Komplex mit einer aufsteigenden Folge $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ von Unterkomplexen, so dass $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Für alle k gilt dann*

$$\tilde{h}_k(X) = \mathrm{colim}\, \tilde{h}_k(X_i) \ .$$

Diese Proposition bedeutet allerdings nicht, dass $\tilde{h}_\bullet$ kostetig wäre. Denn dann müsste $\tilde{h}_\bullet$ auch Pushouts in Pushouts überführen. Ein Hindernis dagegen ist der Verbindungshomomorphismus in der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6, und in Satz 5.10 haben wir Beispiele gesehen, in denen letzterer nicht verschwindet.

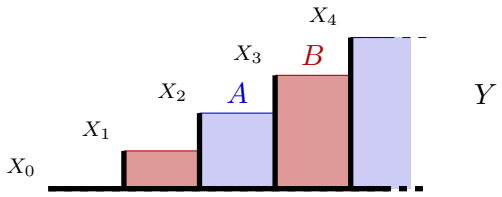


ABBILDUNG 5.1. Das Teleskop einer Folge von CW-Komplexen

BEWEIS. Anstelle von X betrachten wir den CW-Komplex

$$Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([i,i+1]_+ \wedge X_i\big) \subset [0,\infty)_+ \wedge X \ ,$$

siehe Abbildung 5.1. Somit ist Y die Vereinigung der Abbildungszylinder der Inklusionen $\iota_i \colon X_i \to X_{i+1}$. Man nennt diese Konstruktion auch *Abbildungsteleskop,* dabei handelt es sich um einen Spezialfall eines Homotopie-Kolimes. Die Projektion $[0,\infty)_+ \wedge X \to X$ induziert eine Abbildung $r \colon Y \to X$. Analog definieren wir

$$r_n \colon Y_n = \bigcup_{i\le n} \big([i,i+1]_+ \wedge X_i\big) \longrightarrow X_n \ .$$

Dann ist r_n eine Deformationsretraktion, insbesondere eine schwache Äquivalenz.

Als nächstes zeigen wir, dass r eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Jede stetige Abbildung $S^k \to X$ trifft nach Proposition 4.38 nur endlich viele Zellen, und faktorisiert daher über eine der Inklusionen $X_i \to X$. Das gleiche gilt für Homotopien zwischen solchen Abbildungen. Analog faktorisieren Abbildungen $S^k \to Y$ und Homotopien zwischen ihnen über eine der Inklusionen $Y_i \to Y$. Da X_i und Y_i homotopieäquivalent sind, induziert r einen Isomorphismus

$$\pi_k(Y) = \operatorname{colim} \pi_k(Y_i) \xrightarrow{r_*} \operatorname{colim} \pi_k(X_i) = \pi_k(X) \ .$$

Nach dem Satz 4.46 von Whitehead ist r sogar eine Homotopieäquivalenz. Also reicht es, $\tilde h_\bullet(Y)$ zu bestimmen.

Wir schreiben Y als Vereinigung zweier Unterkomplexe

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i,2i+1]_+ \wedge X_{2i}\big) \qquad \text{und} \qquad B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i+1,2i+2]_+ \wedge X_{2i+1}\big) \subset Y \ .$$

Dann erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$A \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i} \ , \qquad B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i+1} \ , \qquad \text{und} \qquad A \cap B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_i \ .$$

Da es sich um Unterkomplexe handelt, sind $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ Kofaserungen, und wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longleftarrow & \tilde h_k(Y) & \longleftarrow & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde h_k(X_{2i}) \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde h_k(X_{2i+1}) & \xleftarrow{\varphi} & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde h_k(X_i) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \| & & \| & & \cong\downarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i \mathrm{id}_{\tilde h_k(X_i)} & & \\
\cdots & \longleftarrow & \tilde h_k(Y) & \longleftarrow & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde h_k(X_i) & \xleftarrow{\psi} & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \tilde h_k(X_i) & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

Der Pfeil φ wird nach Satz 5.6 für alle i gegeben durch

$$\varphi|_{\tilde h_k(X_{2i})} = \mathrm{id}_{\tilde h_k(X_{2i})} - \iota_{2i*} \qquad \text{und} \qquad \varphi|_{\tilde h_k(X_{2i+1})} = \iota_{(2i+1)*} - \mathrm{id}_{\tilde h_k(X_{2i+1})} \ ,$$

also erhalten wir

$$\psi = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \bigl(\mathrm{id}_{\tilde{h}_k(X_i)} - \iota_{i*}\bigr) \ .$$

Sei $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \in \ker\psi$, dann können wir induktiv $\alpha_i = 0 \in \tilde{h}_k(X_i)$ zeigen, also ist ψ injektiv, und die Sequenz zerfällt in lauter kurze exakte Sequenzen. Mit der üblichen Charakterisierung des Kolimes analog zum Beweis von Proposition 4.10 folgt

$$\tilde{h}_k(Y) \cong \bigoplus_i \tilde{h}_k(X_i) \ / \ \mathrm{im}\,\psi \cong \mathrm{colim}\,\tilde{h}_k(X_i) \ . \qquad \square$$

Im folgenden sei $\tilde{h}_\bullet$ stets ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M = \tilde{h}_0(S^0)$ in $\mathcal{M}od_R$. Wir fixieren Homöomorphismen $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ und benutzen die Isomorphismen

$$\partial_n \colon \tilde{h}_n(S^n) \to \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$$

aus dem Beweis von Satz 5.10, um induktiv $\tilde{h}_n(S^n)$ mit $\tilde{h}_0(S^0) = M$ zu identifizieren.

Sei $(X, \{x_0\})$ ein CW-Paar wie in Definition 4.37 mit den n-Gerüsten X^n für $n \geq -1$ und den Indexmengen J^n für die n-Zellen für $n \geq 0$. Insbesondere gilt $X^{-1} = \{x_0\}$ und $X^0 \cong J^0 \sqcup \{x_0\}$. Wir schreiben

$$M^{\oplus J^n} = \bigoplus_{j\in J^n} M \qquad \text{und} \qquad \sum_{j\in J^n} a_j e_j^n = (a_j)_{j\in J^n} \in M^{\oplus J^n} \ ,$$

so dass $a_j = 0$ außer für endlich viele $j \in J^n$.

Es seien $\Phi_j^n \colon (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$ die charakteristischen Abbildungen von X für $j \in J^n$. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen auf den Quotienten mit $\bar{\Phi}_j^n \colon S^n \to X^n/X^{n-1}$.

5.14. Lemma. *Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in $\mathcal{M}od_R$. Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$. Wir erhalten natürliche Isomorphismen*

$$M^{\oplus J^n} \cong \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \qquad \text{mit} \qquad a_j e_j^n \longmapsto \tilde{h}_n \overline{\Phi}_j^n(a_j) \qquad \text{für alle } j \in J^n \ , \tag{1}$$

$$0 \cong \tilde{h}_k\bigl(X^n/X^{n-1}\bigr) \qquad \text{falls } k \neq n \ , \tag{2}$$

$$0 \cong \tilde{h}_k\bigl(X^n\bigr) \qquad \text{falls } k > n \ , \tag{3}$$

$$\text{und} \qquad \tilde{h}_k(X) \cong \tilde{h}_k\bigl(X^n\bigr) \qquad \text{falls } n > k \ . \tag{4}$$

Beweis. Für jedes $n \geq 0$ erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\bigvee_{j\in J^n} S^n \xrightarrow{\bigvee_{j\in J^n} \bar{\Phi}_j^n} X^n/X^{n-1} \ .$$

Die Behauptungen (1) und (2) folgen aus dem Summenaxiom und aus Satz 5.10.

Punkt (3) folgt aus (2) für $n = 0$ und ergibt sich für $n > 0$ induktiv aus der langen exakten Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) aus Axiom (2) und Behauptung (2) für $k > n$, da

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^n/X^{n-1})}_{\cong 0} \longleftarrow \tilde{h}_k(X^n) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n-1})}_{\cong 0} \longleftarrow \cdots$$

Mit (2) und der langen exakten Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) schließen wir, dass $\tilde{h}_k(X^{n+1}) \cong \tilde{h}_k(X^n)$ für $n > k$, denn

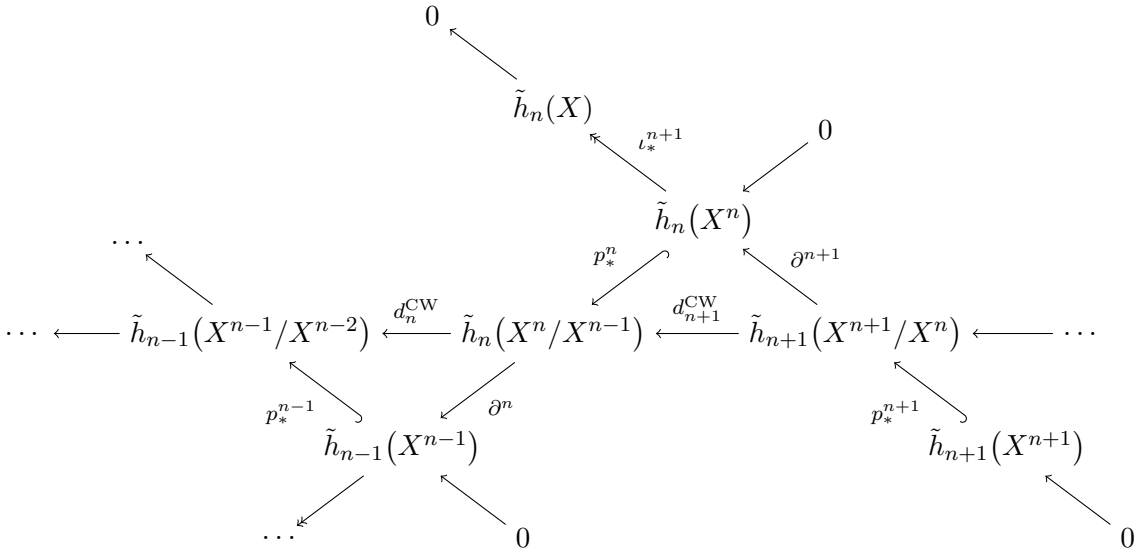
$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \longleftarrow \tilde{h}_k(X^{n+1}) \xleftarrow{\cong} \tilde{h}_k(X^n) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \longleftarrow \cdots$$

Behauptung (4) folgt jetzt aus Proposition 5.13 mit $X_i = X^i$. $\square$

Nach dem obigen Lemma enthält die lange exakte Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) für alle n einen Ausschnitt der Form

$$\underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1})}_{\cong \tilde{h}_n(X)} \xleftarrow{\iota_*^{n+1}} \tilde{h}_n(X^n) \xleftarrow{\partial^{n+1}} \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong M^{\oplus J^{n+1}}} \xleftarrow{p_*^{n+1}} \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^n)}_{\cong 0} .$$

Wir definieren $d_n^{\mathrm{CW}} = p_*^{n-1} \circ \partial$ und setzen diese Ausschnitte zu einem kommutativen Diagramm



zusammen. Indem wir die Exaktheit der Diagonalen ausnutzen, erhalten wir eine Kette natürlicher Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_n(X) &\cong \tilde{h}_n(X^n) / \operatorname{im} \partial^{n+1} && \text{da } \iota_*^{n+1} \text{ surjektiv ist,} \\
&\cong \operatorname{im} p_*^n / \operatorname{im}(p_*^n \circ \partial^{n+1}) && \text{da } p_*^n \text{ injektiv ist,} \\
&= \ker \partial^n / \operatorname{im} d_{n+1}^{\mathrm{CW}} && \text{da } \operatorname{im} p_*^n = \ker \partial^n, \\
&= \ker d_n^{\mathrm{CW}} / \operatorname{im} d_{n+1}^{\mathrm{CW}} && \text{da } p_*^{n-1} \text{ injektiv ist.}
\end{aligned}$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist wohldefiniert, da $\operatorname{im} d_{n+1}^{\mathrm{CW}} \subset \ker d_n^{\mathrm{CW}}$, oder äquivalent

$$d_n^{\mathrm{CW}} \circ d_{n+1}^{\mathrm{CW}} = p_*^{n-1} \circ (\partial^n \circ p_*^n) \circ \partial^{n+1} = 0 .$$

Mit unser Definition $X^{-1} = \{x_0\}$ funktioniert dieses Argument für alle $n \geq 0$.

Wir erinnern uns an Definition 3.17 von Sequenzen und Sequenzabbildungen.

5.15. Definition. Ein *(Ketten-)Komplex* $(C_\bullet, d_\bullet)$ *über* R ist eine Sequenz $(d_n \colon C_n \to C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ von R-Moduln, so dass

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \colon C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert R-Moduln

$$\begin{gathered}
B_n(C_\bullet, d_\bullet) = \operatorname{im} d_{n+1} \quad \subset \quad Z_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n \quad \subset \quad C_n \\
\text{und} \qquad H_n(C_\bullet, d_\bullet) = Z_n(C_\bullet, d_\bullet) / B_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} .
\end{gathered}$$

Elemente von C_n, $Z_n(C_\bullet, d_\bullet)$ und $B_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißen *n-Ketten*, *n-Zykel* beziehungsweise *n-Ränder* des Komplexes. Der R-Modul $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißt n-te *Homologie* des Komplexes und seine Elemente n-te *Homologieklassen.*

Eine *Kettenabbildung* $f_\bullet\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ vom Grad a ist eine Sequenzabbildung vom Grad a. Die induzierten Abbildungen zwischen den Homologien bezeichnet man mit

$$H_n f_\bullet = f_*\colon H_n(C_\bullet, d_\bullet) \to H_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet)\ .$$

Man überlegt sich leicht, dass sich jede Kettenabbildung $f_\bullet\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ zu Abbildungen

$$Z_n(C_\bullet, d_\bullet) \to Z_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet) \qquad \text{und} \qquad B_n(C_\bullet, d_\bullet) \to B_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

einschränken lässt, so dass die Abbildung f_* tatsächlich wohldefiniert ist. Die Kettenkomplexe über R bilden eine Kategorie $\mathcal{C}h_R$ mit den Kettenabbildungen vom Grad 0 als Morphismen, und die n-te Homologie ist ein Funktor $H_n\colon \mathcal{C}h_R \to \mathcal{M}od_R$. Tatsächlich existiert eine Modellstruktur auf $\mathcal{C}h_R$, so dass $H_\bullet$ die Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 (1)–(3) erfüllt.

5.16. Bemerkung. Die volle Unterkategorie der Kettenkomplexe $(C_\bullet, d_\bullet)$ mit $d_\bullet = 0$ wird auch als Kategorie $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ der graduierten R-Moduln bezeichnet; speziell sei $\mathcal{G}r\mathcal{A}b$ die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Homologie ist ein Funktor $H_\bullet\colon \mathcal{C}h_R \to \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$. Er ist *graduiert,* das heißt für alle Kettenabbildungen $f_\bullet$ gilt $\deg f_* = \deg f_\bullet$. Zur Illustration dieser Konzepte sei Übung 5.82 empfohlen.

Wir verwenden im Folgenden Kleinbuchstaben $\tilde{h}$ für (reduzierte) Homologiefunktoren im Sinne der Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 und Großbuchstaben für die Homologie von Kettenkomplexen.

Nach unseren obigen Überlegungen ist $\tilde{h}_k(X)$ zur Homologie eines Kettenkomplexes $(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet, d^{\mathrm{CW}}_\bullet)$ isomorph. Wir identifizieren $\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_n(X; M) = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$ mit $M^{\oplus J^n}$ wie in Lemma 5.14 (1). Als nächstes suchen wir eine explizite Formel für den Randoperator $d^{\mathrm{CW}}_n\colon M^{\oplus J^n} \to M^{\oplus J^{n-1}}$. Wir betrachten dazu für $j \in J^n$ die Projektionsabbildung

$$q^n_j\colon X^n/X^{n-1} \longrightarrow X^n \Big/ \Big(X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in J^n \setminus \{j\}} e^n_i\Big) \xrightarrow{(\overline{\Phi}^n_j)^{-1}} S^n\ .$$

Dann gilt

$$q^n_j \circ \overline{\Phi}^n_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{S^n} & \text{falls } i = j \in J^n\ , \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j\ , \end{cases}$$

und für $\sum_{i\in J^n} a_i e^n_i \in M^{\oplus J^n} = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$ folgt

$$(q^n_j)_* \sum_{i\in J^n} a_i e^n_i = \sum_{i\in J^n} \big(q^n_j \circ \overline{\Phi}^n_i\big)_*(a_i) = a_j \in \tilde{h}_n(S^n) \cong M\ .$$

Wir betrachten die Paarabbildungen $\Phi^n_i\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$, definieren

$$\partial^n_{ji} = q^{n-1}_j \circ p^{n-1} \circ \bar{\varphi}^n_i\colon S^{n-1} \to S^{n-1} \tag{5.1}$$

für alle $i \in J^n$, $j \in J^{n-1}$, und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{(\partial^n_{ij})_*} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow[\cong]{\partial^n} & \tilde{h}_n(S^n) \\
\uparrow{\scriptstyle (q^{n-1}_j)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi^n_i)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\bar{\Phi}^n_i)_*} \\
\tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{p^{n-1}_*} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow{\partial^n} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})\ .
\end{array}$$

Dabei kommutiert das rechte Quadrat wegen der Natürlichkeit von ∂_n, und das linke nach Definition von ∂^n_{ji}. Nach Satz 5.11 (2) operiert $(\partial^n_{ji})_*$ auf $M = \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad $d^n_{ij} = \deg \partial^n_{ji}$.

Insgesamt wird der zelluläre Randoperator d^{CW}_n für $n \geq 2$ also durch die ganzzahlige Matrix

$$d^{\mathrm{CW}}_n = (d^n_{ji})_{j,i} \in M_{J^{n-1}, J^n}(\mathbb{Z})$$

beschrieben. Die Koeffizienten d^n_{ji} dieser Matrix heißen auch die *Inzidenzzahlen* von X. Man beachte, dass S^{n-1} kompakt ist und φ^n_i nach Proposition 4.38 daher nur endlich viele Zellen e^{n-1}_j trifft, so dass $e^n_i \in M \cong \operatorname{im}(\tilde{h}_n \overline{\Phi}^n_i)$ auf eine endliche Linearkombination, also ein Element der direkten Summe $M^{\oplus J^{n-1}}$ abgebildet wird. Man beachte auch, dass der reduzierte Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ in dieser Beschreibung des reduzierten zellulären Kettenkomplexes überhaupt nicht mehr auftaucht, sondern nur noch seine Koeffizienten M. Das liegt an Folgerung 3.46 aus dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf, sowie an den Sätzen 5.10 und 5.11.

5.17. Definition. Es sei X ein CW-Komplex und M ein R-Modul. Der *reduzierte zelluläre Kettenkomplex* von X mit Koeffizienten M ist definiert als $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;M), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big)$ mit $\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_n = M^{\oplus J^n}$ und

$$d^{\mathrm{CW}}_n \sum_{i\in J^n} a_i e^n_i = \sum_{j\in J^{n-1}} \sum_{i\in J^n} \deg(q^{n-1}_j \circ p^{n-1} \circ \bar{\varphi}^n_i)\, a_i\, e^{n-1}_j = \sum_{j\in J^{n-1}} \sum_{i\in J^n} d^n_{ji} a_i \cdot e^{n-1}_j \ .$$

Die Homologie $\tilde{H}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;M) = H_\bullet\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;M), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big)$ dieses Komplexes heißt die *reduzierte zelluläre Homologie* von X mit Koeffizienten in M.

Wir erinnern uns an die Kategorie $\mathcal{CW}_+$ der punktierten CW-Komplexe mit punktierten zellulären Abbildungen aus Definition 4.42. Es sei Y ein CW-Komplex mit $\tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) = M^{\oplus K^n}$. Eine zelluläre Abbildung $f\colon X \to Y$ induziert Abbildungen $\bar{f}^n\colon X^n/X^{n-1} \to Y^n/Y^{n-1}$, also auch Abbildungen $f_{\#n} = \bar{f}^n_*\colon M^{\oplus J^n} \to M^{\oplus K^n}$ für alle n. Mit einem ähnlichen Argument wie oben sieht man, dass

$$f_{\#n} \sum_{j\in J^n} a_j e^n_j = \sum_{j\in J^n} \sum_{k\in K^n} \deg\big(q^n_k \circ \bar{f}^n \circ \overline{\Phi}^n_j\big)\, a_j e^n_k \ .$$

Die Familie $f_{\#\bullet}$ ist eine Kettenabbildung vom Grad 0, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{p^{n-1}_*} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \\
\downarrow{\scriptstyle \bar{f}^{n-1}_*} & & \downarrow{\scriptstyle f^{n-1}_*} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}^n_*} \\
\tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}/Y^{n-2}) & \xleftarrow{p^{n-1}_*} & \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1})
\end{array}$$

kommutiert. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen mit

$$f^{\mathrm{CW}}_* = \tilde{H}^{\mathrm{CW}} f_n\colon \tilde{H}^{\mathrm{CW}}_n(X;M) \to \tilde{H}^{\mathrm{CW}}_n(Y;M) \ .$$

5.18. Satz (Zelluläre Homologie, Eindeutigkeit). *Sei M ein R-Modul und $n \in \mathbb{Z}$.*

(1) *Die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten M ist ein Funktor auf der Kategorie $\mathcal{CW}_+$ der punktierten CW-Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.*
(2) *Für jeden gewöhnlichen reduzierten Homologiefunktor $\tilde{h}_n$ mit Koeffizienten M existiert ein natürlicher Isomorphismus $\tilde{h}_n|_{\mathcal{CW}_+} \to \tilde{H}^{\mathrm{CW}}_n(\,\cdot\,;M)$.*

Beweis. Wir haben zu jedem CW-Komplex X einen graduierten Modul $H^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;M)$ und zu jeder zellulären Abbildung $f\colon X \to Y$ eine induzierte Abbildung $f^{\mathrm{CW}}_*\colon \tilde{H}^{\mathrm{CW}}_n(X;M) \to \tilde{H}^{\mathrm{CW}}_n(Y;M)$ konstruiert. Um Funktorialität unabhängig von der Existenz eines Homologiefunktors $\tilde{h}$ zu zeigen, betrachten wir zelluläre Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$. Seien Φ^n_k und Ψ^n_j die charakteristischen Abbildungen von X beziehungsweise Y, und q^n_j und r^n_i die entsprechenden Kollaps-Abbildungen von Y beziehungsweise Z.

Die Verkettung von f^{CW}_* und g^{CW}_* wird durch das Matrixprodukt

$$\big(\deg(r^n_i \circ g \circ \overline{\Psi}^n_j)\big)_{ij} \cdot \big(\deg(q^n_j \circ f \circ \overline{\Phi}^n_k)\big)_{jk}$$

beschrieben, während zu $(g \circ f)_*^{\mathrm{CW}}$ die Matrix

$$\big(\deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n)\big)_{ik}$$

gehört. Funktorialität folgt, denn man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned}\sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \overline{\Psi}_j^n) \cdot \deg(q_j^n \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n) &= \sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \overline{\Psi}_j^n \circ q_j^n \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n) \\ &= \deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \overline{\Phi}_k^n)\ .\end{aligned}$$

Sei jetzt $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M. Wir haben oben Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(X) \longleftarrow \tilde{h}_n\big(X^n\big)\big/ \operatorname{im} \partial_{n+1} \longrightarrow \operatorname{im} \tilde{h}_n p^n \big/ \operatorname{im}\big(\tilde{h}_n p^n \circ \partial_{n+1}\big) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$$

konstruiert, die alle von natürlichen Abbildungen zwischen Homologiemoduln induziert werden. Also ist auch der zusammengesetzte Isomorphismus $\tilde{h}_n(X) \to \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$ natürlich, und es folgt (2). □

5.19. Bemerkung. Wir können uns zelluläre Homologie wie folgt vorstellen. Jede n-Zelle ist ein n-dimensionales Objekt in X mit einem $(n-1)$-dimensionalen Rand, und Ketten $c \in \tilde{C}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$ sind M-Linearkombinationen davon. Den Rand $d_n^{\mathrm{CW}} c$ einer solchen Kette c in X^{n-1}/X^{n-2} schreiben wir wieder als M-Linearkombination von $(n-1)$-Zellen. Dabei vergessen wir, wie die einzelnen Zellen an die kleineren Skelette X^{n-2} angeklebt sind. Die Koeffizienten von $d_n^{\mathrm{CW}} c$ sind Abbildungsgrade von Abbildungen wie in (5.1). Sie hängen von einer Art „Orientierung“ab, siehe Folgerung 3.91.

Ketten c mit Rand $d_n^{\mathrm{CW}} c = 0$ heißen Zykel. Wir stellen sie uns als „geschlossene“ n-dimensionale Objekte in X vor. Jeder Zykel repräsentiert ein „Loch“ in X^n. Wenn dieses Loch in X^{n+1} von einer Kette $b \in C_{n+1}^{\mathrm{CW}}(X; M)$ „gestopft“ wird, das heißt, wenn $c = d_{n+1}^{\mathrm{CW}} b$, vergessen wir es. Alle anderen Löcher bleiben nach Lemma 5.14 (4) dann auch in X „ungestopft“. Somit dürfen wir uns $\tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X; M)$ als Menge der M-Linearkombinationen von Löchern in X vorstellen. Man vergleiche das mit der Beschreibung des gerahmten Bordismus in Bemerkung 3.98.

Ein Beispiel ist das Loch in der Mitte der n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, das sich nach den Sätzen 5.10 und 5.18 dadurch manifestiert, dass $H_n^{\mathrm{CW}}(S^n) \cong M$. Wir sehen dieses Loch „mit bloßem Auge“, wenn wir S^n in den $\mathbb{R}^{n+1}$ einbetten, während die Homologie es immer findet.

5.20. Beispiel. Die reduzierte zelluläre Homologie lässt sich besonders einfach berechnen, wenn der zelluläre Randoperator d_n^{CW} für alle $n \in \mathbb{Z}$ verschwindet. Das passiert etwa dann, wenn X keine Zellen in aufeinanderfolgenden Dimensionen hat. Ein Beispiel sind die komplex und quaternionisch projektiven Räume aus den Übungen 1.167 und 1.168, siehe Übung 5.75.

5.21. Beispiel. Wir betrachten jetzt den reell projektiven Raum $X = \mathbb{R}P^n$ mit der CW-Struktur aus Übung 1.168. Dann existiert neben $\{x_0\} = \mathbb{R}P^0$ genau eine Zelle e^k in jeder Dimension $1 \le k \le n$, und die Verklebeabbildung ist die Projektion

$$\varphi^k \colon S^{n-1} \to X^{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1} = S^{n-1}/\{1, -1\}\ .$$

Dabei wird der Äquator S^{k-2} gerade auf den Unterkomplex $X^{k-2} = \mathbb{R}P^{k-2}$ abgebildet. Ähnlich wie bei der Konstruktion der „Summe“ stetiger Abbildungen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^{k-1} & \longrightarrow & S^{k-1}/S^{k-2} & \xrightarrow{\cong} & S^{k-1} \vee S^{k-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^k} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_+^k \vee \varphi_-^k} \\ \mathbb{R}P^{k-1} & \xrightarrow{p^{k-1}} & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} & \xrightarrow[\cong]{q^{k-1}} & S^{k-1}\ . \end{array}$$

Also gilt $[q^{k-1} \circ \varphi^k] = [\varphi^k_+] + [\varphi^k_-] \in \pi_{k-1}(\mathbb{R}P^{k-1})$; hierbei werden $\varphi^k_\pm \colon S^{k-1} \to S^{k-1}$ durch die Einschränkung von $q^{k-1} \circ \varphi^k$ auf je eine der beiden Halbkugeln induziert. Da $\varphi^k_- = \varphi^k_+ \circ (-\mathrm{id})$ nach Konstruktion, folgt aus Beispiel 3.47 bei geeigneter Wahl der Verklebeabbildungen, dass

$$d^{\mathrm{CW}}_k = \deg\bigl(q^{k-1} \circ \varphi^k\bigr) = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

(1) Wir wählen $\mathbb{Z}$ in der Kategorie $\mathcal{A}b \cong \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ als Koeffizienten. Für gerade n und erhalten wir in den Graden 0 bis n den reduzierten zellulären Kettenkomplex

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z}$$

für ungerade n hingegen

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}\,,$$

und daher

$$\tilde{H}^{\mathrm{CW}}_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier taucht gelegentlich der Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf. Im Sinne von Bemerkung 5.19 beschreibt das Element $0 \neq c \in \tilde{H}^{\mathrm{CW}}_k(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein „Loch“ in $\mathbb{R}P^k$, das in $\mathbb{R}P^{k+1}$ nicht gestopft wird; erst das zweimal umlaufene Loch $2c$ tritt als Rand einer $(k+1)$-Kette auf.

(2) Wir bleiben in der Kategorie $\mathcal{A}b$ und wählen $\mathbb{Z}/2$ als Koeffizienten. Da $2 \equiv 0$ in $\mathbb{Z}/2$, verschwindet der Randoperator komplett, und wir erhalten

$$\tilde{H}^{\mathrm{CW}}_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten in der Kategorie $\mathcal{V}ec_{\mathbb{Z}/2}$. Wir sehen also modulo 2 mehr „Löcher“ als über $\mathbb{Z}$.

(3) Es sei jetzt $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Dann ist Multiplikation mit 2 invertierbar. Sowohl in der Kategorie $\mathcal{A}b$ als auch in $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ erhalten wir daher nur noch

$$\tilde{H}^{\mathrm{CW}}_k(\mathbb{R}P^n;\Bbbk) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen zelluläre Homologie zu einem Homologiefunktor machen. Dazu müssen wir die Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 zeigen. Das Summenaxiom (3) und das Dimensionsaxiom (4) sind leicht zu überprüfen. Zur Homotopieinvarianz (1) und zur langen exakten Sequenz (2) skizzieren wir die Beweise nur, da wir später eine andere Konstruktion für beliebige Homologiefunktoren genauer betrachten wollen.

5.22. Definition. Seien $f_\bullet, g_\bullet \colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (E_\bullet, e_\bullet)$ zwei Kettenabbildungen vom Grad a. Eine *Kettenhomotopie* $h_\bullet \colon f_\bullet \sim g_\bullet$ zwischen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ ist eine Familie von Abbildungen $h_k \colon C_k \to E_{k+a+1}$, so dass

$$g_k - f_k = h_{k-1} \circ d_k + e_{k+a+1} \circ h_k \colon C_k \to E_{k+a}\,.$$

Falls eine solche Kettenhomotopie existiert, heißen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ *kettenhomotop.*

5.23. Proposition. *Seien $f_\bullet, g_\bullet \colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (E_\bullet, e_\bullet)$ zwei Kettenabbildungen vom Grad a. Wenn eine Kettenhomotopie $h_\bullet \colon f_\bullet \sim g_\bullet$ existiert, dann induzieren $f_\bullet$ und $g_\bullet$ die gleiche Abbildung*

$$f_* = g_* \colon H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet) \to H_\bullet(E_\bullet, e_\bullet)\,.$$

BEWEIS. Für alle Zykel $c \in Z_k \subset C_k$ erhalten wir einen Rand

$$g_k(c) - f_k(c) = h_{k-1}(\underbrace{d_k(c)}_{=0}) + e_{k+a+1}(h_k(c)) \; . \qquad \square$$

Man überprüft außerdem leicht, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation auf Kettenabbildungen definiert, die mit der Verkettung von Kettenabbildungen verträglich ist, siehe Übung 5.77. In Analogie zur Homotopiekategorie topologischer Räume können wir daher eine naive Homotopiekategorie $\mathcal{HC}h_R$ von Kettenkomplexen über R definieren.

Eine zelluläre Homotopie induziert stets eine Kettenhomotopie zwischen den zugehörigen zellulären Kettenkomplexen, siehe Übung 5.78. Somit ist zelluläre Homologie in $\mathcal{CW}_+$ zellulär homotopieinvariant.

5.24. BEMERKUNG. In Analogie zu den schwachen Äquivalenzen aus Definition 4.45 definiert man schwache Äquivalenzen in der Kategorie $\mathcal{C}h_R$ als Kettenabbildungen, die Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induzieren. Es gibt dazu passende Modellstrukturen auf $\mathcal{C}h_R$. Außerdem kann man Kettenhomotopie in diesem Sinne als Links- oder als Rechtshomotopie auffassen, siehe Übungen 5.79 und 5.80. Diese Konstruktionen bilden die Grundlage für die sogenannte *derivierte Kategorie* $\mathrm{Ho}\mathcal{C}h_R$ in der homologischen Algebra (die allerdings nicht zu $\mathcal{HC}h_R$ äquivalent ist).

Es sei jetzt X ein CW-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann ist auch $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A; M)$ ein *Unterkettenkomplex* von $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M)$, das heißt, es gilt $\tilde{C}_k^{\mathrm{CW}}(A; M) \subset \tilde{C}_k^{\mathrm{CW}}(X; M)$ für alle k, und die Inklusion ist mit den Differentialen $d_\bullet^{\mathrm{CW}}$ verträglich; das ergibt sich unmittelbar aus der obigen Konstruktion. Dann können wir den *Quotienten* $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M)/\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A; M)$ mit dem induzierten Differential betrachten, und erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M)/\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A; M), \bar{d}_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \longleftarrow \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \longleftarrow \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A; M), e_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \longleftarrow 0$$

von Kettenkomplexen. Man überprüft leicht, dass $\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; M)/\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(A; M)$ gerade der zelluläre Kettenkomplex des Quotienten X/A ist, siehe Übung 5.84. Das folgende Lemma liefert uns dann die gesuchte lange exakte Sequenz aus Axiom (3).

5.25. LEMMA (Schlangen-). *Es seien $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ und $(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ Kettenkomplexe über R und $f_\bullet \colon (C'_\bullet, \partial'_\bullet) \to (C_\bullet, \partial_\bullet)$ und $g_\bullet \colon (C_\bullet, \partial_\bullet) \to (C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ seien Kettenabbildungen, so dass für alle k die Sequenz*

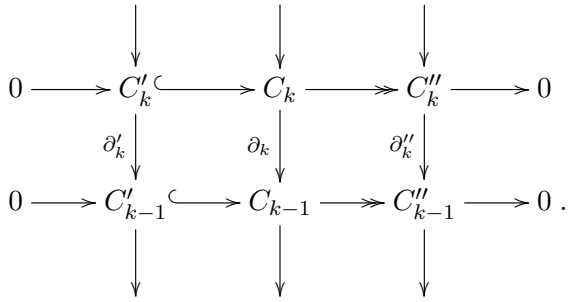
$$0 \longrightarrow C'_k \xhookrightarrow{f_\bullet} C_k \xrightarrow{g_\bullet} C''_k \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann existiert eine Folge natürlicher Transformationen $d_k \colon H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \to H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$, so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\cdots \longrightarrow H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{g_*} H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_{k-1}(C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

In gewissem Sinne entspricht die hier konstruierte Sequenz einer Faser- oder Kofasersequenz, ausgehend von einer „Faserung“ $g_\bullet$ oder einer „Kofaserung“ $f_\bullet$ in $\mathcal{C}h_R$ (nach Wahl einer passenden Modellstruktur), genauer entspricht sie den langen exakten Sequenzen 4.67 (3) beziehungsweise 4.72 (3). Insbesondere sollten wir hier eigentlich entsprechende Vorzeichen verwenden, siehe auch die Anmerkungen nach Definition 5.2.

BEWEIS. Dieser Beweis ist eine Diagrammjagd im Diagramm



Um das Bild von $[c''_k] \in H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ zu bestimmen, wählen wir zunächst ein Urbild $c_k \in C_k$ von c''_k, dann bildet $\partial_k c_k$ auf $0 \in C''_{k-1}$ ab, also erhalten wir ein Urbild $c'_{k-1} \in C'_{k-1}$ von $\partial_k c_k$. Wir setzen $d_k[c''_k] = [c'_{k-1}]$ und lassen den Rest als Übung 5.81. □

Der Name des Lemmas ergibt sich, wenn man im obigen Diagramm an die Stelle der Komplexe ihre Homologien einträgt und die Verbindungshomomorphismen mit einzeichnet. Wir nennen die im Lemma konstruierten natürlichen Transformationen d_k auch *Verbindungshomomorphismen.*

5.26. SATZ (Zelluläre Homologie; Existenz). *Sei M ein R-Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten M ein $\mathcal{M}od_R$-wertiger Homologiefunktor $\tilde{H}_\bullet^{\mathrm{CW}}(\,\cdot\,; M)$ auf der Kategorie $\mathcal{CW}_+$ der punktierten CW-Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.*

BEWEIS. Der Funktor ist CW-homotopieinvariant nach Proposition 5.23, und mit Hilfe des Schlangenlemmas 5.25 erhalten wir die Homologiesequenz für Paare von CW-Komplexen. Das Summen- und das Dimensionsaxiom ergeben sich leicht aus der Konstruktion. □

5.27. FOLGERUNG. *Zu jedem R-Modul M gibt es gewöhnliche reduzierte Homologiefunktoren mit Koeffizienten M auf den Kategorien $k\mathcal{T}op$ und $kw\mathcal{H}$ und ihren punktierten Versionen, und zwar sowohl bezüglich der Quillen- als auch bezüglich der Strøm-Modellstruktur.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{T} = k\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$. Wie in Bemerkung 5.5 (1) und (3) können wir auch zelluläre Homologie auf der unpunktierten CW-Kategorie $\mathcal{CW}$ definieren. Aufgrund von Homotopieinvarianz faktorisiert $H_\bullet^{\mathrm{CW}}$ über die Homotopiekategorie $\mathcal{HCW}$, die nach Beispiel 4.64 (3) zur Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{T}$ der Quillen-Modellstruktur äquivalent ist. Also erhalten wir den gesuchten Homologiefunktor für die Quillen-Modellstruktur als Verkettung

$$\tilde{h}_\bullet \colon \mathcal{T} \xrightarrow{\mathrm{Ho}} \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+ \xleftarrow{\cong} \mathcal{HCW} \xrightarrow{H_\bullet^{\mathrm{CW}}} \mathcal{G}r\mathcal{M}od_R\,.$$

Analog verfahren wir im punktierten Fall. Der Funktor $\tilde{h}_\bullet$ ist invariant unter schwachen Äquivalenzen, also insbesondere unter Homotopieäquivalenzen. Somit ist er ebenfalls ein Homologiefunktor für die Ström-Modellstruktur. □

5.28. BEMERKUNG. Wir übertragen Bemerkung 5.5 auf die zelluläre Homologie.

(1) Wir betrachten den reduzierten zellulären Randoperator in Grad 1 etwas näher. Sei $j \in J^1$ und $i \in J^0 = X^0 \setminus \{x_0\}$, und sei $S^0 = \{1, -1\}$ mit Basispunkt 1. Dann erhalten wir die Matrixkoeffizienten

$$d^1_{ij} = \deg(q^0_i \circ \varphi^1_j) = \sum_{s \in (\varphi^1_j)^{-1}(i)} s \quad \in \quad \{-1, 0, 1\}\,,$$

wobei wir hier i als Punkt in $X^0 \setminus \{x_0\}$ verstehen.

(2) Wir definieren den *unreduzierten zellulären Kettenkomplex* $C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) = \tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X_+;M)$. In der obigen Formel für d_{ij}^1 erlauben wir jetzt $i \in X^0$. Die *unreduzierte zelluläre Homologie* bezeichnen wir mit

$$H_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) = H_\bullet(C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M); d_\bullet^{\mathrm{CW}}) = \tilde{H}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X_+;M) \ .$$

In Analogie zu Bemerkung 5.5 erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) \cong \tilde{H}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) \oplus M \ .$$

Die linke Seite ist unabhängig vom Basispunkt x_0 und funktoriell in X in $\mathcal{T}$. Allerdings hängen die rechte Seite und der Isomorphismus von der Wahl von x_0 ab, siehe Übung 5.72. Aus dem Dimensionsaxiom 5.2 (4) folgt $H_n^{\mathrm{CW}}(X;M) \cong \tilde{H}_n^{\mathrm{CW}}(X;M)$ für alle $n \neq 0$.

(3) Wir definieren den *augmentierten zellulären Kettenkomplex* $\big(\bar{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M), \bar{d}_\bullet^{\mathrm{CW}}\big)$, indem wir die Abbildung $q_\#\colon C_0^{\mathrm{CW}}(X;M) \to C_0^{\mathrm{CW}}(\{x_0\};M) = M$ in den unreduzierten Kettenkomplex mit einbauen. Das heißt, wir setzen

$$\bar{C}_n^{\mathrm{CW}}(X;M) = \begin{cases} C_n^{\mathrm{CW}}(X;M) & \text{falls } n \neq -1, \text{ und} \\ C_0^{\mathrm{CW}}(\{x_0\};M) = M & \text{falls } n = -1, \end{cases}$$

$$\text{und} \qquad \bar{d}_n^{\mathrm{CW}} = \begin{cases} d_n^{\mathrm{CW}} & \text{falls } n \neq 0, \text{ und} \\ q_\#\colon C_0^{\mathrm{CW}}(X;M) \to M & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Die Abbildung $\bar{d}_0^{\mathrm{CW}} = q_\#$ heißt *Augmentierung* und wird auch mit ε bezeichnet. Aus der Konstruktion ergibt sich ein natürlicher Isomorphismus

$$H_\bullet\big(\bar{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M), \bar{d}_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \cong \ker\big(q_*\colon H_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) \to H_\bullet^{\mathrm{CW}}(\{x_0\};M)\big) \cong \tilde{H}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) \ ,$$

der wieder vom Basispunkt x_0 abhängt.

Da der augmentierte Kettenkomplex die gleiche Homologie wie der reduzierte Kettenkomplex liefert, aber keine Basispunkte benötigt, definiert man die reduzierte zelluläre Homologie später lieber als die Homologie des augmentierten Kettenkomplexes.

5.29. Bemerkung. Es gibt eine besonders elegante und vor allem funktorielle Möglichkeit, jedem topologischen Raum X eine CW-Approximation zuzuordnen. Dazu betrachten wir den sogenannten *singulären* (*simplizialen*) *Komplex* von X. Zu jeder stetigen Abbildung $\sigma\colon \Delta^k \to X$ vom Standardsimplex $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ nach X betrachten wir eine k-Zelle in der Form eines Simplex, und wir kleben jede Seite dieses Simplexes an den $(k-1)$-Simplex, der der Einschränkung von σ auf die jeweilige Seite entspricht. Dann lassen sich diese Abbildungen zu einer Abbildung von einem (zugegeben sehr großen) CW-Komplex $|\mathrm{sing}_\bullet X|$ nach X verkleben, und man kann zeigen, dass es sich dabei um eine schwache Homotopieäquivalenz handelt. Tatsächlich ist diese Abbildung gerade die Koeinheit der Adjunktion $|\cdot| \dashv \mathrm{sing}_\bullet$ zwischen der geometrischen Realisierung und dem singulären Simplizialkomplex. Wir können jetzt also *singuläre Homologie* definieren als

$$H_\bullet(X;M) = H_\bullet^{\mathrm{CW}}(|\mathrm{sing}_\bullet X|\,;M) \ .$$

Der Vorteil gegenüber der CW-Approximation nach Satz 4.51 besteht darin, dass wir oben keine Wahlen in Abhängigkeit von X getroffen haben. Für die reduzierte Homologie verwenden wir den augmentierten Komplex aus Bemerkung 5.28 (3).

5.30. Definition. Es sei $\Bbbk$ ein Körper, $h_\bullet$ ein unreduzierter gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten $\Bbbk$ und X ein topologischer Raum, dann heißen die Dimensionen $b_k(X;\Bbbk) = \dim_\Bbbk h_k(X) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der Homologie-Vektorräume von X die *Betti-Zahlen* von X über $\Bbbk$. Falls alle

Betti-Zahlen endlich sind und fast alle verschwinden, ist die *Euler-Zahl* oder *Euler-Charakteristik* von X definiert als

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k(X;\Bbbk) \ .$$

Die Betti-Zahlen von X hängen im allgemeinen vom gewählten Homologiefunktor $h_\bullet$ ab. Nach Satz 5.18 hängen sie nur von $\Bbbk$ ab, genauer von seiner Charakteristik, wenn X ein CW-Komplex ist. Aber selbst für CW-Komplexe können verschiedene Körper unterschiedliche Betti-Zahlen liefern, siehe Beispiel 5.21. Die Euler-Zahl hängt zumindest für kompakte CW-Komplexe nicht von $\Bbbk$ ab, wie der folgende Satz zeigt. Dazu beachten wir, dass CW-Komplexe nach Satz 1.112 genau dann kompakt sind, wenn sie insgesamt nur aus endlich vielen Zellen bestehen.

5.31. Satz. *Sei $\Bbbk$ ein Körper und $X = X^n$ ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension k, und sei $c_k(X) = \#I^k < \infty$ die Anzahl der k-Zellen. Für alle m gilt*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} c_k(X) \geq \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} b_k(X,\Bbbk) \ , \tag{1}$$

$$c_m(X) \geq b_m(X,\Bbbk) \ , \tag{2}$$

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k c_k(X) \qquad \textit{falls } X \textit{ kompakt ist.} \tag{3}$$

Beweis. Man leitet (1) aus den Dimensionsformeln für $\Bbbk$-Vektorräume ab. Sei etwa $U \subset V$ ein Untervektorraum und $f\colon V \to W$ linear, dann gilt

$$\dim_\Bbbk U + \dim_\Bbbk (V/U) = \dim_\Bbbk V \qquad \text{und} \qquad \dim_\Bbbk V = \dim_\Bbbk \ker f + \dim_\Bbbk \operatorname{im} f \ .$$

Die Ungleichungen (2) und die Gleichung (3) folgen aus (1). Die Details sind Übung 5.83. □

5.32. Beispiel. Für die 2-Sphäre erhalten wir $\chi(S^2) = 2$, da die übliche CW-Struktur nur aus einer 0- und einer 2-Zelle besteht. Die Oberfläche eines konvexen Polyeders im $\mathbb{R}^3$ liefert eine andere CW-Struktur X auf S^2 mit $e = c_0(X)$ „Ecken“, $k = c_1(X)$ „Kanten“ und $f = c_2(X)$ „Flächen“. Wir erhalten den *Eulerschen Polyedersatz*

$$2 = e - k + f \ .$$

5.c. Homologiefunktoren und Spektren

Wir haben im letzten Abschnitten gesehen, dass gewöhnliche Homologiefunktoren auf CW-Komplexen eindeutig bestimmt und (prinzipiell) mittels Kettenkomplexen berechenbar sind. Es bleibt die Existenz solcher Funktoren zu zeigen. In diesem Abschnitt geben wir eine Konstruktion allgemeiner Homologiefunktoren mit Hilfe von Spektren an. Ausgangspunkt hierfür ist Folgerung 5.3, wonach stabile Homotopiegruppen einen reduzierten Homologiefunktor bilden.

5.33. Bemerkung. Wir erinnern uns das Axiom (1) der Homotopieinvarianz in Definition 5.2. Nach dem Axiom (M4) aus Definition 4.56 erhalten wir zu jedem Raum X einen kofibranten Raum QX und eine triviale Faserung $QX \twoheadrightarrow X$. Aus Homotopieinvarianz folgt $\tilde{h}_\bullet(QX) \cong \tilde{h}_\bullet(X)$, insbesondere ist es egal, ob wir QX tatsächlich funktoriell mit (M4) konstruieren oder „von Hand“. In der Quillen-Modellstruktur wäre die CW-Approximationen aus Satz 4.51 eine solche Konstruktion von Hand.

Wir erinnern uns an die Kofasersequenz

$$\cdots \longleftarrow SA \xleftarrow{-j} X /\!\!/ A \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{f} A$$

einer Inklusion $f\colon A \hookrightarrow X$ gut punktierter Räume aus Satz 4.67. Dabei bezeichne $X/\!\!/A$ den Homotopiequotienten aus Definition 3.71 und $j\colon X/\!\!/A \to SA$ die Quotientenabbildung.

5.34. PROPOSITION. *Es gibt eine Bijektion zwischen allgemeinen Homologiefunktoren* $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ *und Paaren* $(\tilde{h}_\bullet, \sigma_\bullet)$ *aus je einem Funktor* $\tilde{h}_k \colon \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+ \to \mathcal{C}$ *und einem natürlichen Stabilisierungsisomorphismus* $\sigma_k \colon \tilde{h}_k(S\,\cdot) \to \tilde{h}_{k-1}$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$*, so dass Homotopieinvarianz 5.2* (1) *und das Summenaxiom 5.2* (3) *gelten, sowie*

(2') Quotientenaxiom. *Für jede Kofaserung* (X, A) *ist die folgende Sequenz exakt:*

$$\tilde{h}_k(X/A) \longleftarrow \tilde{h}_k(X) \longleftarrow \tilde{h}_k(A)\ .$$

Dabei bezeichnet $\tilde{h}_\bullet$ *in beiden Fällen dieselbe Familie von Funktoren, und für alle Kofaserungen* (X, A) *kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_k(SA) & \xleftarrow{j_*} & \tilde{h}_k(X/\!/A) \\ {\scriptstyle\sigma_k}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial_k} & \tilde{h}_k(X/A)\ . \end{array} \tag{$*$}$$

Eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Familien von Funktoren kommutiert genau dann mit den Randoperatoren $\partial_\bullet$*, wenn sie mit den Stabilisierungsisomorphismen* $\sigma_\bullet$ *kommutiert.*

Wir haben in Satz 5.10 bereits einen natürlichen Stabilisierungshomomorphismus konstruiert. Aus technischen Gründen geben wir hier eine etwas andere Beschreibung. Dabei orientieren wir uns an der Puppe-Sequenz aus Satz 4.67, verwenden aber Vorzeichen, die besser zur langen exakten Homologiesequenz passen.

BEWEIS. Es sei $\tilde{h}_\bullet$ eine Familie von Funktoren und $\sigma_\bullet \colon \tilde{h}_k(S\,\cdot) \to \tilde{h}_{k-1}$ eine Familie natürlicher Transformationen. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longleftarrow & \tilde{h}_k(SX) & \xleftarrow{(Sf)_*} & \tilde{h}_k(SA) & \xleftarrow{j*} & \tilde{h}_k(X/\!/A) & \xleftarrow{\iota*} & \tilde{h}_k(X) & \xleftarrow{f_*} & \tilde{h}_k(A) \\ & & {\scriptstyle\sigma_k}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma_k}\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\downarrow & & \| & & \| \\ \cdots & \longleftarrow & \tilde{h}_{k-1}(X) & \xleftarrow{f*} & \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial_k} & \tilde{h}_k(X/A) & \xleftarrow{p_*} & \tilde{h}_k(X) & \xleftarrow{f_*} & \tilde{h}_k(A)\ . \end{array}$$

Aufgrund von Satz 4.67 ist das Quotientenaxiom (2') äquivalent dazu, dass die obere Zeile für alle Kofaserungen $f \colon A \to X$ exakt ist. Wenn zusätzlich die Stabilisierungsabbildungen Isomorphismen sind, folgt, können wir ∂_k durch (*) definieren und haben Axiom 5.2 (2) bewiesen.

Es sei umgekehrt ein allgemeiner Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ gegeben. Schreibe Zf für den reduzierten Abbildungszylinder $X \cup_A ZA$ der Inklusion $f \colon A \to X$, siehe Definition 3.71. Wir betrachten die Abbildungen von Paaren $j \colon (Zf, A) \to (CA, A)$, bei der X zu einem Punkt zusammengezogen wird, und $(Zf, A) \to (X, A)$, bei der der reduzierte Zylinder ZA auf A gestaucht wird. Wegen der Natürlichkeit von ∂_k erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{h}_{k-1}(CA) & \longleftarrow & \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow[\cong]{\sigma_k=\partial_k} & \tilde{h}_k(SA) & \longleftarrow & \tilde{h}_k(CA) \\ \uparrow & & \| & & {\scriptstyle j_*}\uparrow & & \uparrow \\ \tilde{h}_{k-1}(Zf) & \longleftarrow & \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial_k} & \tilde{h}_k(X/\!/A) & \longleftarrow & \tilde{h}_k(Zf) \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & & \| & & {\scriptstyle\cong}\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\downarrow \\ \tilde{h}_{k-1}(X) & \longleftarrow & \tilde{h}_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial_k} & \tilde{h}_k(X/A) & \longleftarrow & \tilde{h}_k(X)\ . \end{array}$$

Mit Hilfe der oberen Sequenz definieren wir σ_k. Da CA zusammenziehbar ist, ist σ_k ein Isomorphismus. Dann entspricht das mittlere Rechteck gerade (*). Das Quotientenaxiom (2') folgt aus der langen exakten Sequenz 5.2 (2).

Aus den obigen Konstruktionen ergibt sich sofort, dass eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoren genau dann mit $\sigma_\bullet$ verträglich ist, wenn sie mit $\partial_\bullet$ verträglich ist. □

Diese Überlegung vereinfacht die Konstruktion eines allgemeinen Homologiefunktors. Durch Vergleich mit dem Beweis des Freudenthalschen Einhängungssatzes 3.76 sehen wir, dass σ_k für stabile Homotopie $\pi^s_\bullet$ gerade vom Inversen der Einhängung $S\colon \pi_{k-1} \to \pi_k(S\,\cdot)$ induziert wird.

5.35. Lemma. *Es sei $\tilde{h}_\bullet\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{C}$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor, und E ein kofibranter Raum in $\mathcal{T}_+$. Dann definiert $\tilde{h}^E_\bullet(X) = \tilde{h}_\bullet(E \wedge X)$ für alle kofibranten Räume X ebenfalls einen allgemeinen reduzierten Homologiefunktor.*

Wir nutzen hier also bereits Bemerkung 5.33 aus, um nur mit kofibranten Räumen arbeiten zu müssen.

Beweis. Es gilt $S(E \wedge X) \cong E \wedge (SX)$. Somit erbt $\tilde{h}^E_\bullet$ den natürlichen Stabilisierungsisomorphismus σ von $\tilde{h}_\bullet$.

Wenn $f\colon X \to Y$ eine schwache Äquivalenz kofibranter Räume ist, gilt das auch für $\mathrm{id}_E \wedge f\colon E \wedge X \to E \wedge Y$, und aus der Homotopieinvarianz 5.2 (1) von $\tilde{h}_\bullet$ folgt die Homotopieinvarianz des neuen Funktors.

Für eine Kofaserung $A \to X$ ist $E \wedge A \to E \wedge X$ eine Kofaserung, siehe Übung 3.136, und es gilt

$$(E \wedge X)/(E \wedge A) \cong E \wedge (X/A)\ .$$

Also erfüllt $\tilde{h}^E_\bullet$ genau wie $\tilde{h}_\bullet$ das Quotientenaxiom aus Proposition 5.34 (2').

Es sei jetzt $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie gut punktierter Räume. Da $E \wedge \cdot$ linksadjungiert zu $\hom(E, \cdot\,)$ ist, erhalten wir mit Lemma 4.14 einen natürlichen Homöomorphismus

$$\bigvee_{i\in I}(E \wedge X_i) \longrightarrow E \wedge \bigvee_{i\in I} X_i\ .$$

Es folgt das Summenaxiom 5.2 (3) für $\tilde{h}^E_\bullet$ aus dem Summenaxiom für $\tilde{h}_\bullet$, denn

$$\bigoplus_{i\in I} \tilde{h}_n(E \wedge X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\Big(\bigvee_{i\in I}(E \wedge X_i)\Big) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n\Big(E \wedge \bigvee_{i\in I} X_i\Big)\ .$$ □

Wir wären jetzt fertig, wenn wir einen Raum E_0 mit $\pi^s_0(E_0) = M \in \mathcal{A}b$ und $\pi^s_k(E_0) = 0$ für alle $k \neq 0$ angeben könnten. Denn dann würden wir $\tilde{h}_\bullet = \pi^s_\bullet$ wählen und erhielten einen Homologiefunktor mit Koeffizienten

$$\tilde{h}^{E_0}_k(S^0) = \pi^s_k(E_0 \wedge S^0) = \pi^s_k(E_0)\ .$$

Leider geht es aber nicht so einfach. Denn $\pi^s_k(E_0)$ erkennen wir wegen Folgerung 3.80 erst am Raum $S^{k+2}E_0$. Um ein Element von $\pi^s_k(E_0)$ wie im Beweis von Satz 4.51 zu beseitigen, müssten wir also eine $(2k+3)$-Zelle an $S^{k+2}E_0$ ankleben. Den gleichen Effekt können wir in der Regel nicht dadurch erreichen, dass wir E_0 modifizieren.

Wir können stattdessen für $i \geq 2$ einen Raum E_i betrachten mit $\pi_i(E_i) \cong M$ und $\pi_k(E_i) = 0$ für $k \neq i$. Wir verschieben die Indizes entsprechend und setzen

$$\tilde{h}^{(i)}_k(X) = \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X)\ .$$

Da E_i und $E_i \wedge X$ dann $(i-1)$-zusammenhängend sind, sehen wir mit Folgerung 3.80, dass

$$\tilde{h}_k^{(i)}(S^0) = \pi^s_{k+i}(E_i) \cong \begin{cases} M & \text{für } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } 0 \neq k \leq i-2. \end{cases}$$

Für größere k erhalten wir nach wie vor keine Aussage. Je größer i ist, desto besser „approximieren“ wir also eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizienten M.

Wenn wir natürliche Transformationen zwischen den obigen allgemeinen Homologietheorien zu E_i hätten, könnten wir jetzt eine gewöhnliche Homologietheorie $\tilde{h}$ mit Koeffizienten M durch

$$\tilde{h}_k(X) = \operatorname{colim} \tilde{h}_k^{(i)}(X) = \operatorname{colim} \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X) = \operatorname{colim} \pi_{k+i}(E_i \wedge X)$$

konstruieren (zur letzten Gleichheit siehe Satz 5.38 unten). Das motiviert die folgende Definition.

5.36. Definition. Ein *Spektrum* $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ in einer punktierten Kategorie $\mathcal{T}_+$ topologischer Räume ist eine Folge von Räumen E_i und Abbildungen $s_i \colon SE_i \to E_{i+1}$, den *Stabilisierungs-* oder auch *Strukturabbildungen.* Eine *Abbildung* $f \colon \mathbb{E} \to \mathbb{F} = (F_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *von Spektren* ist eine Folge von Abbildungen $f_i \colon E_i \to F_i$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & F_{i+1} \\ {\scriptstyle s_i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle t_i} \\ SE_i & \xrightarrow{Sf_i} & SF_i \end{array}$$

für alle i kommutiert. Wir bezeichnen die Kategorie aller Spektren mit $\mathcal{ST}_+$.

Ein Spektrum $\mathbb{E}$ heißt *CW-Spektrum,* wenn alle E_i CW-Komplexe und alle s_i Inklusionen von Unterkomplexen sind. Ein Spektrum $\mathbb{E}$ heißt *Suspensionsspektrum* oder *Einhängungsspektrum,* wenn ein n_0 existiert, so dass die Abbildungen s_i für alle $i \geq n_0$ schwache Äquivalenzen sind, und *Ω-Spektrum,* wenn die induzierten Abbildungen $E_i \to \Omega^1(E_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ schwache Äquivalenzen sind.

Der Begriff des Spektrums ist eine „Stabilisierung“ des Begriffs des topologischen Raumes unter Einhängung. Das war die Hauptidee in den Arbeiten von Lima und Boardman, die Spektren zuerst definiert haben. Mit Stabilisierung meinen wir, dass es bei einem Spektrum nur auf die Räume E_i und Abbildungen s_i für große i ankommt. Beispielsweise können wir für alle $i < n_0$ stets $E_i = \mathrm{pt}$ setzen und für $s_i \colon \mathrm{pt} = SE_i \to E_{i+1}$ die konstante Abbildung wählen.

Wir werden vorerst nur CW-Spektren betrachten. Später lernen wir eine Modellstruktur auf der Kategorie $\mathcal{ST}_+$ kennen, deren fibrante Objekte genau die Ω-Spektren sind, und für die jedes CW-Spektrum kofibrant ist. Im Allgemeinen ist die Menge der Spektrenabbildungen zwischen zwei Spektren nicht besonders aussagekräftig. Beim Übergang zur Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{ST}_+$ sehen wir, dass wir nur (Homotopieklassen von) Abbildungen von kofibranten in fibrante Spektren betrachten sollen. Daher betrachten manche Autoren von Anfang nur Ω-CW-Spektren.

Für ein Spektrum $\mathbb{E}$ und einen Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ definieren wir mit Lemma 5.35 neue Homologiefunktoren $\tilde{h}_\bullet^{\mathbb{E},i}$ durch

$$\tilde{h}_k^{\mathbb{E},i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X) \,.$$

Die Stabilisierungsisomorphismen aus Proposition 5.34 liefern natürliche Transformationen

$$\tilde{h}_k^{\mathbb{E},i}(X) = \tilde{h}_{k+i}(E_i \wedge X) \xleftarrow[\cong]{\sigma_{k+i+1}} \tilde{h}_{k+i+1}(S^1 \wedge E_i \wedge X) \xrightarrow{(s_i \wedge \mathrm{id}_X)_*} \tilde{h}_{k+i+1}(E_{i+1} \wedge X) = \tilde{h}_k^{\mathbb{E},i+1}(X) \,.$$

Sie sind mit den Stabilisierungsisomorphismen $\sigma_\bullet^{\mathbb{E},i}$ verträglich, also auch mit den Randoperatoren aus Definition 5.2. Wir müssen aber noch den Grenzprozess $i \to \infty$ verstehen.

5.37. Lemma. *Es sei $(\tilde{h}^i_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge allgemeiner Homologiefunktoren in der Kategorie $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$ der (rechts-) R-Moduln, und es seien $\tau^i_\bullet\colon \tilde{h}^i_\bullet \to \tilde{h}^{i+1}_\bullet$ natürliche Transformationen, die mit den Randoperatoren ∂ verträglich sind. Dann ist auch der Kolimes*

$$\tilde{h}_\bullet(X) = \operatorname{colim} \tilde{h}^i_\bullet(X)$$

ein allgemeiner Homologiefunktor.

Beweis. Nach Proposition 5.34 sind die $\tau^i_\bullet$ auch mit den Stabilisierungsisomorphismen $\sigma^i_\bullet$ verträglich. Also induzieren diese im Kolimes Stabilisierungsisomorphismen $\sigma_\bullet$ für $\tilde{h}_\bullet$.

Sei $f\colon X \to Y$ eine schwache Äquivalenz, dann sind alle $\tilde{h}^i_\bullet f\colon \tilde{h}^i_\bullet(X) \to \tilde{h}^i_\bullet(Y)$ Isomorphismen, also auch ihr Kolimes $\tilde{h}_\bullet f\colon \tilde{h}_\bullet(X) \to \tilde{h}_\bullet(Y)$, und es folgt Homotopieinvarianz 5.2 (1).

Es sei (X, A) ein gutes Paar, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{h}^i_k(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}^i_k(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}^i_k(A) \\
\downarrow{\scriptstyle \tau^i_k} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^i_k} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^i_k} \\
\tilde{h}^{i+1}_k(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}^{i+1}_k(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}^{i+1}_k(A) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\tilde{h}_k(X/A) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k(X) & \xleftarrow{\iota_*} & \tilde{h}_k(A)
\end{array}$$

Wir überprüfen Exaktheit der Grenzsequenz bei X. Für jedes $\alpha \in \tilde{h}_k(A)$ existiert ein $\alpha^i \in \tilde{h}^i_k(A)$, das im Kolimes auf α abgebildet wird. Es gilt $(q_* \circ \iota_*)(\alpha^i) = 0 \in \tilde{h}^i_k(X/A)$, wegen Kommutatität also auch $(q_* \circ \iota_*)(\alpha) = 0 \in \tilde{h}_k(X/A)$.

Zu jedem $\xi \in \ker(q_*) \subset \tilde{h}_k(X)$ gibt es ein $\xi^i \in \tilde{h}^i_k(X)$, das im Kolimes auf ξ abgebildet wird, und ein $j \geq i$, so dass $\xi_j = \big(\tau^{j-1}_k \circ \cdots \circ \tau^i_k\big)(\xi^i) \in \ker(q^*) \subset \tilde{h}^j_k(X)$. Folglich existiert $\alpha^j \in \tilde{h}^j_k(A)$ mit $\iota_*(\alpha^j) = \xi^j$. Das Bild α in $\tilde{h}_k(A)$ wird dann auf ξ abgebildet. Somit erhalten wir das Quotientenaxiom 5.34 (2').

Das Summenaxiom 5.2 (3) lässt sich ganz genauso elementweise überprüfen. Alternativ dazu können wir uns überlegen, das der Kolimes nach Definition 4.7 ein linksadjungierter Funktor und somit nach Lemma 4.14 mit Kolimiten verträglich ist. Da das Koprodukt ebenfalls ein Kolimes ist, ist es für eine Familie punktierter Räume $(X_j)_{j\in J}$ mit $X = \bigvee X_j$ egal, ob wir erst das Koprodukt $\tilde{h}^i_\bullet(X)$ der $\tilde{h}^i_\bullet(X_j)$ bilden und dann den Kolimes $\tilde{h}_\bullet(X)$, oder erst die Kolimiten $\tilde{h}_\bullet(X_j)$ und dann das Koprodukt. Nach Proposition 5.34 ist $\tilde{h}_\bullet$ also ein allgemeiner Homologiefunktor. □

Es wirkt seltsam, dass wir das Quotientenaxiom (2') „von Hand“ beweisen. Tatsächlich ist es Glück, dass der Kolimes kurze exakte Sequenzen von R-Moduln oder abelschen Gruppen erhält (der Limes tut das nicht). Es handelt sich hier um eine besondere Eigenschaft der Kategorie $\mathcal{M}od_R$, die nicht von allen abelschen Kategorien geteilt wird, siehe Bemerkung 5.1 (6).

5.38. Satz und Definition. *Zu jedem Spektrum $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ existiert ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor $\tilde{E}_\bullet$ mit Werten in $\mathcal{A}b$, gegeben durch*

$$\tilde{E}_k(X) = \operatorname{colim} \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X) \cong \operatorname{colim} \pi_{k+i}(E_i \wedge X)\ .$$

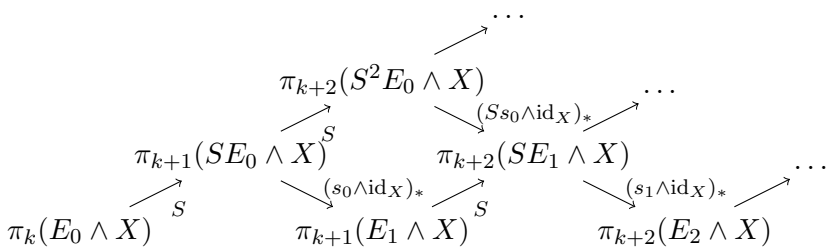
Man nennt $\tilde{E}_\bullet$ den (reduzierten) Homologiefunktor *zum Spektrum $\mathbb{E}$. Seine Koeffizienten heißen die* Homotopiegruppen $\pi_k(\mathbb{E}) = \tilde{E}_k(S^0)$ *von $\mathbb{E}$.*

Beweis. Aus den Lemmata 5.35 und 5.37 und der Konstruktion der natürlichen Transformationen τ nach Definition 5.36 folgt, dass $\tilde{E}_k$ ein reduzierter Homologiefunktor ist.

Die Abbildungen $\pi_{k+i}(E_i \wedge X) \to \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X)$ liefern eine natürliche Abbildung

$$\operatorname{colim} \pi_{k+i}(E_i \wedge X) \longrightarrow \operatorname{colim} \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X) = \tilde{E}_k(X) \qquad (*)$$

Für die Umkehrabbildung repräsentieren wir $a \in \tilde{E}_k(X)$ durch ein Element $a_i \in \pi^s_{k+i}(E_i \wedge X)$, und dieses wiederum durch $a_{i,\ell} \in \pi_{k+i+\ell}(S^\ell E_i \wedge X)$. Betrachte dazu das Diagramm



Mehrfaches Anwenden der Stabilisierungsabbildungen $s_\bullet$ liefert $a_{i+\ell,0} \in \pi_{k+i+\ell}(E_{i+\ell} \wedge X)$, welches das Bild von a_i in $\pi^s_{k+i+\ell}(E_{i+\ell} \wedge X)$ und damit ebenfalls $a \in \tilde{E}_k(X)$ repräsentiert. Dann bilden wir a auf das Bild von $a_{i+\ell,0}$ in $\operatorname{colim} \pi_{k+i}(E_i \wedge X)$ ab, das liefert die Umkehrabbildung zu (*). □

5.39. Beispiel. Das *Sphärenspektrum* $\mathbb{S}$ ist definiert als $(S^i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, mit $s_i = \mathrm{id}_{S^{i+1}} \colon SS^i \to S^{i+1}$. Es ist demnach ein Suspensionsspektrum. Der zugehörige Homologiefunktor besteht aus den stabilen Homotopiegruppen aus Folgerung 5.3. Die Homotopiegruppen von $\mathbb{S}$ sind die stabilen Homotopiegruppen der Sphären. Wir erhalten also (noch) nichts Neues.

5.40. Bemerkung. Die obige Konstruktion ist sehr allgemein. Sie liefert uns im nächsten Abschnitt alle gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Koeffizienten in $\mathcal{A}b$. Später lernen wir Spektren kennen, die verschiedene Bordismustheorien liefern.

Der Brownsche Darstellungssatz besagt, dass jeder allgemeine Homologiefunktor zur Quillen-Modellstruktur, der invariant unter gerichteten Kolimiten ist, von einem Spektrum herkommt. Dabei ist Invarianz unter gerichteten Kolimiten eine Verschärfung des Summenaxioms 5.2 (3).

5.d. Das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum

Um die Existenz eines gewöhnlichen Homologiefunktors zu zeigen, müssen wir jetzt nur noch das passende Spektrum konstruieren. Da wir mit stabilen Homotopiegruppen starten, arbeiten wir zunächst in der Kategorie $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ der abelschen Gruppen. Mit einem kleinen Trick gelingt es uns dann, auch R-Moduln als Koeffizienten zuzulassen.

Am Schluss dieses Abschnitts betrachten wir die so konstruierten Homologiefunktoren $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; G)$ genauer und beweisen insbesondere den Satz von Hurewicz, der die erste nicht verschwindende Homotopiegruppe eines zusammenhängenden Raumes mit der entsprechenden Homologiegruppe $\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z})$ in Verbindung bringt. Als Folgerung erhalten wir auch eine homologische Fassung des Satzes 4.46 von Whitehead.

5.41. Definition. Es sei G eine Gruppe und $n \geq 1$. Ein *Eilenberg-Mac Lane-Raum* zu G im Grad n ist ein punktierter Raum $K(G,n)$ mit $\pi_k(K(G,n)) = 0$ für alle $k \neq n$, zusammen mit einem Isomorphismus

$$\vartheta_n \colon \pi_n\big(K(G,n)\big) \xrightarrow{\cong} G\,. \qquad (1)$$

Ein *Eilenberg-Mac Lane-Spektrum* zur abelschen Gruppe G ist ein Spektrum $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, für das ein $n_0 \geq 1$ existiert, so dass HG_n für alle $n \geq n_0$ ein Eilenberg-Mac Lane-Raum mit

einem Isomorphismus $\vartheta_n\colon \pi_n(HG_n) \to G$ ist, und so dass für alle $n \geq n_0$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(HG_n) & \xrightarrow[\cong]{S} & \pi_{n+1}(SHG_n) \\ {\scriptstyle\vartheta_n}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle s_{n*}}\downarrow{\scriptstyle\cong} \\ G & \xleftarrow[\cong]{\vartheta_{n+1}} & \pi_{n+1}(HG_{n+1}) \,. \end{array} \tag{2}$$

Ein Eilenberg-Mac Lane-Raum hat nur eine nicht verschwindende Homotopiegruppe. Die Notationen $K(G,n)$ und HG_n sind beide gebräuchlich, die letztere passt etwas besser zu unser Notation für Spektren.

Nach Proposition 3.5 kann es Eilenberg-Mac Lane-Räume zu nicht-abelschen Gruppen nur in Grad 1 geben. Da diese in manchen Bereichen der Topologie und Geometrie recht wichtig sind, haben wir sie hier bereits mitdefiniert.

Die Abbildung S in (2) ist für $n \geq 2$ ein Isomorphismus nach dem Satz 3.76 von Freudenthal. Wir werden sehen, dass das auch für $n = 1$ gilt, wenn G abelsch ist.

5.42. Beispiel. Wir können bereits einige Eilenberg-Mac Lane-Räume angeben.

(1) Der Kreis S^1 ist ein $K(\mathbb{Z},1)$ nach Beispiel 3.27.
(2) Nach Übung 3.105 ist der n-Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ein $K(\mathbb{Z}^n,1)$.
(3) Sei allgemeiner (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, dann ist ihre universelle Überlagerung $\tilde{M}$ nach dem Satz von Hadamard-Cartan zusammenziehbar. Nach Folgerung 3.26 ist M dann ein $K(\pi_1(M),1)$.
(4) Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^\infty = \operatorname{colim} S^n/(\mathbb{Z}/2)$ ist ein $K(\mathbb{Z}/2,1)$ (Übung).
(5) Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^\infty = \operatorname{colim} S^{2n+1}/S^1$ ist ein $K(\mathbb{Z},2)$, das folgt aus Beispiel 3.43 (1).
(6) Der quaternionisch projektive Raum $\mathbb{H}P^\infty$ ist kein Eilenberg-Mac Lane-Raum, denn es gilt zwar $\pi_4(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$, aber $\pi_k(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_{k-1}(S^3)$, siehe Beispiel 3.43 (2), und $\pi_5(\mathbb{H}P^\infty) \cong \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2 \neq 0$ nach Satz 3.101.

5.43. Satz (Existenz und Eindeutigkeit von Eilenberg-Mac Lane-Spektren). *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gibt es*

- *einen Funktor $H\cdot_n\colon \mathcal{A}b \to \mathcal{HCW}_+$,*
- *eine natürliche Transformation $s_n\colon SH\cdot_n \to H\cdot_{n+1}$ und*
- *falls $n \geq 1$, einen natürlichen Isomorphismen $\vartheta_n\colon \pi_n(H\cdot_n) \to \cdot$,*

so dass man für jede abelsche Gruppe G ein Eilenberg-Mac Lane-Ω-CW-Spektrum $(HG_n, s_n)_n$ erhält; insbesondere kommutiere das Diagramm (2) in Definition 5.41 für alle $n \geq 0$.

Die Funktoren $H\cdot_n$ sind bis auf eindeutige natürliche Isomorphismen eindeutig. Die natürlichen Transformationen s_n sind für gegebene Funktoren $H\cdot_n$ und $H\cdot_{n+1}$ ebenfalls eindeutig. Die CW-Komplexe HG_n können so konstruiert werden, dass sie außer dem Basispunkt keine Zellen der Dimension $< n$ enthalten und HG_n aus SHG_{n-1} durch Ankleben von Zellen der Dimension $\geq 2n$ entsteht.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir ihn kurz motivieren und dechiffrieren. In der Homotopiekategorie der Spektren (die wir noch nicht kennen) besagt er, dass Eilenberg-Mac Lane-Spektren $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)_n$ existieren und bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig und in G funktoriell sind. All diese Eigenschaften sind wichtig, um damit gewöhnliche Homologiefunktoren zu definieren. Die Eilenberg-Mac Lane-Eigenschaft kodieren wir als natürlichen Isomorphismus ϑ von der Spektren-Homotopiegruppe $\pi_0(\mathbb{H}\cdot)$ aus Satz 5.38 zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{A}b$, repräsentiert durch natürliche Isomorphismen $\vartheta_n\colon \pi_n(HG_n) \to G$, sowie durch $\pi_k(\mathbb{H}\cdot) = 0$ für alle $k \neq 0$.

Da wir die Modellstruktur auf $\mathcal{ST}_+$ noch nicht kennen, arbeiten wir stattdessen zunächst in der Quillen-Modellstruktur auf $\mathcal{T}_+$ und repräsentieren $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ durch $\mathcal{HCW}_+$. In der üblichen Modellstruktur auf $\mathcal{ST}_+$ sind Ω-CW-Spektren dann außerdem fibrant und kofibrant.

Wir ordnen also jeder abelschen Gruppe G ein CW-Spektrum $\mathbb{H}G$ zu, das außerdem ein Ω-Spektrum ist. Wenn $\mathbb{H}G$ ein Ω-Spektrum ist, gilt

$$\pi_k(HG_n) \cong \pi_k(\Omega HG_{n+1}) \cong \pi_{k+1}(HG_{n+1}) \tag{*}$$

für alle $k \geq 0$ und alle n, insbesondere repräsentiert $\pi_k(HG_{k-\ell})$ die Homotopiegruppe $\pi_\ell(\mathbb{H}G)$ für alle $k \geq 0$ und alle ℓ.

Da wir Eilenberg-Mac Lane-Spektren konstruieren wollen, fordern wir also $\pi_k(HG_n) = 0$ für $k \neq n$ und brauchen natürliche Isomorphismen $\vartheta_n \colon \pi_n(HG_n) \cong G$, die mit (*) verträglich sind. Das heißt, das Diagramm (2) in Definition 5.41 soll kommutieren.

Sei $f \colon G \to K$ ein Gruppenhomomorphismus. Da die s_n natürlich sind, erhalten wir eine Abbildung $f \colon \mathbb{H}G \to \mathbb{H}K$ von Spektren. Da ϑ_n natürlich ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(HG_n) & \xrightarrow[\cong]{\vartheta_n} & G \\ {\scriptstyle Hf_{n*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \pi_n(HK_n) & \xrightarrow[\cong]{\vartheta_n} & K\,. \end{array} \tag{**}$$

Der Spezialfall $G = K$ wird später wichtig, wenn wir gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in R-Moduln definieren wollen, da Elemente von R durch Gruppenautomorphismen wirken.

Da Satz 5.43 in $\mathcal{HCW}_+$ formuliert ist, sind die Räume HG_n bis auf natürliche Homotopieäquivalenzen eindeutig. Diese Homotopieäquivalenzen sind wiederum nur bis auf Homotopie eindeutig, das gleiche gilt für die Abbildungen s_n.

Beweis. Unsere Konstruktion lehnt sich an den Beweis des CW-Approximationssatzes 4.51 an. Wir starten mit $HG_n = \mathrm{pt}$ für alle $n < 0$ und wählen für HG_0 die G zugrundeliegende Menge $|G|$ mit der diskreten Topologie. Dann gilt $\Omega HG_n \cong * = HG_{n-1}$ für alle $n \leq 0$.

Sei jetzt $n \geq 1$ und HG_{n-1} bereits konstruiert. Wir konstruieren ein CW-Paar (HG_n, SHG_{n-1}) und definieren $s_{n-1} \colon SHG_{n-1} \to HG_n$ als Inklusionsabbildung. Im Fall $n = 1$ gilt

$$HG_1^1 = SHG_0 = \bigvee_{g \in G \setminus \{e\}} S^1\,, \qquad \text{so dass} \qquad \pi_1(HG_1^1) = \coprod_{g \neq e} \mathbb{Z}\,.$$

Nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes gibt es einen Homomorphismus $\tilde{\vartheta} \colon \pi_1(HG_1^1) \to G$, der den zu $g \in G$ gehörigen Erzeuger $1 \in \mathbb{Z}$ von $\coprod_G \mathbb{Z}$ wieder auf g abbildet. Als J_1^2 wählen wir eine Menge von Relationen, das sind Erzeuger von $\ker(\tilde{\vartheta})$ als Normalteiler in $\pi_1(HG_1^1)$, siehe Satz 2.69. Wir erhalten HG_1^2 durch entsprechendes Ankleben von 2-Zellen. Anschließend kleben wir induktiv k-Zellen für $k \geq 3$ so an, dass $\pi_{k-1}(HG_1) \cong \pi_{k-1}(HG_1^k) = 0$. Wegen Folgerung 4.44 induziert $\tilde{\vartheta}$ den in Definition 5.41 (1) verlangten Isomorphismus

$$\vartheta_1 \colon \pi_1(HG_1) \cong \pi_1(HG_1^2) \longrightarrow G\,.$$

Außerdem induziert s_0 eine schwache Homotopieäquivalenz $HG_0 = |G| \to \Omega HG_1$.

Im Fall $n = 2$ ist die Abbildung $S \colon \pi_1(HG_1) \to \pi_2(SHG_1)$ nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76 surjektiv. Nach Folgerung 3.80 gilt

$$\pi_2\big(S(HG_1^1)\big) = \pi_2^s\big(S(HG_1^1)\big) \cong \bigoplus_{g \neq e} \pi_2^s(S^2) \cong \bigoplus_{g \neq e} \mathbb{Z}\,,$$

und diese Gruppe bildet surjektiv auf G ab. Für jedes $j \in J_1^2$ realisiert $S\varphi_j^2 \colon S^2 \to S(HG_1^1)$ dieselbe Relation in G wie bei der Konstruktion von HG_1^2. Daher ist $S \colon \pi_1(HG_1) \to \pi_2(SHG_1)$ sogar ein

Isomorphismus. Indem wir Zellen der Dimension ≥ 4 an SHG_1 ankleben, erhalten wir einen $K(G,2)$ zusammen mit dem kommutativen Diagramm in Definition 5.41 (2) für $n=1$. Außerdem induziert auch s_1 eine schwache Homotopieäquivalenz $HG_1 \to \Omega HG_2$.

Für $n \geq 3$ ist HG_{n-1} nach Voraussetzung ein $K(G,n-1)$ und daher $(n-2)$-zusammenhängend. Daher ist die Abbildung $\pi_{k-1}(HG_{n-1}) \to \pi_k(SHG_{n-1})$ nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76 ein Isomorphismus für $k \leq 2n-3 \geq n$ und surjektiv für $k = 2n-2$, so dass $\pi_k(SHG_{n-1}) = \pi_{k-1}(HG_{n-1}) = 0$ für alle $k \leq 2n-2$ mit Ausnahme von $k=n$. Wir erhalten also einen $K(G,n)$, indem wir Zellen der Dimension $\geq 2n$ ankleben. Der Isomorphismus $\vartheta_n \colon \pi_n(SHG_{n-1}) \cong \pi_n(HG_n) \to G$ ist durch das Diagramm in Definition 5.41 (2) bereits bestimmt. Außerdem induziert s_{n-1} wieder eine schwache Homotopieäquivalenz $HG_{n-1} \to \Omega HG_n$.

Seien jetzt Eilenberg-Mac Lane-Ω-CW-Spektren $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$ und $\mathbb{H}K = (HK_n, t_n)$ wie im Satz gegeben. Wir nehmen zunächst an, dass $\mathbb{H}G = (HG_n, s_n)$ wie oben konstruiert wurde. Dann setzen wir $Hf_n = 0 \colon \mathrm{pt} \to HK_n$ für $n \leq 0$. Für $n=1$ wählen wir zu jeder 1-Zelle e_k^1 einen Repräsentanten $\gamma \colon S^1 \to HK_1$ des Bildes des entsprechenden Erzeugers von G unter f in $\pi_1(HK_1) \cong K$ und definieren dadurch

$$Hf_1^1 \colon HG_1^1 = \bigvee_{j \in J^1} S^1 \to HK_1 \ .$$

Sei φ_j^2 die Anklebeabbildung einer 2-Zelle e_j^2 von HG. Da f ein Gruppenhomorphismus ist, ist dann $Hf_1^1 \circ \varphi_j^2$ in HK_1 zusammenziehbar, und wir können Hf_1^1 zu $Hf_1^2 \colon HG_1^2 \to HK_1$ ausdehnen. Da HK_1 ein $K(K,1)$ ist, können wir Hf_1 induktiv auf allen höheren Skeletten definieren. Nach Konstruktion kommutiert das obige Diagramm (**) für $n=1$.

Sei jetzt $n \geq 2$. Nach Konstruktion erhalten wir zunächst eine Abbildung

$$SHf_{n-1} \colon SHG_{n-1} \longrightarrow SHK_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} HK_n \ ,$$

diese können wir wie oben Zelle für Zelle auf ganz HG_n ausdehnen, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} SHG_{n-1} \arrow[r, "s_{n-1}"] \arrow[d, "SHf_{n-1}"'] & HG_n \arrow[d, "Hf_n"] \\ SHK_{n-1} \arrow[r, "t_{n-1}"] & HK_n \end{tikzcd} \qquad \text{und}$$

kommutiert, das heißt, die Stabilisierungsabbildungen sind natürlich. Das Diagramm (**) kommutiert dann ebenfalls, denn aus der Konstruktion und Definition 5.41 (2) folgt, dass im Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \pi_n(SHG_{n-1}) \arrow[dl, "(s_{n-1})_*"', "\cong"] \arrow[dd, "(SHf_{n-1})_*"', "\cong"] & & \pi_{n-1}(HG_{n-1}) \arrow[ll, "S"', "\cong"] \arrow[dl, "\vartheta", "\cong"'] \arrow[dd, "(Hf_{n-1})_*"] \\ \pi_n(HG_n) \arrow[rr, "\vartheta", "\cong"'] \arrow[dd, "(Hf_n)_*"'] & & G \arrow[dd, "f"] & \\ & \pi_n(SHK_{n-1}) \arrow[dl, "(t_{n-1})_*"', "\cong"] & & \pi_{n-1}(HK_{n-1}) \arrow[ll, "S"', "\cong"] \arrow[dl, "\vartheta", "\cong"'] \\ \pi_n(HK_n) \arrow[rr, "\vartheta", "\cong"'] & & K & \end{tikzcd} \ .$$

alle Seiten mit Ausnahme der vorderen kommutieren. Dann kommutiert auch die vordere Seite.

Falls das Spektrum $\mathbb{H}G$ nicht wie oben konstruiert wurde, sei $\mathbb{E}$ zu G wie oben konstruiert. Wir erhalten kommutierende Abbildungen

$$\begin{tikzcd} SHG_n \arrow[d] & SE_n \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & SHK_n \arrow[d] \\ HG_{n+1} & E_{n+1} \arrow[l] \arrow[r] & HK_{n+1} \end{tikzcd} \ .$$

Nach dem Satz 4.46 von Whitehead sind die Abbildungen $E_n \to HG_n$ Homotopieäquivalenzen, so dass wir auch eine passende Abbildung $HG_n \to HK_n$ erhalten.

Sei schließlich eine weitere Folge von Abbildungen $g_n\colon HG_n \to HK_n$ mit $g_n|_{SHG_{n-1}} = Sg_{n-1}$ und $g_{n*} = f\colon \pi_n(HG_n) \to \pi_n(HK_n)$ gegeben. Da $\pi_k(HK_n) = 0$ für alle $k \neq n$, lässt sich induktiv eine Familie von Homotopien $h_n\colon HG_n \times I \to HK_n$ zwischen Hf_n und g_n konstruieren. □

Mit den so konstruierten Eilenberg-Mac Lane-Spektren können wir jetzt gewöhnliche Homologiefunktoren konstruieren. Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammen.

5.44. Satz. *Es sei R ein Ring und $\mathcal{M}od_R$ die Kategorie der (Rechts-) R-Moduln.*

(1) *Für jeden R-Modul M existiert ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; M)\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R$ mit*
$$\tilde{H}_k(X; M) = \operatorname{colim} \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X)\ ,$$
der das Dimensionsaxiom 5.2 (4) mit $\tilde{H}_0(S^0; M) \cong M$ erfüllt.

(2) *Zu jedem Modulhomomorphismus $f\colon M \to N$ existiert eine natürliche Transformation $\tau_{f,\bullet}\colon \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; M) \to \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; N)$, die mit den Randoperatoren aus Definition 5.2 (2) verträglich ist, so dass $\tau_{f,0}(S^0) = f\colon \tilde{H}_0(S^0; M) = M \to N = \tilde{H}_0(S^0; N)$.*

(3) *Sei $g\colon L \to M$ ein weiterer Modulhomomorphismus, dann gilt $\tau_{f,\bullet} \circ \tau_{g,\bullet} = \tau_{f\circ g,\bullet}$.*

(4) *In der Quillen-Modellstruktur ist jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften zu $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; M)$ natürlich isomorph.*

Wir können (1)–(3) wie folgt interpretieren: es gibt einen Funktor $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ von der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ in die Kategorie der gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Werten in $\mathcal{M}od_R$, wobei Morphismen gerade natürliche Transformationen sind, die mit den Randoperatoren beziehungsweise den Stabilisierungs-Isomorphismen verträglich sind, siehe Proposition 5.34.

Beweis. Wir arbeiten hier mit $R = \mathbb{Z}$, so dass $\mathcal{M}od_R$ zur Kategorie $\mathcal{A}b$ der abelschen Gruppen äquivalent ist. Den allgemeinen Fall betrachten wir in Übung 5.86. Die Existenzaussage (1) folgt aus den Sätzen 5.38 und 5.43.

Wir konstruieren die natürliche Transformation zu (2) durch
$$\tau_{f,k}(X) = \operatorname{colim}\big((Hf_\ell \wedge \mathrm{id}_X)_*\colon \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) \longrightarrow \pi_{k+\ell}(HN_\ell \wedge X)\big)\ .$$
Behauptung (3) folgt, indem wir $(f \circ g)_\ell$ durch $f_\ell \circ g_\ell$ ersetzen, was aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Satz 5.43 möglich ist.

Zur Eindeutigkeit in der Quillen-Modellstruktur sei ein weiterer solcher Funktor $\tilde{h}_\bullet$ und ein Raum Y in $\mathcal{T}$ gegeben. Es sei $g\colon X \to Y$ eine CW-Approximation von Y, dann sind die Abbildungen $g_*\colon \tilde{h}_k(X) \to \tilde{h}_k(Y)$ und $g_*\colon \tilde{H}_k(X; M) \to \tilde{H}_k(Y; M)$ Isomorphismen und durch Satz 4.51 eindeutig festgelegt. Mit Satz 5.18 (2) erhalten wir den in (4) gesuchten natürlichen Isomorphismus. □

5.45. Proposition. *Sei $HM_\bullet$ ein Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zum R-Modul M. Für jeden topologischen Raum X gilt*
$$\tilde{H}_k(X; M) = \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) \qquad \text{für alle } \ell \geq k+2\ . \tag{1}$$
Falls X ein n-zusammenhängender Raum ist für ein $n \geq 0$, gilt sogar
$$\tilde{H}_k(X; M) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } k \leq n, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) & \text{für alle } k > n \text{ und alle } \ell \geq \max(k-n, 1)\ . \end{cases} \tag{2}$$

BEWEIS. Da alle auftretenden Funktoren unter schwachen Äquivalenzen invariant sind, dürfen wir nach Satz 4.51 annehmen, dass X ein CW-Komplex ist. Wenn X ein n-zusammenhängender Raum ist, dürfen wir außerdem annehmen, dass das n-Skelett nur aus einem Punkt besteht. Andernfalls setzen wir $n = -1$ und $X^{-1} = \mathrm{pt}$.

Wenn wir HM_ℓ wie im Beweis des Satzes 5.43 konstruieren, besteht HM_ℓ nur aus Zellen der Dimension $\geq \ell$. Also besteht $HM_\ell \wedge X$ nach der Konstruktion zu Proposition 4.54 (4) nur aus Zellen der Dimension $> n + \ell$. Es gilt

$$\pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) = 0 \qquad \text{für alle } k \leq n \ ,$$

also $\tilde{H}_k(X; M) = 0$ für alle $k \leq n$.

Es sei jetzt $k > n$. Da wir beim Übergang von SHM_ℓ zu $HM_{\ell+1}$ nach Satz 5.43 nur Zellen der Dimension $\geq 2(\ell + 1)$ ankleben, ist die Abbildung

$$SHM_\ell \wedge X \xrightarrow{s_\ell \wedge \mathrm{id}_X} HM_{\ell+1} \wedge X$$

nach Folgerung 4.44 eine $(n + 2\ell + 2)$-zusammenhängende Abbildung. Außerdem ist $HM_\ell \wedge X$ ein $(n + \ell)$-zusammenhängender Raum. Nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76 ist daher

$$\pi_{k+\ell}(HM_\ell \wedge X) \xrightarrow[\cong]{S} \pi_{k+\ell+1}(SHM_\ell \wedge X) \xrightarrow[\cong]{(s_\ell \wedge \mathrm{id}_X)_*} \pi_{k+\ell+1}(HM_{\ell+1} \wedge X \ ,$$

sofern $\ell \geq k - 2n$ und $\ell \geq k - n$. Mit Satz 5.44 (1) folgt (1) und der zweite Fall in (2). □

Wegen Beispiel 5.42 (1) können wir $H\mathbb{Z}_1 = S^1$ wählen. Nach Proposition 5.45 hat $\tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ einen offensichtlichen Erzeuger

$$\varepsilon_n = [\mathrm{id}_{S^{n+1}}] \in \pi_{n+1}(S^1 \wedge S^n) = \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) \ .$$

5.46. DEFINITION. Es sei X ein topologischer Raum und $n \geq 1$. Dann ist der *Hurewicz-Homomorphismus* $\eta_n \colon \pi_n(X) \to \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ definiert durch

$$\eta_n([f]) = f_*(\varepsilon_n) \in \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \ .$$

Für eine Gruppe G definieren wir die Abelisierung $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$.

5.47. SATZ (Hurewicz). *Der Hurewicz-Homomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus. Wenn X zusammenhängend ist, induziert η_1 den* Hurewicz-Isomorphismus

$$\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}) \ . \tag{1}$$

Wenn X ein n-zusammenhängender Raum ist mit $n \geq 1$, erhalten wir den Hurewicz-Isomorphismus

$$\eta_{n+1} \colon \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z}) \ . \tag{2}$$

BEWEIS. Wegen der Homotopieinvarianz von $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,; \mathbb{Z})$ ist η_n wohldefiniert. Seien $f, g \colon S^n \to X$ punktierte Abbildungen. Mit der „Einschnürungsabbildung“ $d^n \colon S^n \to S^n \vee S^n$ aus dem Beweis von Satz 5.11 gilt $[f]+[g] = [(f \vee g) \circ d^n] \in \pi_n(X)$. Die Einhängung dieser Abbildung ist $(Sf \vee Sg) \circ d^{n+1}$, somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta_n([f] + [g]) &= \big((f \vee g) \circ d^n\big)_*[\mathrm{id}_{S^{n+1}}] = \big[S\big((f \vee g) \circ d^n\big) \circ \mathrm{id}_{S^{n+1}}\big] \\ &= [(Sf \vee Sg) \circ d^{n+1}] = [Sf] + [Sg] = \eta_n([f]) + \eta_n([g]) \quad \in \quad \pi_{n+1}(SX) \ . \end{aligned}$$

Da $\pi_{n+1}(SX)$ linear nach $\tilde{H}_\bullet(X; \mathbb{Z})$ abbildet, ist $\eta_n \colon \pi_n(X) \to \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ ein Homomorphismus.

Aussage (2) folgt aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76 und Proposition 5.45 (2), da

$$\pi_{n+1}(X) \cong \pi_{n+2}(S^1 \wedge X) \cong \tilde{H}_{n+1}(X; \mathbb{Z}) \ ,$$

und η_{n+1} bildet $[f] \in \pi_{n+1}(X)$ auf

$$f_*[\varepsilon_{n+1}] = [(\mathrm{id}_{S^1} \wedge f) \circ \mathrm{id}_{S^{n+2}}] = [Sf] \in \pi_{n+2}(S^1 \wedge X)$$

ab. Somit entspricht η_{n+1} gerade dem Einhängungsisomorphismus S aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76.

In Aussage (1) erhalten wir wie oben den surjektiven Einhängungshomomorphismus

$$\eta_1 = S\colon \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_2(S^1 \wedge X) \cong \tilde{H}_1(X;\mathbb{Z})\ .$$

Wir dürfen wieder annehmen, dass X ein CW-Komplex mit 0-Skelett $X^0 = \mathrm{pt}$ ist. Indem wir Satz 2.69 wie im Beweis von Satz 5.43 benutzen, sehen wir, dass η_1 einen Isomorphismus $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \tilde{H}_1(X;\mathbb{Z})$ induziert. □

5.48. Bemerkung. Den Satz von Hurewicz kann man auch „rückwärts“ anwenden: Wenn X zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist und $\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ für alle $k \le n$ gilt, dann ist $\eta_{n+1}\colon \pi_{n+1}(X) \to \tilde{H}_{n+1}(X;\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus. Dazu wenden wir den Satz von Hurewicz induktiv für alle $k \le n+1$ an.

Die Voraussetzung, dass X einfach zusammenhängend ist, ist dabei wichtig. Es gibt nämlich sogenannte *perfekte* Gruppen $G \neq 0$, was bedeutet, dass $[G,G] = G$ gilt und somit $G^{\mathrm{ab}} = 0$. In diesem Fall ist $\tilde{H}_1(X;\mathbb{Z}) = 0$, aber $\eta_2\colon \pi_2(X) \to \tilde{H}_2(X;\mathbb{Z})$ ist im allgemeinen kein Isomorphismus.

5.49. Bemerkung. Sowohl der Satz von Hurewicz als auch die Tatsache, dass der Randoperator im zellulären Kettenkomplex aus Definition 5.17 allein durch die Inzidenzzahlen $d^n_{ij} \in \mathbb{Z}$ bestimmt ist, legen nahe, dass unter den gewöhnlichen Homologiefunktoren die ganzzahlige Homologie $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ eine Sonderrolle annimmt. Man schreibt daher oft kurz $\tilde{H}_k(X)$ für $\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z})$.

Zum Schluss formulieren wir den Satz 4.46 von Whitehead noch einmal mit Hilfe von Homologie um.

5.50. Satz (Whitehead, homologische Fassung). *Es sei $f\colon Y \to X$ eine punktierte Abbildung von zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden CW-Komplexen, so dass $f_*\colon \tilde{H}_k(Y) \to \tilde{H}_k(X)$ für alle $k \ge 1$ ein Isomorphismus ist. Dann ist f eine Homotopie-Äquivalenz.*

Beweis. Wir schreiben den Abbildungskegel Cf als $Zf \cup_Y CY$, dabei ist Zf zu X homotopieäquivalent. Indem wir den Durchschnitt Y etwas aufdicken, sehen wir mit dem Satz 2.39 von Seifert-van Kampen, dass Cf einfach zusammenhängend ist. Wegen der langen exakten Homologiesequenz 5.2 (2) für das Paar (Zf, Y) gilt $\tilde{H}_k(Cf) = 0$ für alle k. Somit ist Cf nach Bemerkung 5.48 schwach zusammenziehbar.

Wir zeigen induktiv über n, dass dann auch $\pi_k(Zf, Y) = 0$ für alle $k \le n$. Für $n = 1$ folgt das aus den Voraussetzungen. Sei die Behauptung für ein n richtig, dann ist $(Zf, Y) \to (Cf, *)$ eine $(n+2)$-zusammenhängende Abbildung nach Proposition 3.73. Also erhalten wir einen Isomorphismus $\pi_{n+1}(Zf, Y) \cong \pi_{n+1}(Cf) = 0$.

Aber dann sind $Y \hookrightarrow Zf$ und f schwache Äquivalenzen, somit ist f eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.46 von Whitehead. □

Hätten wir anstelle von $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$ nur einen Isomorphismus $f_*\colon \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ vorausgesetzt, so hätten wir zwar immer noch folgern können, dass Cf schwach zusammenziehbar ist, aber nicht, dass alle $\pi_k(Zf, Y)$ verschwinden.

5.e. Moore-Räume und ein universelles Koffizienten-Theorem

Der Begriff „Koeffizienten“ hat in der Homologietheorie verschiedene Bedeutungen; eine, nämlich $(\tilde{h}_k(S^0))_{k\in\mathbb{Z}}$, haben wir in Abschnitt 5.a kennengelernt. In Abschnitt 5.b haben wir zelluläre Homologie betrachtet, hierbei handelte es sich um gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in einem

Objekt M einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. In diesem Abschnitt geht es darum, einen gegebenen Homologiefunktor zusätzlich mit Koeffizienten in einer gegebenen abelschen Gruppe A zu versehen. Im Falle der „gewöhnlichen“ Homologie mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen stimmen all diese Begriffe überein: wendet man die im Folgenden beschriebene Methode auf $\tilde{H}_\bullet = \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ und die Gruppe A an, so erhält man $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;A)$.

Mit den Methoden aus diesem Abschnitt können wir einen Zusammenhang zwischen den Funktoren $\tilde{h}_\bullet(\,\cdot\,;A)$ und $\tilde{h}_\bullet$ mit und ohne Koeffizienten herstellen. Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass dieses Resultat für gewöhnliche Homologie einen Spezialfall der Künneth-Formel für Produkte darstellt. Sei M ein R-Modul und X ein topologischer Raum. Man könnte vermuten, dass $H_k(X;M) \cong H_k(X) \otimes M$ gilt. Nach Beispiel 5.20 stimmt das beispielsweise für $X = \mathbb{C}P^n$ oder $X = \mathbb{H}P^n$. Für $X = \mathbb{R}P^n$, $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2$ liefert Beispiel 5.21 jedoch ein anderes Ergebnis.

5.51. Definition. Ein *Moore-Raum* zur abelschen Gruppe A in Dimension $n \geq 1$ ist ein punktierter (n-1)-zusammenhängender CW-Komplex $M(A,n)$ (oder kurz MA_n), so dass $\tilde{H}_k(MA_n) = 0$ für alle $k \neq n$, zusammen mit einem Isomorphismus

$$\rho\colon \pi_n(MA_n) \xrightarrow{\cong} A\ .$$

Ein *Moore-Spektrum* zur abelschen Gruppe A ist ein Spektrum $\mathbb{M}A = (MA_n, s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, für das ein n_0 existiert, so dass MA_n für alle $n \geq n_0$ ein Moore-Raum mit $\rho_n\colon \tilde{H}_n(MA_n) \xrightarrow{\cong} A$ ist, und so dass für alle $n \geq n_0$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(MA_n) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{n+1}(SMA_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_n} & & \downarrow{\scriptstyle s_{n*}} \\ A & \xleftarrow{\rho_{n+1}} & \pi_{n+1}(MA_{n+1})\ . \end{array}$$

Der obere Pfeil im Diagramm bezeichnet die Einhängungsabbildung S aus dem Satz 3.76 von Freudenthal. Aus dem Satz 5.47 von Hurewicz folgt

$$\pi_k(MA_n) \cong \tilde{H}_k(MA_n) \cong \begin{cases} A & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } k < n. \end{cases}$$

Da die Räume MA_n CW-Komplexe sind, sind SMA_n und MA_{n+1} homotopieäquivalent für alle $n \geq 1$ nach dem homologischen Satz 5.50 von Whitehead. Also ist das Moore-Spektrum ein Suspensionsspektrum, und wir können $MA_{n_0+k} = S^k MA_{n_0}$ wählen.

5.52. Beispiel. Wir betrachten einfache Beispiele von Moore-Räumen.

(1) Die Sphären S^k sind Moore-Räume für $\mathbb{Z}$ in Dimension k, das Sphärenspektrum $\mathbb{S}$ ist also ein Moore-Spektrum $\mathbb{M}\mathbb{Z}$.
(2) Nach Beispiel 5.21 (1) ist die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ ein Moore-Raum $M(\mathbb{Z}/2,1)$.

5.53. Proposition. *Es sei A eine abelsche Gruppe.*

(1) *Dann existieren Moore-Räume MA_n für alle $n \geq 2$.*
(2) *Sei $F\colon A \to B$ ein Gruppenhomomorphismus, sei $n \geq 2$, und seien MA_n, MB_n Moore-Räume, dann existiert eine Abbildung $f\colon MA_n \to MB_n$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(MA_n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(MB_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_n} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_n} \\ A & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

kommutiert.

(3) *Die Moore-Räume MA_n sind für $n \geq 2$ bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.*

Diese Proposition ist deutlich schwächer als Satz 5.43 über Eilenberg-Mac Lane-Spektren. Insbesondere sind die Homotopieäquivalenzen zwischen zwei Moore-Räumen zur gleichen Gruppe A in der gleichen Dimension n nicht notwendigerweise bis auf Homotopie eindeutig. Es kommt noch schlimmer: es gibt keinen Funktor $\mathcal{A}b \to \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$, der jeder abelschen Gruppe A einen Moore-Raum MA_n zuordnet. Als Beispiel hat $\mathrm{id}_{M(\mathbb{Z}/2)_n}$ Ordnung 4 in $[M(\mathbb{Z}/2)_n, M(\mathbb{Z}/2)_n]$ für $n \geq 2$, während 1 Ordnung 2 in $\hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ hat, siehe [**H1**, Ex. 4L.7]. Insbesondere erhalten wir kein Analogon zum Satz 5.43 über Eilenberg-MacLane-Räume.

Beweis. Sei A eine abelsche Gruppe. Dann besitzt A eine freie Auflösung $a\colon \mathbb{Z}^{\oplus K} \to \mathbb{Z}^{\oplus J}$. Das heißt, a ist injektiv mit $\operatorname{coker} a \cong A$. Wir erhalten einen Moore-Raum MA_n zu A als CW-Komplex mit je einer n-Zelle e_j^n für jeden Erzeuger $j \in J$ von A, und je einer $(n+1)$-Zelle e_k^{n+1} für jede Relation $k \in K$. Dabei ist die Verklebeabbildung φ_k so gewählt, dass

$$\varphi_{k*}\colon \tilde{H}^n(S^n) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}^n\big(\bigvee_{j\in J} S^n\big) \cong \mathbb{Z}^{\oplus J}$$

den Erzeuger $1 \in \mathbb{Z}$ auf die $a(e_k)$ entsprechende Relation in $\mathbb{Z}^{\oplus J}$ abbildet. Nach Satz 5.18 ist MA_n ein Moore-Raum mit $\tilde{H}_n(MA_n) \cong A$, und (1) ist bewiesen. Wir können MA_n auch als Abbildungskegel $C\varphi$ der Abbildung

$$\varphi\colon \bigvee_{k\in K} S^n \longrightarrow \bigvee_{j\in J} S^n$$

auffassen.

Zu (2) sei $F\colon A \to B$ gegeben, und sei a eine freie Auflösung von A wie oben. Sei MA_n wie oben konstruiert, und sei MB_n ein Moore-Raum zu B gemäß Definition 5.51. Mit Hilfe von F finden wir eine Abbildung

$$f_n\colon \bigvee_{j\in J} S^n \to MB_n\ ,$$

indem wir für jeden Erzeuger $j \in J$ von A die Abbildung f_n auf dem entsprechenden Summanden S^n durch einen Repräsentanten von $F(j) \in B \cong \pi_n MB_n$ vorgeben. Alle Bilder von Relationen $k \in K$ unter a liegen im Kern von

$$f_{n*}\colon \mathbb{Z}^{\oplus J} \cong \pi_n\big(\bigvee_{j\in J} S^n\big) \longrightarrow \pi_n MB_n \cong H_n\big(MB_n\big) \cong B\ ,$$

und wir können f_n zu $f\colon MA_n \to MB_n$ fortsetzen.

Sei insbesondere $F = \mathrm{id}_A$, und sei MB_n ein weiterer Moore-Raum zu $B = A$. Für $n \geq 2$ folgt (3) aus (2) und dem Satz 5.50 von Whitehead. □

Als Beispiel schreiben wir

$$\mathbb{Q} = \langle e_1, e_2, \dots\rangle / \langle e_1 - 2e_2, e_2 - 3e_3, \dots\rangle\ ,$$

wobei der Erzeuger e_k jeweils auf $\frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$ abgebildet wird. So erhalten wir einen Moore-Raum $M\mathbb{Q}_n$ mit je abzählbar vielen Zellen in den Dimensionen n und $n+1$.

Sei jetzt MA_n ein Moore-Raum zur abelschen Gruppe A in Dimension n. Nach Lemma 5.35 gibt es einen Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$ mit

$$\tilde{h}_k(X; A) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n \wedge X)$$

für alle Räume X. Dabei benutzen wir, dass ein um n „verschobener“ Homologiefunktor wieder ein Homologiefunktor ist. Wir bestimmen die Koeffizienten von $\tilde{h}_\bullet$ und erhalten

$$\tilde{h}_k(S^0;A) = \tilde{H}_{k+n}(MA_n) = \begin{cases} A & \text{falls } k=0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.44 (4) liefert einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{h}_\bullet(\,\cdot\,;A) \cong \tilde{H}_\bullet(\,\cdot\,;A)\ .$$

Das heißt, sobald wir das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu $\mathbb{Z}$ konstruiert haben, können wir alle weiteren gewöhnlichen Homologiefunktoren mit Werten in $\mathcal{A}b$ mit Hilfe von Moore-Räumen erhalten. Dazu reicht jeweils ein einzelner Moore-Raum aus; wir brauchen also nicht das gesamte Moore-Spektrum zu betrachten. Mit Beispiel 5.52 erhalten wir

$$\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z}) = \tilde{H}_{k+n}(S^n \wedge X) \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}_k(X;\mathbb{Z}/2) = \tilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}P^2 \wedge X)\ ,$$

die erste Gleichung ist gerade Satz 5.10.

Die obige Konstruktion funktioniert wegen Lemma 5.35 für jeden allgemeinen Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$. Wir betrachten dann für gut punktierte Räume X den Homologiefunktor

$$\tilde{h}_k(X;A) = \tilde{h}_{k+n}(MA_n \wedge X)\ .$$

Beispielsweise könnten wir die stabilen Homotopiegruppen eines Raumes X mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten definieren durch

$$\pi^s_k(X;\mathbb{Z}/2) = \pi^s_{k+1}(\mathbb{R}P^2 \wedge X)\ .$$

Wenn X gut punktiert ist und $MA_n = C\varphi$ wie im Beweis von Proposition 5.53 konstruiert wurde, ist

$$\bigvee_{k\in K} S^n \wedge X \xrightarrow{\varphi\wedge \mathrm{id}_X} \bigvee_{j\in J} S^n \wedge X \longrightarrow MA_n \wedge X \cong C(\varphi \wedge \mathrm{id}_X)$$

eine Homotopie-Kofasersequenz, siehe Übung 3.136. Mit dem Summenaxiom 5.2 (3) erhalten wir nach 5.2 (2) die lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_{k+n}\big(\textstyle\bigvee_K S^n \wedge X\big)}_{\mathbb{Z}^{\oplus K}\otimes \tilde{h}_k(X)} \xrightarrow[a\otimes \mathrm{id}_{h_k(X)}]{(\varphi\wedge \mathrm{id}_X)_*} \underbrace{\tilde{h}_{k+n}\big(\textstyle\bigvee_J S^n \wedge X\big)}_{\mathbb{Z}^{\oplus J}\otimes \tilde{h}_k(X)} \longrightarrow \tilde{h}_k(X;A) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{\tilde{h}_{k+n-1}\big(\textstyle\bigvee_K S^n \wedge X\big)}_{\mathbb{Z}^{\oplus K}\otimes \tilde{h}_{k-1}(X)} \xrightarrow[a\otimes \mathrm{id}_{h_{k-1}(X)}]{(\varphi\wedge \mathrm{id}_X)_*} \underbrace{\tilde{h}_{k+n-1}\big(\textstyle\bigvee_J S^n \wedge X\big)}_{\mathbb{Z}^{\oplus J}\otimes \tilde{h}_{k-1}(X)} \longrightarrow \tilde{h}_{k-1}(X;A) \longrightarrow \cdots$$

Daraus ergibt sich für jedes k eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}\big(a\otimes \mathrm{id}_{h_k(X)}\big) \longrightarrow \tilde{h}_k(X;A) \longrightarrow \ker\big(a\otimes \mathrm{id}_{h_{k-1}(X)}\big) \longrightarrow 0\ . \tag{5.2}$$

Um etwas über $\tilde{h}_k(X;A)$ aussagen zu können, müssen wir als nächstes also Kern und Kokern der Abbildung $a\otimes \mathrm{id}_B$ für beliebige abelsche Gruppen B verstehen.

5.54. Bemerkung. Sei R ein kommutativer Ring, und B ein R-Modul. Dann ist der Funktor $\cdot\otimes B$ linksadjungiert zum internen hom-Funktor $\hom(B,\,\cdot\,)$. Also ist $\cdot\otimes B$ kostetig, siehe Lemma 4.14. Wir können den Kokern einer Modulabbildung $f\colon M\to N$ als Kolimes schreiben, siehe Bemerkung 5.1 (3). Es gibt also einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{coker}(f\otimes \mathrm{id}_B) \cong \operatorname{coker} f \otimes B\ .$$

In der obigen Situation folgt daraus $\operatorname{coker}(a \otimes \mathrm{id}_{h_k(X)}) \cong A \otimes h_k(X)$.

In Analogie zu Übung 4.93 (1) gibt es eine Adjunktion

$$\hom(\,\cdot\,, B)\colon \mathcal{M}od_R \leftrightarrows \mathcal{M}od_R^{op} : \hom(\,\cdot\,, B)\ ,$$

siehe auch Übung 5.89. Folglich gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\ker\bigl(f^*\colon\ \hom(N,B) \to \hom(M,B)\bigr) \cong \hom(\operatorname{coker} f, B)\ .$$

Im Fall $M = R^{\oplus J}$ gilt $\hom(M,B) \cong B^J$.

Das Tensorprodukt ist jedoch im Allgemeinen nicht stetig. Die folgende Proposition werden wir nicht beweisen.

5.55. Proposition und Definition. *Es sei R ein Hauptidealring und $a\colon R^{\oplus K} \to R^{\oplus J}$ eine freie Auflösung eines R-Moduls A. Für jeden R-Modul B hängen*

$$\operatorname{Tor}_R(A,B) = \ker(a \otimes \mathrm{id}_B) \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{Ext}_R(A,B) = \operatorname{coker}(a^*\colon B^J \to B^K)$$

nicht von der Wahl der freien Auflösung ab und sind funktoriell in A und B.

Wenn der Ring R bekannt ist, lassen wir ihn — wie beim Tensorprodukt — weg. In der Regel betrachten wir $R = \mathbb{Z}$.

5.56. Beispiel. Es sei R ein Hauptidealring, $r,\ s \in R \setminus \{0\}$, und B ein R-Modul. Dann gilt (Übung):

$$\operatorname{Tor}(R,B) \cong \operatorname{Ext}(R,B) = 0\ , \tag{1}$$

$$\operatorname{Tor}(R/r,B) \cong \hom(R/r,B) \cong \bigl\{\, b \in B \;\bigm|\; br = 0 \,\bigr\} \subset B\ , \tag{2}$$

$$\operatorname{Ext}(R/r,B) \cong (R/r) \otimes B \cong B/rB\ , \tag{3}$$

$$\operatorname{Tor}(R/r,R/s) \cong \operatorname{Ext}(R/r,R/s) \cong (R/r) \otimes (R/s) \cong \hom(R/r,R/s) \cong R/(r,s)\ , \tag{4}$$

wobei (r,s) das von r und s erzeugte Ideal in R bezeichne. Die Funktoren $\operatorname{Tor}_{\Bbbk}$ und $\operatorname{Ext}_{\Bbbk}$ verschwinden, wenn $\Bbbk$ ein Körper ist.

Mit der kurzen exakten Sequenz (5.2) und obiger Definition erhalten wir sofort folgendes Ergebnis.

5.57. Satz (Universelles Koeffiziententheorem für allgemeine Homologiefunktoren). *Es sei A eine abelsche Gruppe und $(\tilde h_\bullet, \partial_\bullet)$ ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor mit Werten in der Kategorie $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$. Es bezeichne $\tilde h_\bullet(\,\cdot\,; A)$ den Funktor $\tilde h_{\bullet+n}(MA_n \wedge\,\cdot\,)$. Dann existiert für alle k und alle X eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \tilde h_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \tilde h_k(X;A) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}\bigl(\tilde h_{k-1}(X), A\bigr) \longrightarrow 0\ . \quad \square$$

Durch die obige kurze exakte Sequenz ist $\tilde h_k(X,A)$ noch nicht eindeutig bestimmt. Im folgenden Abschnitt werden wir für gewöhnliche Homologie immerhin zeigen, dass $\tilde H_k(X;A)$ isomorph zur direkte Summen der äußeren Terme ist — allerdings nicht auf natürliche Weise. Für andere Homologiefunktoren stimmt das nicht. Es kann auch passieren, dass $\tilde h_k(X;\mathbb{Z}/m)$ kein $(\mathbb{Z}/m)$-Modul ist. In Übung 5.96 sehen wir, dass unter bestimmten Bedingungen ein R-Modul A sogar für allgemeine Homologiefunktoren $\tilde h_\bullet$ zu R-Moduln $\tilde h_\bullet(X;A)$ führt.

5.58. Bemerkung. Die Konstruktion von Tor mag auf den ersten Blick willkürlich wirken. Es gibt mehrere Möglichkeiten, sie in einen größeren Kontext einzuordnen.

(1) Funktoren $\mathcal{F}$, die wie $\cdot \otimes B$ Kokerne erhalten, nennt man auch *rechtsexakt.* Grothendieck hat gezeigt, dass jeder linksexakte Funktor $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0$ zu einer Familie von *linksderivierten Funktoren* $\mathcal{F}^k$ für $k \geq 0$ gehört, die final sind mit folgender Eigenschaft: zu jeder kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

existiert eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}^1 A \longrightarrow \mathcal{F}^1 A'' \longrightarrow \mathcal{F}^0 A' \longrightarrow \mathcal{F}^0 A \longrightarrow \mathcal{F}^0 A'' \longrightarrow 0\ .$$

Zu $\cdot \otimes B = \mathrm{Tor}_R^0$ gehören in diesem Sinne die linksderivierten Funktoren Tor_R^k.

Analog ist der interne Hom-Funktor *linksexakt* und gehört zu einer Familie *rechtsderivierter Funktoren* Ext_R^k mit $\mathrm{Ext}_R^0 = \hom$, für die eine ähnliche Sequenz in umgekehrter Richtung existiert, und die initial ist mit dieser Eigenschaft. Durch diese universellen Eigenschaften sind die Funktoren Tor_R^k und Ext_R^k dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Im Falle eines Hauptidealrings R gilt $\mathrm{Tor}_R^k = 0 = \mathrm{Ext}_R^k$ für $k \geq 2$, im Falle eines Körpers bereits für $k \geq 1$.

(2) Wir können Tor und Ext in der Sprache der Modellkategorien konstruieren. Allerdings gibt es im Allgemeinen keine geeignete Modellstruktur auf $\mathcal{M}od_R$. Wir können $\mathcal{M}od_R$ aber in die Kategorie $\mathcal{C}h_R$ der Kettenkomplexe einbetten; aus einem Modul M wird dann der Komplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots\ .$$

Die Kategorie $\mathcal{C}h_R$ trägt eine Modellstruktur, deren schwache Äquivalenzen gerade die Kettenhomotopieäquivalenzen sind. Als Faserungen wählt man genau die gradweise surjektiven Kettenabbildungen, und alle injektiven Abbildungen mit nach unten beschränktem, gradweise projektivem Kokern sind Kofaserungen. Dabei lassen sich projektive Moduln als Rektrakte von freien Moduln definieren. Eine projektive Auflösung von M ist dann nichts anderes als eine fibrant-kofibrante Ersetzung von M. In dieser Sprache erhält man dann sogenannte *totale derivierte Funktoren* $^L\otimes$ zum Tensorprodukt und $R\hom$ zum internen Hom-Funktor mit Werten in $\mathrm{Ho}\mathcal{C}h_R$. Um daraus die Funktoren Tor_R^k und Ext_R^k aus (1) zu erhalten, muss man noch die Homologie der resultierenden Komplexe bilden.

(3) Man kann zeigen, dass die Funktoren Tor_R^k in beiden Argumenten symmetrisch sind. Für Ext_R^k gilt immerhin, dass Derivieren im zweiten Argument das gleiche liefert wie Derivieren im ersten Argument — man braucht dazu aber injektive Auflösungen in Proposition 5.55 beziehungsweise eine andere Modellstruktur auf $\mathcal{C}h_R$ in (2).

5.59. Beispiel. Wir kennen bereits die Homologie des reell projektiven Raumes aus Beispiel 5.21. Da

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \cdot\,) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

erhalten wir Beispiel 5.21 (2) aus 5.21 (1), genauer

$$\tilde{H}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cong (\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k \text{ gerade und } 0 < k \leq n, \\ \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist,} \\ 0 \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) & \text{falls } k = n+1 \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn andererseits Multiplikation mit 2 in A invertierbar ist, dann erhalten wir 5.21 (3), da dann

$$A \otimes (\mathbb{Z}/2) = \mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/2) = 0\ .$$

5.60. Bemerkung. In Folgerung 5.70 sehen wir, dass die Koeffizientensequenz in Satz 5.57 für gewöhnliche Homologie stets spaltet, so dass

$$\tilde{H}_k(X;A) \cong \tilde{H}_k(X) \otimes A \ \oplus \ \mathrm{Tor}\big(\tilde{H}_{k-1}(X), A\big) \ .$$

Man könnte daher denken, dass $\tilde{H}(\,\cdot\,, A)$ im Vergleich zur gewöhnlichen ganzzahligen Homologie keine zusätzliche Information enthält. In Übung 5.94 sehen wir ein Beispiel dafür, dass das nicht stimmt: es gibt Räume X, Y, Abbildungen f, $g\colon X \to Y$ und eine Koeffizientengruppe A, so dass

$$\begin{aligned} f_* = g_*\colon \tilde{H}_k(X) &\longrightarrow \tilde{H}_k(Y) && \text{für alle } k, \text{ aber} \\ f_* \neq g_*\colon \tilde{H}_k(X;A) &\longrightarrow \tilde{H}_k(Y;A) && \text{für ein } k. \end{aligned}$$

Dieses Verhalten erklärt sich dadurch, dass die Spaltung in Folgerung 5.70 nicht natürlich ist.

5.f. Produkträume und die Künneth-Formel

In diesem Abschnitt betrachten wir die gewöhnliche Homologie von Produkten topologischer Räume. Dabei arbeiten wir in der Quillen-Modellstruktur, um alle beteiligten Räume durch CW-Komplexe zu ersetzen. Gleichzeitig nutzen wir aus, dass Produkte von CW-Komplexen in der Kategorie $\mathcal{T}$ nach Proposition 4.54 (4) wieder CW-Komplexe sind. Wir bezeichnen die Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten R-Moduln mit $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$, das ist gerade die volle Unterkategorie von $\mathcal{C}h_R$ der Kettenkomplexe mit trivialem Differential $d_\bullet = 0$.

5.61. Definition. Es seien $(C_\bullet, d_\bullet)$ und $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ zwei Kettenkomplexe über einem Hauptidealring R, dann definieren wir ihr *Tensorprodukt* in $\mathcal{C}h_R$ und ihr *Torsionsprodukt* in $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ durch

$$(C \otimes_R C')_k = \bigoplus_{a+b=k} C_a \otimes_R C_b \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Tor}_R(C, C')_k = \bigoplus_{a+b=k} \mathrm{Tor}_R(C_a, C'_b) \ .$$

Auf dem Tensorprodukt betrachten wir den Randoperator

$$d_{\otimes,k} = \sum_{a+b=k} (d_a \otimes \mathrm{id}_{C'_b} + (-1)^a \mathrm{id}_{C_a} \otimes d'_b) \ .$$

Die Vorzeichen in $d_\otimes$ sind so gewählt, dass

$$d_{\otimes,k} \circ d_{\otimes,k+1} = 0 \ .$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz. Dabei fassen wir $H_\bullet(X;R)$ und $H_\bullet(Y;R)$ wieder als Objekte von $\mathcal{G}r\mathcal{M}od_R$ auf.

5.62. Satz (Topologische Künneth-Formel). *Es seien X, Y gut punktierte topologische Räume und R ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \big(\tilde{H}(X;R) \otimes_R \tilde{H}(Y;R)\big)_k \longrightarrow \tilde{H}_k(X \wedge Y;R) \longrightarrow \big(\mathrm{Tor}_R(\tilde{H}(X;R), \tilde{H}(Y;R))\big)_{k-1} \longrightarrow 0$$

für alle k. Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Wir erinnern uns an die unreduzierte Homologie $H_\bullet(X;R) = \tilde{H}_\bullet(X_+;R)$ aus Bemerkung 5.5.

5.63. Folgerung. *Es seien X, Y topologische Räume und R ein Hauptidealring. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \big(H(X;R) \otimes_R H(Y;R)\big)_k \longrightarrow H_k(X \times Y;R) \longrightarrow \big(\mathrm{Tor}_R(H(X;R), H(Y;R))\big)_{k-1} \longrightarrow 0 \ ,$$

für alle k. Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Aufgrund von Bemerkung 5.5 und Beispiel 5.56 stimmen die Tor_R-Terme in den Sequenzen aus 5.62 und 5.63 überein.

BEWEIS. Wir ersetzen X und Y im obigen Satz durch X_+ und Y_+ und nutzen die Beziehung $(X \times Y)_+ = X_+ \wedge Y_+$, so dass

$$H_\bullet(X \times Y; R) = \tilde{H}_\bullet((X \times Y)_+; R) = \tilde{H}_\bullet(X_+ \wedge Y_+; R) \; . \qquad \square$$

5.64. FOLGERUNG. *Es sei $\Bbbk$ ein Körper, dann existieren natürliche Isomorphismen*

$$\big(H(X;\Bbbk) \otimes_\Bbbk H(Y;\Bbbk)\big)_k \cong H_k(X \times Y;\Bbbk) \; , \qquad \textit{und} \tag{1}$$

$$\big(\tilde{H}(X;\Bbbk) \otimes_\Bbbk \tilde{H}(Y;\Bbbk)\big)_k \cong \tilde{H}_k(X \wedge Y;\Bbbk) \; , \qquad \textit{falls } X, Y \textit{ gut punktiert sind.} \tag{2}$$

BEWEIS. Nach Beispiel 5.56 verschwindet in diesem Falle das Torsionsprodukt. $\square$

Der Beweis von Satz 5.62 besteht aus zwei Schritten. Zunächst konstruieren wir einen Isomorphismus zwischen dem zellulären Kettenkomplex eines Produktes von CW-Komplexen und dem Tensorprodukt der zellulären Kettenkomplexe der Faktoren. Anschließend zeigen wir, dass die Homologie eines Tensorproduktes von Kettenkomplexen in einer kurzen exakten Sequenz mit Tensor- und Torsionsprodukt der Homologien der Faktoren steht.

5.65. PROPOSITION. *Es seien X und Y CW-Komplexe und R ein Ring. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X \wedge Y; R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \xrightarrow{\cong} \big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X; R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \otimes \big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y; R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\big) \; .$$

Der analoge Satz für den singulären Kettenkomplex ist der Satz von Eilenberg-Zilber, und der obige Isomorphismus heißt dann auch Alexander-Whitney-Abbildung .

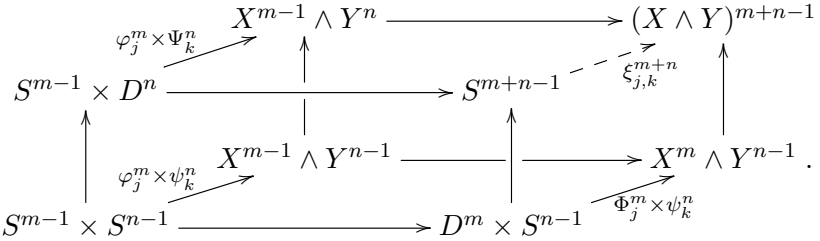
BEWEIS. Nach Proposition 4.54 (4) trägt $X \wedge Y$ in $\mathcal{T}_+$ wieder eine CW-Struktur. Wir betrachten die charakteristischen Abbildungen $\Phi^m_j \colon D^m \to X$ und $\Psi^n_k \colon D^n \to Y$ der Zellen e^m_j und e^n_k von X beziehungsweise Y für $j \in J^m$, $k \in K^n$. Dann sind

$$\Xi^{m+n}_{j,k} = \Phi^m_j \times \Psi^n_k \colon D^{m+n} \cong D^m \times D^n \longrightarrow X \times Y$$

die charakteristischen Abbildungen der Zellen $e^{m+n}_{j,k}$ von $X \times Y$. Wir erhalten den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_p(X \wedge Y; R) \cong R^{\oplus \bigcup_{m+n=p}(J^m \times K^n)} \cong \bigoplus_{m+n=p} R^{\oplus J^m} \otimes_R R^{\oplus K^n} \cong \big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X; R) \otimes \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y; R)\big)_p \; .$$

Wir zeigen Verträglichkeit mit d^{CW}. Die Verklebeabbildung $\xi^{m+n}_{j,k}$ ergibt sich als Pushout



Insbesondere trifft $\xi^{m+n}_{j,k}$ nur zwei Typen von $(m+n-1)$-Zellen von $X \wedge Y$, nämlich $e^{m+n-1}_{j',k}$ und $e^{m+n-1}_{j,k'}$, falls φ^m_j die Zelle $e^{m-1}_{j'}$ beziehungsweise ψ^n_k die Zelle $e^{n-1}_{k'}$ trifft. Seien $p^{m+n-1}_{j',k}$, $q^{m+n-1}_{j,k'} \colon (X \wedge Y)^{m+n-1} \to S^{m+n-1}$ die zugehörigen Kollaps-Abbildungen. Sei $p^{m-1}_{j'} \colon X^{m-1} \to S^{m-1}$ die Kollaps-Abbildung zu $e^{m-1}_{j'}$ und $q^n_k \colon Y^n \to S^n$ die Kollaps-Abbildung zu e^n_k, dann gilt

$$p^{m+n-1}_{j',k}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} = p^{m-1}_{j'} \wedge q^n_k \; , \qquad p^{m+n-1}_{j',k}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} = 0 \; ,$$

$$q^{m+n-1}_{j,k'}|_{X^{m-1} \wedge Y^n} = 0 \; , \qquad \text{und} \qquad q^{m+n-1}_{j,k'}|_{X^m \wedge Y^{n-1}} = p^m_j \wedge q^{n-1}_{k'} \; .$$

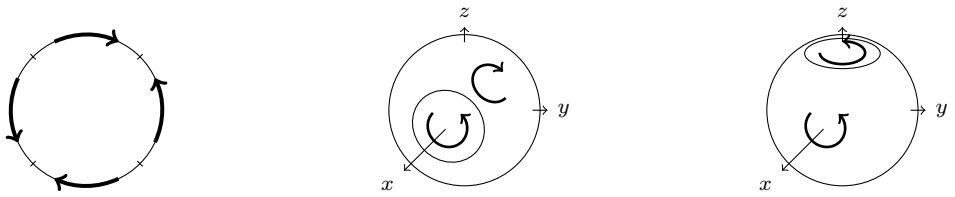


ABBILDUNG 5.2. Produkte von Zellen und ihre Ränder

Die Abbildungen $p^{m+n-1}_{j',k} \circ \xi^{m+n}_{j,k}$ und $q^{m+n-1}_{j,k'} \circ \xi^{m+n}_{j,k} \colon S^{m+n-1} \to S^{m+n-1}$ aus Definition 5.17 entsprechen gerade den Verkettungen

$$S^{m+n-1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^{m+n-1}/(D^m \times S^{n-1}) \cong S^{m-1}_+ \wedge S^n \xrightarrow{(p^{m-1}_{j'} \circ \varphi^m_j) \wedge \mathrm{id}} S^{m-1} \wedge S^n \cong S^{m+n-1} ,$$

$$S^{m+n-1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^{m+n-1}/(S^{m-1} \times D^n) \cong S^m \wedge S^{n-1}_+ \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge (q^{n-1}_{k'} \circ \psi^n_k)} S^m \wedge S^{n-1} \cong S^{m+n-1} .$$

Der Abbildungsgrad der rechten Abbildungen in der oberen Zeile ist gerade ein Koeffizient des Randoperators d^{CW}_X des Komplexes $C^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;R)$. In der unteren Zeile erhalten wir den analogen Koeffizienten von d^{CW}_Y. Es bleiben noch die Vorzeichen in Definition 5.61 zu erklären. Dazu betrachten wir die folgenden Verkettungen von Projektionen und überlegen uns wie in Abbildung 5.2, dass

$$\deg\bigl(S^{m+n-1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^{m-1}_+ \wedge S^n \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^{m+n-1}\bigr) = 1$$

$$\text{und} \qquad \deg\bigl(S^{m+n-1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^m \wedge S^{n-1}_+ \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S^{m+n-1}\bigr) = (-1)^m .$$

Ähnlich beweist man Natürlichkeit, das heißt, Verträglichkeit mit zellulären Abbildungen. □

5.66. SATZ (Algebraische Künneth-Formel). *Es seien $(C_\bullet, d_\bullet)$ und $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ zwei Kettenkomplexe über einem Hauptidealring R, und C'_k sei frei für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann existiert eine natürliche kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \bigl(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet)\bigr)_n \xrightarrow{\mu} H_n\bigl((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)\bigr) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_R\bigl(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet)\bigr)_{n-1} \longrightarrow 0$$

für alle n, mit $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$. Wenn auch C_ℓ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ frei ist, spaltet die obige Sequenz, aber nicht auf natürliche Weise.

Die obige Sequenz spaltet sogar, wenn nur einer der beiden Komplexe frei ist; das ist allerdings etwas schwerer zu zeigen.

BEWEIS. Es bezeichnen $Z'_\bullet$ und $B'_\bullet$ die Unterkomplexe der Zykel und Ränder von $(C'_\bullet, d'_\bullet)$, jeweils mit trivialem Randoperator. Da R ein Hauptidealring ist, sind $B'_k \subset C'_k$ als Untermoduln des freien Moduls Z'_k wieder frei. Wir erhalten spaltende kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow Z'_k \longrightarrow C'_k \xrightarrow{d'_k} B'_{k-1} \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

$$\text{und} \qquad 0 \longrightarrow (C_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \longrightarrow (C_\bullet \otimes C'_\bullet)_n \xrightarrow{\pm(\mathrm{id}_C \otimes d')_n} (C_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1} \longrightarrow 0 ,$$

etwa, indem wir für alle k ein Rechtsinverses $s_k \colon B'_{k-1} \to C'_k$ zu d'_k durch Wahl auf einer Basis von B'_{k-1} konstruieren. Das Vorzeichen von $(\mathrm{id}_C \otimes d')_k$ hängt wie in Definition 5.61 vom Grad

in $C_\bullet$ ab. Die Komplexe $Z'_\bullet$ und $B'_\bullet$ haben keinen Randoperator und sind frei. Daher ist Tensorieren mit $Z'_\bullet$ und $B'_\bullet$ jeweils ein exakter Funktor, und es folgt

$$\begin{aligned} & H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (Z'_\bullet, 0)\big) \cong \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big)_n \\ \text{und} \qquad & H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (B'_\bullet, 0)\big) \cong \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet\big)_n \ . \end{aligned}$$

Das Schlangenlemma 5.25 liefert die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big)_n \longrightarrow H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)\big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet\big)_{n-1} \xrightarrow{\partial} \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big)_{n-1} \longrightarrow \dots \quad (\dagger)$$

Wir betrachten $z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes B'_\bullet)_{n-1}$, um das Bild von $[z \otimes b'] = [z] \otimes b' \in H_{n-1}((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R B'_\bullet)$ unter ∂ zu bestimmen. Es sei $z \otimes c' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_n$ ein Urbild. Wie im Beweis des Schlangenlemmas 5.25 folgt

$$d_{\otimes,n}(z \otimes c') = \underbrace{(dz)}_{=0} \otimes c' \pm z \otimes (d'c') = z \otimes b' \in (Z_\bullet \otimes C'_\bullet)_{n-1} \ .$$

Da $b' \in B'_\bullet \subset Z'_\bullet$, ist $z \otimes b' \in Z_\bullet \otimes Z'_\bullet$ das gesuchte Urbild, und es folgt

$$\partial[z \otimes b'] = [z \otimes b'] = (\mathrm{id}_{C_\bullet} \otimes j_\bullet)_{n-1,*}[z \otimes b'] \in H_{n-1}\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R Z'_\bullet\big) \ ,$$

somit wird ∂ von der Inklusion $j_\bullet \colon B'_\bullet \to Z'_\bullet$ induziert.

Aus der langen exakten Sequenz (†) erhalten wir also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\mathrm{id}_{H(C_\bullet,d_\bullet)} \otimes j)_n \longrightarrow H_n\big((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet)\big) \longrightarrow \ker(\mathrm{id}_{H(C_\bullet,d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} \longrightarrow 0 \ .$$

Indem wir die freie Auflösung

$$0 \longleftarrow H_k(C'_\bullet, d'_\bullet) \longleftarrow Z'_k \xleftarrow{j_k} B'_k \longleftarrow 0$$

betrachten, schließen wir, dass

$$\begin{aligned} & \mathrm{coker}(\mathrm{id}_{H(C_\bullet,d_\bullet)} \otimes j)_n \cong \big(H(C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R H(C'_\bullet, d'_\bullet)\big)_n \\ \text{und} \qquad & \ker(\mathrm{id}_{H(C_\bullet,d_\bullet)} \otimes j)_{n-1} \cong \mathrm{Tor}_R\big(H(C_\bullet, d_\bullet), H(C'_\bullet, d'_\bullet)\big)_{n-1} \ . \end{aligned}$$

Damit ist die Exaktheit der Sequenz im Satz bewiesen. Da die Abbildung μ von der Inklusion

$$Z_n(C_\bullet \otimes Z'_\bullet) \cong (Z_\bullet \otimes Z'_\bullet)_n \longrightarrow Z_n(C_\bullet \otimes C'_\bullet)$$

induziert wird, hat sie die obige Gestalt.

Wenn $C_\bullet$ und $C'_\bullet$ frei sind, spaltet (*) und die analoge Sequenz für $C_\bullet$. Also finden wir Linksinverse $p_\bullet \colon C_\bullet \to Z_\bullet$ und $p'_\bullet \colon C'_\bullet \to Z'_\bullet$ zu den Inklusionen $Z_\bullet \to C_\bullet$ beziehungsweise $Z'_\bullet \to C'_\bullet$. Dann ist $(p \otimes p')_\bullet$ ein Linksinverses zu μ, falls wir zeigen können, dass μ auf $H_\bullet((C_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (C'_\bullet, d'_\bullet))$ wohldefiniert ist. Aber das ist der Fall, denn

$$(p \otimes p')(d_C \otimes \mathrm{id}_{C'} \pm \mathrm{id}_C \otimes d'C') \in B_\bullet \otimes Z'_\bullet + Z_\bullet \otimes B'_\bullet \subset \ker(Z_\bullet \otimes Z'_\bullet \to H_\bullet \otimes H'_\bullet) \ .$$

Also spaltet die Sequenz in diesem Fall, und der Satz ist bewiesen. □

Beweis von Satz 5.62. Es seien zunächst X und Y CW-Komplexe. Nach Satz 5.18 wird die gewöhnliche R-Homologie von X, Y und $X \wedge Y$ durch deren zelluläre Kettenkomplexe berechnet, deren einzelne Moduln nach Konstruktion alle frei über R sind. Somit folgt die topologische Künneth-Formel jetzt aus dem „Eilenberg-Zilber“-Satz 5.65 und der algebraischen Künneth-Formel 5.66.

Für gut punktierte Räume X, Y wählen wir CW-Approximationen $f \colon X' \to X$ und $g \colon Y' \to Y$ nach dem Approximationssatz 4.51. Nach Satz 5.44 (1) ist gewöhnliche Homologie — so, wie wir sie dort konstruiert haben — unter schwachen Äquivalenzen invariant. Also erhalten wir Isomorphismen

$$f_* \colon \tilde{H}_\bullet(X'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X; R) \qquad \text{und} \qquad g_* \colon \tilde{H}_\bullet(Y'; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(Y; R) \ .$$

Nach Lemma 5.35 sind die Funktoren $\tilde{H}_\bullet(\,\cdot\wedge Y';R)$ und $\tilde{H}_\bullet(X\wedge\,\cdot\,;R)$ ebenfalls unter schwachen Äquivalenzen invariant, da wir angenommen hatten, dass X gut punktiert ist, und wir erhalten Isomorphismen

$$\tilde{H}_\bullet(X'\wedge Y';R)\xrightarrow{\cong}\tilde{H}_\bullet(X\wedge Y';R)\xrightarrow{\cong}\tilde{H}_\bullet(X\wedge Y;R)\ .$$

Also gilt die Künneth-Formel auch für gut punktierte Räume X und Y.

Zu Abbildungen $f\colon X\to Z$ und $g\colon Y\to W$ und CW-Approximationen $X'\to X,\ldots,W'\to W$ erhalten wir nach Satz 4.51 zelluläre Abbildungen $f'\colon X'\to Z'$ und $g'\colon Y'\to W'$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z' \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ W' \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

kommutieren, und f', g' sind bis auf Homotopie eindeutig. Wegen der Natürlichkeitsaussage in Proposition 5.65 kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X'\wedge Y';R) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(f'\wedge g')_\#"'] & \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X';R)\otimes\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y';R) \arrow[d, "f'_\#\otimes g'_\#"] \\ \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Z'\wedge W';R) \arrow[r, "\cong"] & \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Z';R)\otimes\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(W';R)\ . \end{tikzcd}$$

Wir betrachten zum Schluss das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \tilde{H}_\bullet(X;R)\otimes_R\tilde{H}_\bullet(Y;R) \arrow[rr, dashed, "\cong"] \arrow[dd, "f_*\otimes g_*"'] & & \tilde{H}_\bullet(X\wedge Y;R) \arrow[dd, "(f\wedge g)_*"] \\ \tilde{H}_\bullet(X';R)\otimes_R\tilde{H}_\bullet(Y';R) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dd, "f'_*\otimes g'_*"'] & & \tilde{H}_\bullet(X'\wedge Y';R) \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[dd, "(f'\wedge g')_*"] & \\ & \tilde{H}_\bullet(Z;R)\otimes_R\tilde{H}_\bullet(W;R) \arrow[rr, dashed, "\cong"] & & \tilde{H}_\bullet(Z\wedge W;R)\ . \\ \tilde{H}_\bullet(Z';R)\otimes_R\tilde{H}_\bullet(W';R) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "\cong"] & & \tilde{H}_\bullet(Z'\wedge W';R) \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

Die Quadrate rechts und links kommutieren, da gewöhnliche Homologie und das Tensorprodukt Funktoren sind. Das vordere Quadrat kommutiert nach obiger Vorüberlegung, und da Homologie von Komplexen ein Funktor ist. Nach unser Konstruktion der gestrichelten Pfeile kommutieren das obere und das untere Quadrat. Also kommutiert auch das hintere Quadrat, und die Natürlichkeit der linken Abbildung in der Künneth-Sequenz ist gezeigt.

Um die Natürlichkeit der rechten Abbildung zu zeigen, benötigen wir auch die Funktorialität des Torsionsproduktes aus Proposition 5.55. □

5.67. Bemerkung. Da wir zelluläre Homologie hier zum ersten Mal benutzt haben, um neue Morphismen zu konstruieren, und nicht, um bereits bekannte Morphismen zu beschreiben, wollen wir uns kurz überlegen, dass die Abbildungen in der Künneth-Sequenz in Satz 5.62 nicht von der Wahl der CW-Struktur (also auch nicht von der CW-Approximation) abhängen. Hierbei ist entscheidend, dass alle benutzten Konstruktionen natürlich sind.

Seien also etwa zwei CW-Approximationen $f_i\colon X'_i\to X$ mit $i=0,1$, gegeben, dann existieren nach Satz 4.51 bis auf Homotopie eindeutige zelluläre Abbildungen $k\colon X'_0\to X'_1$ und $\ell\colon X'_1\to X'_0$, so dass die Abbildungen

$$f_0\sim f_1\circ k\ ,\qquad f_1\sim f_0\circ\ell\ ,\qquad \ell\circ k\sim\mathrm{id}_{X'_0}\ ,\qquad \text{und}\qquad k\circ\ell\sim\mathrm{id}_{X'_1}$$

jeweils homotop sind. Mit ähnlichen Überlegungen wie im obigen Beweis kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}_\bullet(X_0';R)\otimes_R\tilde{H}_\bullet(Y';R) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X_0'\wedge Y';R) \\
{\scriptstyle k_*\otimes\mathrm{id}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \ell_*\otimes\mathrm{id}} & \searrow^{\cong} & \downarrow\uparrow{\scriptstyle (k\wedge\mathrm{id})_*,\ (\ell\wedge\mathrm{id})_*}\ \searrow^{\cong} \\
\tilde{H}_\bullet(X_1';R)\otimes_R\tilde{H}_\bullet(Y';R) & \nearrow_{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X;R)\otimes_R\tilde{H}_\bullet(Y;R) \xrightarrow[\cong]{} \tilde{H}_\bullet(X\wedge Y;R)\ . \\
 & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_\bullet(X_1'\wedge Y';R)\ \nearrow_{\cong}
\end{array}$$

Hieraus folgt, dass der hintere Pfeil unabhängig von der Wahl der CW-Approximation ist.

5.68. Beispiel. Wir betrachten den n-dimensionalen Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. Es gilt

$$H_k(S^n;R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0,\ n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

insbesondere sind die Homologiemoduln frei. Wegen Bemerkung 5.5, Beispiel 5.56 und Folgerung 5.63 gilt

$$H_k(T^n;R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}_k(T^n;R) \cong \begin{cases} R^{\binom{n}{k}} & \text{für } 1 \le k \le n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.69. Beispiel. Wir betrachten die Räume $S^2 \times S^4$ und $\mathbb{C}P^3$. Wegen Beispiel 5.20 und Folgerung 5.63 gilt

$$H_k(S^2\times S^4;R) \cong H_k(\mathbb{C}P^3;R) \cong \begin{cases} R & \text{für } k = 0,\ 2,\ 4 \text{ oder } 6, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind diese Räume nicht homotopieäquivalent, denn nach Beispiel 3.43 (1) gilt

$$\pi_3(\mathbb{C}P^3) \cong \pi_3(S^7) = 0\ ,$$

aber mit Beispiel 3.43 (1) und Übung 3.105 gilt auch

$$\pi_3(S^2\times S^4) \cong \pi_3(S^2)\times\pi_3(S^4) \cong \mathbb{Z}\ .$$

Wir sehen also

(1) Homologie- und Homotopiegruppen enthalten verschiedene Information.
(2) Trotz des homologischen Satzes 5.50 von Whitehead sind einfach zusammenhängende Räume mit isomorphen Homologiegruppen nicht notwendigerweise homotopieäquivalent.
(3) Wegen dieses Satzes gibt es weder eine Abbildung $f\colon S^2\times S^4 \to \mathbb{C}P^3$ noch eine Abbildung $g\colon \mathbb{C}P^3 \to S^2\times S^4$, die auf $H_\bullet(\,\cdot\,;R)$ einen Isomorphismus induziert.

In Übung 6.103 benutzen wir Produkte auf der Kohomologie, um die obigen Räume zu unterscheiden.

Als nächstes Beispiel betrachten wir X beliebig und $Y = MA_n$ einen Moore-Raum. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass

$$\tilde{H}_{k+n}(MA_n\wedge X) \cong \tilde{H}_k(X;A)\ .$$

Die kurze exakte Sequenz in der Künneth-Formel 5.62 ist die gleiche wie im universellen Koeffiziententheorem 5.57. Mit dem obigen Beweis erhalten wir den folgenden wichtigen Zusatz.

5.70. Folgerung (Universelles Koeffiziententheorem, Zusatz). *Es sei A eine abelsche Gruppe und $\tilde{h} = \tilde{H}$ gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Dann spaltet die kurze exakte Sequenz im universellen Koeffiziententheorem 5.57, allerdings nicht natürlich.*

Ein Beispiel folgt in Übung 5.98. Sei allgemeiner A ein R-Modul, dann existiert eine natürliche Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X;R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X;A) \longrightarrow \operatorname{Tor}_R\big(\tilde{H}_{k-1}(X;R), A\big) \longrightarrow 0\,;$$

diese spaltet, aber nicht natürlich. Zum Beweis ersetzen wir X durch einen CW-Komplex und argumentieren ähnlich wie im Beweis der algebraischen Künneth-Formel 5.66, siehe Übung 6.97.

5.g. Übungen zu Kapitel 5

Übungen zu Abschnitt 5.a.

5.71. Übung. Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \ldots$$

in $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Für alle n existiert $k_n \colon B_n \to A_n$ mit $k_n \circ f_n = \mathrm{id}_{A_n}$.
(2) Für alle n exisiert $\ell_n \colon C_n \to B_n$ mit $g_n \circ \ell_n = \mathrm{id}_{C_n}$.
(3) Für alle n existiert ein Isomorphismus $\varphi_n \colon B_n \to A_n \oplus C_n$, so dass $\varphi_n \circ f_n$ die natürliche Inklusion und $g_n \circ \varphi_n^{-1}$ die natürliche Projektion ist,.

Zeigen Sie außerdem, dass dann $h_n = 0$ gilt, und dass es natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der möglichen Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (1), $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (2), sowie der $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (3) gibt.

5.72. Übung. Es sei $X = \{0, \ldots, n\}$ versehen mit der diskreten Topologie, und $0 \in X$ sei der Basispunkt. Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein reduzierter Homologiefunktor. Beschreiben Sie den Isomorphismus $\tilde{h}_n(X_+) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(S^0)$ aus Bemerkung 5.5 (1) in Termen von $\tilde{h}_n(S^0)$ mit Hilfe des Summenaxioms 5.2 (3), indem Sie X und X_+ darstellen als

$$X = \bigvee_{i=1}^{n} S^0 \qquad \text{und} \qquad X_+ = \bigvee_{i=0}^{n} S^0\,.$$

5.73. Übung. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 an einer der beiden fehlenden Stellen, also bei $\tilde{h}_n(X)$ oder bei $\tilde{h}_n(A \cap B)$.

5.74. Übung. Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen seien, und es gelten Zusammenhangsvoraussetzungen wie in Folgerung 3.65. Konstruieren Sie ein Analogon zur Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 für die „unstabilen“ Homotopiegruppen $\pi_\bullet$ wie in Bemerkung 5.9. Wie weit lässt sich diese Sequenz nach links beziehungsweise rechts fortsetzen? Für π_1 kennen wir bereits den Satz 2.39 von Seifert-van Kampen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt er sich in diese Sequenz „einbauen“?

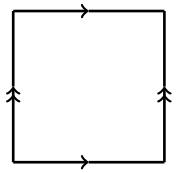
Übungen zu Abschnitt 5.b.

5.75. Übung. Es sei $n > 0$, und es sei A Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie $H_k(\mathbb{C}P^n; A)$ und $H_k(\mathbb{H}P^n; A)$ für alle $k \geq 0$.

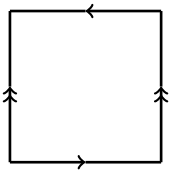
5.76. Übung. Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X;\mathbb{Z})$ und $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für die folgenden Räume:

(1) Fassen Sie den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als CW-Komplex auf, indem Sie in der linken Skizze gegenüberliegende Seiten identifizieren.
(2) Betrachten Sie die Kleinsche Flasche X, die aus einem Quadrat durch Identifikation gegenüberliegender Seiten gemäß der rechten Skizze entsteht. Fassen Sie X für die Berechnung der Homologie als CW-Komplex mit Basispunkt, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle

auf.



Torus



Kleinsche Flasche

5.77. Übung. Zeigen Sie:

(1) Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen zwischen zwei gegebenen Komplexen. Sie ist mit der Komposition von Kettenabbildungen verträglich.
(2) Kettenhomotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Kategorie der Kettenkomplexe.

5.78. Übung. Es seien X, Y punktierte CW-Komplexe und M ein R-Modul. Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine zelluläre Abbildung $h\colon I_+ \wedge X \to Y$, wobei I die CW-Struktur mit einer 1- und zwei 0-Zellen trage. Zeigen Sie: zelluläre Homotopien induzieren Kettenhomotopien zwischen den Abbildungen $f_\#$ und $g_\#\colon \tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) \to C_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y;M)$.

5.79. Übung. Sei $h_\bullet$ eine Kettenhomotopie zwischen Kettenabbildungen $f_\bullet$ und $g_\bullet\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (E_\bullet, e_\bullet)$ über R. Konstruieren Sie mit Hilfe von $h_\bullet$ eine Linkshomotopie zwischen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ in $\mathcal{C}h_R$ im Sinne von Definition 4.60, und zwar mit dem Zylingerobjekt $(ZC_\bullet, zd_\bullet)$, mit

$$ZC_k = C_k \oplus C_k \oplus C_{k-1} \qquad \text{und} \qquad zd_k = \begin{pmatrix} d_k & & -\mathrm{id}_{C_{k-1}} \\ & d_k & \mathrm{id}_{C_{k-1}} \\ & & -d_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei wollen wir unter einer schwachen Äquivalenz eine Kettenabbildung verstehen, die Isomorphismen auf allen Homologiemoduln induziert.

5.80. Übung. Seien $f_\bullet$, $g_\bullet$, $h_\bullet$ wie in der vorigen Aufgabe. Konstruieren Sie aus diesen Daten eine Rechtshomotopie zwischen $f_\bullet$ und $g_\bullet$ in $\mathcal{C}h_R$.

5.81. Übung. Beweisen Sie das Schlangenlemma 5.25.

(1) Zeigen Sie: der Verbindungshomomorphismus ist wohldefiniert und natürlich als Transformation zwischen zwei Funktoren von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in der Kategorie $\mathcal{C}h_\mathcal{C}$ der Kettenkomplexe in $\mathcal{C}$ in die Kategorie $\mathcal{C}$.
(2) Beweisen Sie die Exaktheit der angegebenen Sequenz an mindestens einer Stelle.

5.82. Übung. Es sei R ein Ring mit Eins. Wir identifizieren R mit dem Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

wobei sich R in Grad 0 befinde.

(1) Sei $(C_\bullet, d_\bullet)$ ein Kettenkomplex in $\mathcal{C}h_R$ und $c_k \in C_k$. Unter welchen Bedingungen existiert ein Morphismus $R \to C_\bullet$ vom Grad k, der $1 \in R$ auf c_k abbildet? Ist er eindeutig?
(2) Sei c_k wie oben, und bezeichne $c_k\colon R \to C_\bullet$ den obigen Morphismus. Was beschreibt $c_{k*} = H_\bullet(c_k)\colon H_\bullet(R,0) \to H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet)$?
(3) Sei $f\colon (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ eine Abbildung vom Grad a. Welchen Grad haben die Morphismen $f \circ c_k$ und $f_* \circ c_{k*}$, und was bezeichnen sie?

5.83. Übung. Beweisen Sie Satz 5.31.

5.84. Übung. Es sei Y Unterkomplex eines CW-Komplexes X, und es sei M ein R-Modul. Nach Bemerkung 5.5 (2) definiert man relative Homologiemoduln $H_k(X,Y;M) = \tilde{H}_k(X/\!\!/Y;M)$. Zeigen Sie

(1) Es gilt $H_k(X,Y;M) \cong \tilde{H}_k(X/Y;M)$.
(2) Wir betrachten $\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y;M), d^{\mathrm{CW}}\big)$ als Unterkomplex von $\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M), d^{\mathrm{CW}}\big)$, dann existiert ein natürlicher Quotientenkomplex $\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M)/\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y;M), \bar{d}^{\mathrm{CW}}\big)$.
(3) Der Komplex aus (2) ist natürlich isomorph zu $\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X/Y;M), d^{\mathrm{CW}}\big)$.

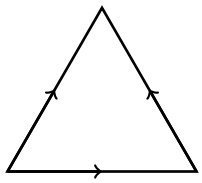
Übungen zu Abschnitt 5.c.

5.85. Übung. Vergleichen Sie die Stabilisierungs-Isomorphismen $\sigma_\bullet$ aus Proposition 5.34 mit den Isomorphismen aus Satz 5.10.

Übungen zu Abschnitt 5.d.

5.86. Übung. Es sei R ein Ring und $\mathcal{M}od_R$ die Kategorie der (Rechts-) R-Moduln. Beweisen Sie Satz 5.44 für R, indem Sie ein R-Modul M als abelsche Gruppe auffassen, und Elemente $r \in R$ als Endomorphismen von M. Interpretieren Sie $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;M)$ als R-Modul und beweisen Sie die Aussagen (1)–(3).

5.87. Übung. Die „topologische Narrenkappe“ X entsteht, indem man bei einem Dreieck alle drei Seiten gemäß der Skizze identifiziert. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X;\mathbb{Z}) = 0$.



(1) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X.
(2) Zeigen Sie, dass X zusammenziehbar ist.
(3) *Zusatz:* Geben Sie eine explizite Homotopie $X \times I \to X$ zwischen id_X und der Nullabbildung an.
(4) *Zusatz:* Basteln Sie ein Modell.

Übungen zu Abschnitt 5.e.

5.88. Übung. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Überprüfen Sie, dass Tensorprodukt und Hom-Funktor über R mit $E = R$ alle Eigenschaften aus Definition 4.26 und Bemerkung 4.28 erfüllen. Somit ist die Kategorie $(\mathcal{M}od_R, \otimes_R, R)$ monoidal und abgeschlossen. Wie lautet ihr Exponentialgesetz?

5.89. Übung. Es sei M ein Objekt in einer abgeschlossenen symmetrischen monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$, siehe Definition 4.26 und Beispiel 4.27. Zeigen Sie:

(1) Man kann $\hom(\,\cdot\,,M)$ auf zwei Weisen als Funktor auffassen:

$$\hom(\,\cdot\,,M)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\,\mathrm{op}} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \hom(\,\cdot\,,M)\colon \mathcal{C}^{\,\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\ .$$

(2) Die obigen Funktoren sind zueinander adjungiert:

$$\hom(\,\cdot\,,M)\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}^{\,\mathrm{op}} : \hom(\,\cdot\,,M)\ .$$

5.90. Übung. Es sei R ein Hauptidealring, r, $s \in R^\times$, und B ein R-Modul. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Tor}(R/r, B) \cong \hom(R/r, B) \cong \{\, b \in B \mid br = 0 \,\} \subset B\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{Ext}(R/r, B) \cong (R/r) \otimes B \cong B/rB\,, \tag{2}$$

$$\operatorname{Tor}(R/r, R/s) \cong \operatorname{Ext}(R/r, R/s) \cong (R/r) \otimes (R/s) \cong \hom(R/r, R/s) \cong R/(r, s)\,, \tag{3}$$

wobei (r, s) das von r und s erzeugte Ideal in R bezeichne.

5.91. Übung. Zeigen Sie, dass sich Tor und Ext unter direkten Summen und Produkten analog zu $\otimes$ und hom in Bemerkung 5.54 verhalten.

5.92. Übung. Es sei R ein Hauptidealring und A, B seien R-Moduln. Definiere den Torsionsuntermodul

$$\operatorname{Tor}_R A = \{\, a \in A \mid \text{es gibt } r \in R \setminus \{0\}, \text{ so dass } ra = 0 \,\}.$$

Zeigen Sie:

(1) Der Modul $A/\operatorname{Tor}_R A$ ist torsionsfrei.
(2) Jeder endlich erzeugte Untermodul von $A/\operatorname{Tor}_R A$ ist frei.
(3) Es gilt $\operatorname{Tor}_R(B, A/\operatorname{Tor}_R A) = 0$.
(4) Es gilt $\operatorname{Tor}_R(B, \operatorname{Tor}_R A) = \operatorname{Tor}_R(B, A)$.

Hinweis: Jedes Element in einem Tensorprodukt $X \otimes Y$ kann als endliche Linearkombination von Elementen der Form $x \otimes y$ mit $x \in X$, $y \in Y$ geschrieben werden.

5.93. Übung. Eine Erweiterung von A durch B ist eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

bis auf Isomorphie, wobei zwei solche Sequenzen isomorph heißen, wenn es einen Sequenzabbildung zwischen ihnen gibt, die auf A und B jeweils durch die Identität gegeben ist. Zeigen Sie:

(1) Eine freie Auflösung von A liefert eine bis auf Kettenhomotopie eindeutige Sequenzabbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{a} & A_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

(2) Dann ist $f \in \hom(A_1, B)$ bis auf ein Element $h \circ a$ mit $h \in \hom(A_0, B)$ wohlbestimmt, wir erhalten also eine Klasse $[f] \in \operatorname{coker}(\hom(A_0, B) \to \hom(A_1, B)) = \operatorname{Ext}_R(A, B)$.
(3) Die obige Zuordnung liefert eine Bijektion von der Menge der Erweiterungen in die Menge $\operatorname{Ext}_R(A, B)$.

5.94. Übung. Wir betrachten $A = \mathbb{Z}/n$ und konstruieren den Moore-Raum MA_k für $k \geq 2$, indem wir eine $(k+1)$-Zelle mit einer Abbildung $\varphi\colon S^k \to S^k$ vom Grad n an S^k ankleben. Indem wir das k-Skelett S^k auf einen Punkt abbilden, erhalten wir die Kollaps-Abbildung $f\colon MA_k \to MA_k/S^k \cong S^{k+1}$. Außerdem sei $g\colon MA_k \to S^{k+1}$ die konstante Abbildung. Zeigen Sie:

$$f_* = g_* = 0\colon \tilde{H}_\bullet(MA_k; \mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1}; \mathbb{Z})\,, \tag{1}$$

$$g_* = 0\colon \tilde{H}_\bullet(MA_k; A) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1}; A)\,, \tag{2}$$

$$f_{k+1}\colon \tilde{H}_{k+1}(MA_k; A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k+1}(S^{k+1}; A) \cong A\,. \tag{3}$$

5.95. Übung. Seien A, B abelsche Gruppen. Wir betrachten den Raum $[MA_n, MB_n]$ der punktierten Abbildungen von MA_n nach MB_n bis auf Homotopie.

(1) Zeigen Sie mit Hilfe des Freudenthalschen Einhängungssatzes 3.76 und der Puppe-Sequenz aus Satz 4.67 (3), dass Stabilisieren für $n \geq 3$ den folgenden Isomorphismus liefert:

$$[MA_n, MB_n] \xrightarrow{S} [MA_{n+1}, MB_{n+1}] \ .$$

(2) Konstruieren Sie mit Hilfe der Puppe-Sequenz eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}\big(A, \pi_{n+1}MB_n\big) \longrightarrow [MA_n, MB_n] \longrightarrow \hom(A, B) \longrightarrow 0 \ .$$

(3) Es sei $n \geq 3$. Zeigen Sie mit der Homotopiesequenz 3.75 für Kofaserungen, dass

$$\pi_{n+1}(MB_n) \cong B \otimes \mathbb{Z}/2 = B/2B \ .$$

(4) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ext}\big(A, B/2B\big) = 0$, wenn Multiplikation mit 2 in B surjektiv oder in A injektiv ist.

Man beachte, dass die Sequenz in (2) im Allgemeinen nicht spaltet.

5.96. Übung. Es sei A ein R-Modul, und es gelte $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, A/2A) = 0$. Für $n \geq 3$ liefert die Modulstruktur auf A nach der vorangegangenen Aufgabe eine Abbildung

$$R \longrightarrow \hom_{\mathbb{Z}}(A, A) \cong [MA_n, MA_n] \ .$$

Zeigen Sie, dass man für jeden Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$, jeden Raum X und jedes k die Gruppe $\tilde{h}_k(X; A)$ als R-Modul auffassen kann. Man erhält also einen $\mathcal{M}od_R$-wertigen Homologiefunktor.

5.97. Übung. Es sei $f\colon MA_n \to MB_n$ eine stetige punktierte Abbildung zwischen Moore-Räumen, so dass die induzierte Abbildung $f_*\colon A \cong \tilde{H}_n(MA_n) \to B \cong \tilde{H}_n(MB_n)$ injektiv ist. Zeigen Sie

(1) Dann ist der reduzierte Abbildungskegel Cf ein Moore-Raum zu $C = B/f_*A$.

(2) Für jeden Homologiefunktor $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ und jeden Raum X erhalten wir die natürliche lange exakte *Bockstein-Sequenz*

$$\cdots \longleftarrow \tilde{H}_k(X; C) \longleftarrow H_k(X; B) \longleftarrow H_k(X; A) \xleftarrow{\partial} H_{k+1}(X; C) \longleftarrow \cdots$$

5.98. Übung. Wir fassen $A = \mathbb{Z}/n$ als $\mathbb{Z}$-Modul auf. Sei MA_k der Moore-Raum und $f\colon MA_k \to S^{k+1}$ die Kollaps-Abbildung aus Übung 5.94.

(1) Geben Sie die Koeffizientensequenzen für $\tilde{H}_{k+1}(MA_k; A)$ und $\tilde{H}_{k+1}(S^{k+1}; A)$ aus Satz 5.57 an, und stellen Sie die von f induzierte Sequenzabbildung in einem kommutativen Diagramm dar.

(2) Überprüfen Sie, dass beide Koeffizientensequenzen spalten, und dass die Spaltungen nicht natürlich sind.

Übungen zu Abschnitt 5.f.

5.99. Übung. Präzisieren Sie die Aussage, dass der in Proposition 5.65 konstruierte Isomorphismus

$$\big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X \wedge Y; R), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \xrightarrow{\cong} \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(X; R), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big) \otimes \big(\tilde{C}_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y; R), d_\bullet^{\mathrm{CW}}\big)$$

natürlich ist, und beweisen Sie sie.

5.100. Übung. Wir wollen I^n als CW-Komplex mit $\binom{n}{k}\, 2^{n-k}$ Zellen der Dimension k darstellen. Wir orientieren $I^n \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis, und wir orientieren die Rand-Hyperflächen von I^n durch solche Basen des tangentialen $(n-1)$-dimensionalen Vektorraums, dass Voranstellen des äußeren Normalenvektors wieder eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ liefert.

(1) Beschreiben Sie den zellulären Rand der n-Zelle von I^n.

(2) Betrachten Sie jetzt $I^m \times I^n = I^{m+n}$ und überprüfen Sie, dass sich der Rand der $(m+n)$-Zelle wie in Proposition 5.65 verhält.

5.101. Übung. Es sei $A = \mathbb{Z}/n$ und $B = \mathbb{Z}/m$ und k, $\ell \geq 2$.

(1) Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge MA_k)$ und $\tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge S^{k+1})$.
(2) Sei $f\colon MA_k \to S^{k+1}$ die obige Kollaps-Abbildung. Bestimmen Sie
$$(\mathrm{id}_{MB_\ell} \wedge f)_*\colon \tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge MA_k) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(MB_\ell \wedge S^{k+1}) \ .$$
(3) Konstruieren Sie wie in Übung 5.98 ein Beispiel dafür, dass die Künneth-Sequenz nicht natürlich spaltet.

5.102. Übung. Es seien X, Y gut punktierte, $(n-1)$- beziehungsweise $(m-1)$-zusammenhängende Räume.

(1) Zeigen Sie, dass $X \wedge Y$ ein $(m+n-1)$-zusammenhängender Raum ist.
(2) Bestimmen Sie $\pi_{m+n}(X \wedge Y)$, falls m, $n \geq 2$.
(3) Zusatz: was können Sie über die restlichen Fälle aussagen?

KAPITEL 6

Kohomologie

Kohomologie ist ein dualer Begriff zur Homologie, und wird ebenfalls durch Eilenberg-Steenrod-Axiome charakterisiert. Daher übertragen sich viele technische Resultate fast automatisch, beispielsweise existiert ein zellulärer Kokettenkomplex, der die gewöhnliche Kohomologie von CW-Komplexen ausrechnet.

Ausgehend von der zellulären Kohomologie beweisen wir ein universelles Koeffiziententheorem, das Kohomologie mit Homologie in Verbindung bringt. Auch können wir einen Spezialfall der Künneth-Formel leicht beweisen. Schließlich konstruieren wir noch Produkte auf der zellulären Kohomologie, sowie eine Wirkung auf zellulärer Homologie.

In der zweiten Hälfte konstruieren wir Kohomologiefunktoren aus Ω-Spektren. Eilenberg-Mac Lane-Spektren liefern gewöhnliche Kohomologiefunktoren. Als wichtige Beispiele allgemeiner Kohomologiefunktoren betrachten wir K-Theorie und Bordismustheorie. Da die Thom-Spektren für Bordismen keine Ω-Spektren sind, führen wir am Ende des Kapitels die Kategorie von CW-Spektren ein; insbesondere überlegen wir uns einen sinnvollen Begriff für Morphismen von Spektren.

6.a. Axiome für Kohomologiefunktoren

Wir beginnen mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen und geben einige Konsequenzen an. Da vieles genauso wie in Kapitel 5 funktioniert, lassen wir die Beweise weg.

Die folgende Definition ist dual zu Definition 5.2. Wir arbeiten wieder in einer „schönen“ Kategorie $\mathcal{T}_+$ punktierter topologischer Räume, etwa $\mathcal{T}_+ = k\mathcal{T}op_+$ oder $\mathcal{T}_+ = kw\mathcal{H}_+$, versehen mit einer passenden Modellstruktur wie der Quillen- oder der Strøm-Modellstruktur. Aus technischen Gründen werden wir später wieder meistens die Quillen-Modellstruktur bevorzugen, da sie uns erlaubt, alle Räume durch CW-Komplexe zu ersetzen.

Unsere Kohomologiefunktoren sollen Werte in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ der Moduln über einem kommutativen Ring R annehmen. Wie immer ist $R = \mathbb{Z}$ ein wichtiger Spezialfall.

6.1. Definition. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Kohomologiefunktor* $\left(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet\right)$ mit Werten in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ besteht aus einer Familie kontravarianter Funktoren

$$\tilde{h}^\bullet = \left(\tilde{h}^n \colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R\right)_{n\in\mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen $\delta_\bullet = (\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\delta_n(X,A)\colon \tilde{h}^n(A) \to \tilde{h}^{n+1}(X/A)$ für alle Kofaserungen (X,A), die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

(1) *Homotopieinvarianz.* Für jede schwache Äquivalenz $f\colon X \to Y$ ist $\tilde{h}^n\colon \tilde{h}^n Y \to \tilde{h}^n X$ ein Isomorphismus.
(2) *Kohomologiesequenz.* Für jede Kofaserung (X,A) ist die folgende Sequenz exakt:

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^n p} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\tilde{h}^n \iota} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta_n} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1} p} \ldots$$

(3) *Summenaxiom.* Sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie gut punktierter Räume, dann ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_i\colon X_i \to \bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ induzierte Abbildung

$$\prod_{i\in I} \tilde{h}^n \iota_i\colon \tilde{h}^n\left(\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \tilde{h}^n(X_i)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt $\left(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet\right)$ einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Kohomologiefunktor* mit *Koeffizienten* M in $\mathcal{M}od_R$, wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

(4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}^n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In (3) brauchen wir das Produkt anstelle des Koproduktes in 5.2 (3), um einen Pfeil in die richtige Richtung definieren zu können. Das sieht auf den ersten Blick harmlos aus, macht aber später bei „großen“ Räumen Probleme. Zum ersten Mal erleben wir diesen Effekt bei der Künneth-Formel, siehe Satz 6.21. Für $\tilde{h}^n f$ schreiben wir auch kurz f^*.

6.2. Bemerkung. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften.

(1) Wie in Lemma 5.4 gilt

$$\tilde{h}^\bullet(\mathrm{pt}) = 0\ .$$

für jeden reduzierten Kohomologiefunktor $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$.

(2) Das Summenaxiom folgt im Falle eines endlichen Bouquets aus den anderen Axiomen, siehe Bemerkung 5.7.

(3) Wie in Bemerkung 5.5 definieren wir einen unreduzierten Kohomologiefunktoren $(h^\bullet, \delta_\bullet)$ zu $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ durch

$$h^k(X) = \tilde{h}^k(X_+)$$

und erhalten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{h}(S^0) \longrightarrow h(X) \longrightarrow \tilde{h}(X) \longrightarrow 0\ .$$

Sobald man einen Basispunkt in X auszeichnet, erhält man eine Spaltung dieser Sequenz. Für Paare (X, Y) definieren wir die relative Kohomologie $h^k(X, Y) = \tilde{h}^k(X/\!/Y)$.

(4) Für je zwei im Sinne von Definition 4.60 homotope Abbildungen $f,\ g\colon X \to Y$ gilt

$$f^* = g^*\colon \tilde{h}^n(Y) \longrightarrow \tilde{h}^n(X)\ .$$

Im Folgenden meinen wir stets reduzierte Kohomologiefunktoren, solange wir nichts anderes sagen. In der Notation werden wir den Verbindungshomomorphismus $\delta_\bullet$ oft weglassen. Das folgende Resultat wird genauso bewiesen wie der analoge Satz 5.6.

6.3. Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es seien $(A, A\cap B)$ und $(B, A\cap B)$ Kofaserungen und $X = A \cup B$ ihr Pushout. Es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein allgemeiner Kohomologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{a} & A \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B & \xrightarrow{j} & X\ . \end{array}$$

Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus $\delta\colon \tilde{h}^n(A\cap B) \to \tilde{h}^{n+1}(X)$, so dass die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{h}^{n-1}(A\cap B) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \tilde{h}^n(A) \oplus \tilde{h}^n(B) \xrightarrow{a^* - b^*} \tilde{h}^n(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

exakt ist.

BEWEIS. Wir drehen im Beweis von Satz 5.6 alle Pfeile um. □

6.4. FOLGERUNG. *Es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein allgemeiner reduzierter Kohomologiefunktor und k, $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$. Dann existiert für jeden gut punktierten Raum X ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}^k(S^n X) \cong \tilde{h}^{k-n}(X) \; . \tag{1}$$

Falls $\tilde{h}_\bullet$ ein gewöhnlicher reduzierter Kohomologiefunktor mit Koeffizienten M in $\mathcal{M}od_R$ ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}^k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \, . \end{cases} \tag{2}$$

Auch über Abbildungen zwischen Sphären können wir Aussagen machen, analog zu Satz 5.11.

6.5. FOLGERUNG. *Es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein Kohomologiefunktor, es seien $k \in \mathbb{Z}$, m, $n \in \mathbb{N}$, und $f\colon S^m \to S^n$ sei stetig.*

(1) *Falls $m < n$, gilt $f^* = 0\colon \tilde{h}^k(S^n) \to \tilde{h}^k(S^m)$.*
(2) *Falls $m = n$, gilt $f^* = \deg f\colon \tilde{h}^k(S^n) \to \tilde{h}^k(S^n)$.*
(3) *Falls $m > n$ und $\tilde{h}^\bullet$ das Dimensionsaxiom 6.1 (4) erfüllt, gilt $f^* = 0\colon \tilde{h}^k(S^n) \to \tilde{h}^k(S^m)$.*

Aussage (3) muss für allgemeine Kohomologiefunktoren nicht gelten.

6.b. Der abgeleitete inverse Limes

Bei der Konstruktion der zellulären Homologie haben wir benutzt, dass Homologiefunktoren, die das Summenaxiom 5.2 (3) erfüllen, mit Kolimiten aufsteigender Folgen von Unterkomplexen eines CW-Komplexes vertauschen. Für Kohomologiefunktoren stimmt das nicht mehr. In Abschnitt 5.e hatten wir bereits die Ableitungen Tor und Ext von Tensorprodukt und internem Hom-Funktor kennengelernt. Hier führen wir eine Ableitung des inversen Limes ein, die wir brauchen, um ein Analogon von Proposition 5.13 für Kohomologiefunktoren zu formulieren.

Es sei $\mathcal{I}$ die Kategorie aus Beispiel 4.9 (3), erzeugt Morphismen

$$0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow \cdots \; .$$

Unter einem *inversen System* in einer Kategorie $\mathcal{C}$ verstehen wir einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, also ein Diagramm der Form

$$A_0 \xleftarrow{f_1} A_1 \xleftarrow{f_2} A_2 \longleftarrow \cdots \; .$$

Den (*inversen*) *Limes* $\lim A_i$ haben wir in Beispiel 4.9 (3) kennengelernt. Wenn er existiert, schreiben wir ihn als Objekt A mit Abbildungen $\bar{f}_i\colon A \to A_i$, so dass $\bar{f}_{i-1} = f_i \circ \bar{f}_i$. Wenn inverse Limiten in $\mathcal{C}$ existieren, erhalten wir nach Definition 4.7 die Adjunktion

$$\Delta\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{I}} : \lim \; .$$

6.6. BEMERKUNG. Nach Proposition 4.10 lässt sich der inverse Limes als Pullback von Produkten schreiben; in vielen Kategorien wie $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{M}od_R$ sogar als Unterobjekt eines Produktes:

$$\lim A_i = \left\{ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \;\middle|\; a_{i-1} = f_i(a_i) \text{ für alle } i \geq 1 \right\} \quad \text{mit } \bar{f}_j\big((a_i)_i\big) = a_j \in A_j \text{ für alle } j \; .$$

6.7. Bemerkung. Wenn $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie ist, siehe Bemerkung 5.1 (4), zum Beispiel $\mathcal{M}od_R$, sei eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_i & \xrightarrow{\iota_i} & A_i & \xrightarrow{p_i} & A''_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f''_i} & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_{i-1} & \xrightarrow{\iota_{i-1}} & A_{i-1} & \xrightarrow{p_{i-1}} & A''_{i-1} & \longrightarrow & 0\ , \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \tag{6.1}$$

bei dem alle Zeilen exakt sind.

Da lim nach Konstruktion ein rechtadjungierter Funktor ist, erhält er Limiten nach Lemma 4.14. Insbesondere ist er linksexakt im Sinne von Bemerkung 5.58 (1), das heißt, wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \lim A'_i \longrightarrow \lim A_i \longrightarrow \lim A''_i\ .$$

Der inverse Limes ist dual zum direkten Limes oder Kolimes. Im Beweis von Lemma 5.37 haben wir unter anderem gezeigt, dass der Kolimes in $\mathcal{M}od_R$ ein exakter Funktor ist, also kurze exakte Sequenzen in kurze exakte Sequenzen überführt. Für den inversen Limes gilt das nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

6.8. Beispiel. Wir betrachten $A'_i = 2\mathbb{Z} \subset A_i = \mathbb{Z}$ und $A''_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Als Abbildungen f'_i und f_i wählen wir Multiplikation mit 3, dann ist $f''_i = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$. Da es außer 0 keine ganzen Zahlen gibt, die beliebig oft durch 3 teilbar sind, erhalten wir mit Bemerkung 6.6, dass

$$0 \longrightarrow \underbrace{\lim 2\mathbb{Z}}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\lim \mathbb{Z}}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\lim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\ .$$

Wir erhalten also keine kurze exakte Sequenz.

Wir wollen daher zeigen, dass es in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ der R-Moduln einen abgeleiteten Funktor $\lim^1$ gibt, der die obige Sequenz nach rechts exakt fortsetzt. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\delta\colon \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \qquad \text{mit} \qquad (a_i)_i \longmapsto \big(f_{i+1}(a_{i+1}) - a_i\big)_i\ . \tag{6.2}$$

Offensichtlich gilt $\ker\delta = \lim A_i$.

6.9. Definition. Es sei R ein Ring und (A_i, f_i) ein inverses System in $\mathcal{M}od_R$. Betrachte die Abbildung $\delta\colon \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ wie oben. Dann definieren wir den *abgeleiteten* (*inversen*) *Limes* durch

$$\lim{}^1 A_i = \operatorname{coker}\delta\ .$$

6.10. Satz. *Es sei R ein Ring, und es sei eine kurze exakte Sequenz inverser Systeme in $\mathcal{M}od_R$ wie in* (6.1) *gegeben. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \lim A'_i \longrightarrow \lim A_i \longrightarrow \lim A''_i \longrightarrow \lim{}^1 A'_i \longrightarrow \lim{}^1 A_i \longrightarrow \lim{}^1 A''_i \longrightarrow 0$$

natürlich und exakt.

BEWEIS. Wir betrachten die natürliche kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathbb{N}} A'_i & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathbb{N}} A''_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
0 & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathbb{N}} A'_i & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathbb{N}} A''_i & \longrightarrow & 0\,. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Die Aussage des Satzes folgt jetzt aus dem Schlangenlemma 5.25. □

Ähnlich wie in Abschnitt 5.e wirkt die Konstruktion des abgeleiteten Limes eher ad hoc. Und sie hat auf den ersten Blick nichts zu tun mit der Konstruktion in Proposition 5.55 oder mit den Überlegungen in Bemerkung 5.58. Dennoch kann man auch hier wieder zeigen, dass $\lim^1$ der korrekte rechtsderivierte Funktor zum inversen Limes ist, und dass alle höheren $\lim^k$ verschwinden.

Das folgende Analogon von Proposition 5.13 sieht formal ähnlich aus wie das universelle Koeffiziententheorem 5.57, siehe auch Satz 6.16 unten.

6.11. SATZ (Milnor-Sequenz für allgemeine Kohomologie). *Es sei $\tilde{h}_\bullet$ ein Kohomologiefunktor, der das Summenaxiom 6.1 (3) erfüllt, und es sei X ein CW-Komplex mit einer aufsteigenden Folge $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ von Unterkomplexen, so dass $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Dann existiert für alle k eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \lim{}^1 \tilde{h}^{k-1}(X_i) \longrightarrow \tilde{h}^k(X) \longrightarrow \lim \tilde{h}^k(X_i) \longrightarrow 0\,.$$

In Anwendungen sind die Räume X_i oft endlich-dimensionale Räume, die den unendlichen Raum X approximieren. Kohomologieklassen in $\tilde{h}^k(X)$ werden „sichtbar“ dadurch, dass man ihre Einschränkungen auf die X_i betrachtet. Klassen im Bild von $\lim^1 \tilde{h}^{k-1}(X_i)$ sind somit „unsichtbar“, und werden daher gelegentlich auch *Geister* genannt.

BEWEIS. Wie im Beweis von Proposition 5.13 betrachten wir das zu X homotopieäquivalente Teleskop

$$Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([i,i+1]_+ \wedge X_i\big) \subset [0,\infty)_+ \wedge X$$

als Vereinigung zweier Unterkomplexe

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i,2i+1]_+ \wedge X_{2i}\big) \qquad \text{und} \qquad B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big([2i+1,2i+2]_+ \wedge X_{2i+1}\big) \subset Y\,.$$

Dann erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$A \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i}\,, \qquad B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_{2i+1}\,, \qquad \text{und} \qquad A\cap B \simeq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} X_i\,.$$

Wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\cdots \to \underbrace{\tilde{h}^{k-1}(A)\oplus\tilde{h}^{k-1}(B)}_{=\prod \tilde{h}^{k-1}(X_i)} \xrightarrow{\varphi^{k-1}} \underbrace{\tilde{h}^{k-1}(A\cap B)}_{=\prod \tilde{h}^{k-1}(X_i)} \to \tilde{h}^k(Y) \to \underbrace{\tilde{h}^k(A)\oplus\tilde{h}^k(B)}_{=\prod \tilde{h}^{k}(X_i)} \xrightarrow{\varphi^{k}} \underbrace{\tilde{h}^k(A\cap B)}_{=\prod \tilde{h}^{k}(X_i)} \to \cdots$$

Analog zum Beweis von Proposition 5.13 zeigt man, dass die Abbildungen φ^j bis auf ein Vorzeichen mit den jeweiligen Abbildungen δ aus (6.2) zu $A_i = \tilde{h}^j(X_i)$ übereinstimmen. Die Behauptung folgt jetzt direkt aus der obigen Mayer-Vietoris-Sequenz. □

6.12. Bemerkung. Wir geben ein Kriterium dafür an, dass $\lim^1$ verschwindet. Dazu überlegen wir uns, dass es in einem inversen System (A_i, f_i) für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine absteigende Folge

$$A_i \supset \operatorname{im}(f_{i+1}) \supset \operatorname{im}(f_{i+1} \circ f_{i+2}) \supset \dots$$

gibt. Wenn diese Folge für jedes i stationär wird, sagen wir, dass (A_i, f_i) die *Mittag-Leffler-Bedingung* erfüllt.

Wir betrachten das inverse System (A'_i, f'_i) mit

$$A'_i = \bigcap_{j \geq i} \operatorname{im}(f_{i+1} \circ \dots \circ f_j) \subset A_i \qquad \text{und} \qquad f'_i = f_i|_{A'_i} \colon A'_i \longrightarrow A'_{i-1} \ .$$

Sei $A''_i = A_i/A'_i$, dann induzieren die Abbildungen f_i Morphismen $f''_i \colon A''_i \to A''_{i-1}$, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz inverser Systeme wie in (6.1).

In Übung 6.91 zeigen wir $\lim^1 A'_i = \lim^1 A''_i = 0$ mit der Mittag-Leffler-Bedingung für (A_i, f_i). Aus Satz 6.10 folgt dann auch $\lim^1 A_i = 0$.

6.c. Zelluläre Kohomologie und ein universelles Koeffiziententheorem

In diesem Abschnitt führen wir den zellulären Kokettenkomplex ein, der die gewöhnliche Kohomologie eines CW-Komplexes ausrechnet. Mit Hilfe dieses Komplexes stellen wir einen Zusammenhang zwischen gewöhnlicher Homologie und Kohomologie her. Man beachte wie in Abschnitt 5.b, dass alle Resultate in diesem Abschnitt Konsequenzen der Eilenberg-Steenrod-Axiome sind.

Im Folgenden sei R stets ein kommutativer Ring mit Eins, und A sei ein R-Modul. Mit A^I bezeichnen wir das Produkt über Kopien von A mit Indexmenge I. Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor $\tilde{H}^\bullet$ mit Koeffizienten A existiert. Wir benutzen die Isomorphismen aus Folgerung 6.4 und identifizieren

$$\tilde{H}^n(D^n/S^{n-1}; A) \cong \tilde{H}^n(S^n; A) \cong A \ .$$

Es sei X ein CW-Komplex, und $\Phi^n_j \colon (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$ seien die charakteristischen Abbildungen der Zellen von X für $j \in J^n$, aufgefasst als Abbildungen von Paaren. Wir bezeichnen die induzierte punktierte Abbildung auf den Quotienten mit $\bar{\Phi}^n_j \colon S^n \to X^n/X^{n-1}$. Für $n = 0$ fixieren wir einen Punkt von S^0 als Basispunkt. Für $j \in J^0$ bezeichne $\bar{\Phi}^0_j \colon S^0 \to X^0 = X^0/X^{-1}$ die punktierte Abbildung, die den anderen Punkt von S^0 auf $e^0_j \in X^0 \setminus \{x_0\}$ abbildet.

6.13. Lemma. *Für $k \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$ erhalten wir natürliche Isomorphismen*

$$\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1}; A) \cong A^{J^n} \qquad \textit{mit} \qquad \alpha \longmapsto \big((\overline{\Phi}^n_j)^*(\alpha)\big)_{j \in J^n} \ , \tag{1}$$

$$\tilde{H}^k\big(X^n/X^{n-1}; A\big) \cong 0 \qquad \textit{falls } k \neq n \ , \tag{2}$$

$$\tilde{H}^k\big(X^n; A\big) \cong 0 \qquad \textit{falls } k > n \ , \tag{3}$$

$$\textit{und} \qquad \tilde{H}^k\big(X^n; A\big) \cong \tilde{H}^k(X; A) \qquad \textit{falls } n > k \ . \tag{4}$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Lemma 5.14 vor. In (1) erhalten wir wegen des Summenaxioms hier ein Produkt. In (4) benutzen wir, dass die Folge $\tilde{H}^k(X^n; A)$ in n stationär wird, so dass der abgeleitete Limes in Satz 6.11 verschwindet. □

Die folgende Definition ist völlig analog zu Definition 5.15.

6.14. Definition. Es sei R ein Ring. Ein (*Koketten-*)*Komplex* $(C^\bullet, d_\bullet)$ über R ist eine Sequenz $(d_n\colon C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ linearer Abbildungen, so dass

$$d^n \circ d^{n-1} = 0\colon C^{n-1} \longrightarrow C^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert $B^n(C^\bullet, d_\bullet) \subset Z^n(C^\bullet, d_\bullet) \subset C^n$ und $H^n(C^\bullet, d_\bullet)$ in $\mathcal{C}$ durch

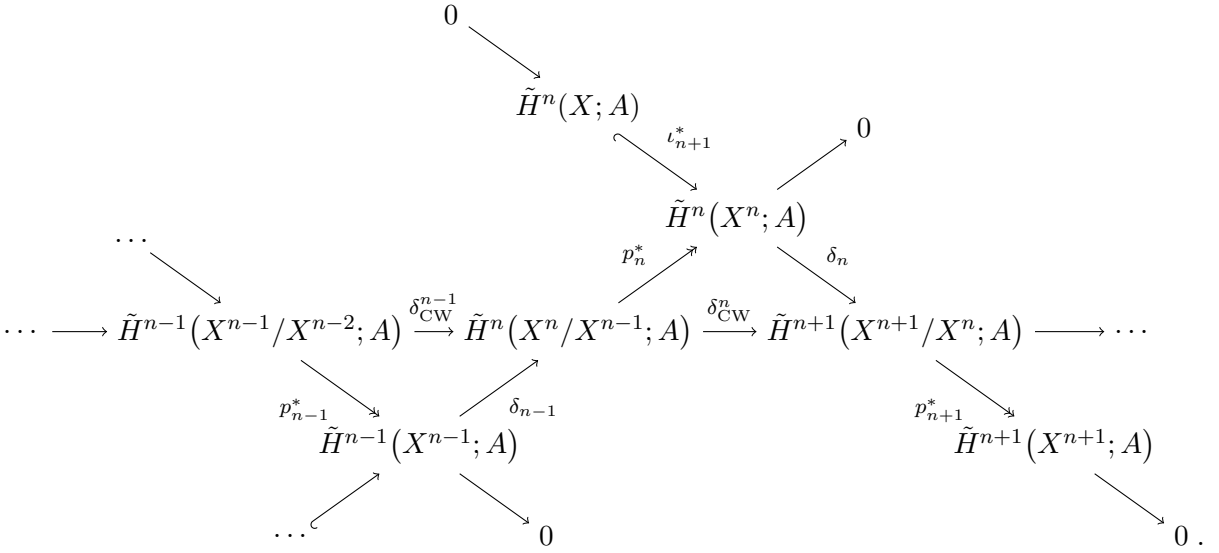
$$\begin{aligned} Z^n(C^\bullet, d_\bullet) &= \ker d_n \ , \\ B^n(C^\bullet, d_\bullet) &= \operatorname{im} d_{n-1} \\ \text{und} \qquad H^n(C^\bullet, d_\bullet) &= Z^n(C^\bullet, d_\bullet)/B^n(C^\bullet, d_\bullet) \ . \end{aligned}$$

Elemente von C^n, $Z^n(C^\bullet, d_\bullet)$ und $B^n(C^\bullet, d_\bullet)$ heißen *n-Koketten*, *n-Kozykel* beziehungsweise *n-Koränder* des Komplexes. Der Modul $H^n(C^\bullet, d_\bullet)$ heißt die n-te *Kohomologie* des Komplexes.

Eine *Kokettenabbildung* $f^\bullet\colon (C^\bullet, d_\bullet) \to (C'^\bullet, d'_\bullet)$ vom Grad a ist eine Sequenzabbildung vom Grad a. Die induzierten Abbildungen zwischen den Kohomologien bezeichnet man mit

$$H^n f^\bullet = f^*\colon H^n(C^\bullet, d_\bullet) \to H^{n+a}(C'^\bullet, d'_\bullet) \ .$$

Wir betrachten die Inklusion $\iota_{n+1}\colon X^n \to X^{n+1}$ und die Projektion $p_{n+1}\colon X^{n+1} \to X^{n+1}/X^n$. Mit den Isomorphismen aus Lemma 6.13 erhalten wir aus den langen exakten Sequenzen der Paare (X^{n+1}, X^n), (X^n, X^{n-1}) und (X^{n-1}, X^{n-2}) das kommutative Diagramm



6.15. Satz (Zelluläre Kohomologie). *Es sei $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;A)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten A über R. Für alle n definiere*

$$\tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) = \hom_R\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_n(X;R), A\big) \ , \tag{1}$$

$$\delta^n_{\mathrm{CW}} = \big(d^{\mathrm{CW}}_{n+1}\big)^*\colon \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) \longrightarrow \tilde{C}^{n+1}_{\mathrm{CW}}(X;A) \ , \qquad \textit{und} \tag{2}$$

$$f^{\#n} = f^*_{\#n}\colon \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(Y;A) \longrightarrow \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) \tag{3}$$

für alle zellulären Abbildungen $f\colon X \to Y$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{H}^n(X) \cong H^n\big(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^\bullet_{\mathrm{CW}}\big) \ . \tag{4}$$

Man sagt dazu auch, der *zelluläre Kokettenkomplex* $\big(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^\bullet_{\mathrm{CW}}\big)$ entstehe durch *Dualisieren* aus dem zellulären Kettenkomplex. Wichtig ist dabei, dass wir den zellulären Kettenkomplex mit Koeffizienten im zugrundeliegenden Ring R bilden und die Koeffizienten A für die Kohomologie erst durch den Funktor $\hom_R(\,\cdot\,, A)$ einführen.

BEWEIS. Da wir stets Ringe mit Eins betrachten, gilt $\hom_R(R,A) \cong A$. Mit Definition 5.17 und Lemma 6.13 (1) identifizieren wir

$$\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1};A) \cong A^{J^n} \cong \hom_R(R,A)^{J^n} \qquad \text{und} \qquad \tilde{C}^{\mathrm{CW}}_n(X;R) \cong R^{\oplus J^n} .$$

Für die in (1) definierten Moduln existieren nach Bemerkung 5.54 natürliche Isomorphismen

$$\tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A) \cong \hom_R\bigl(R^{\oplus J^n},A\bigr) \cong \hom_R(R,A)^{J^n} \cong \tilde{H}^n(X^n/X^{n-1};A) .$$

Wie in Definition 5.17 betrachte

$$d^{n+1}_{ji} = \deg f^{n+1}_{ji} \qquad \text{mit} \qquad f^{n+1}_{ji} = q^n_j \circ p_n \circ \varphi^{n+1}_i \colon S^n \longrightarrow S^n ,$$

hierbei sei $\varphi^{n+1}_i \colon S^n \to X^n$ die Anklebeabbildung der Zelle e^{n+1}_i, und $q^n_j \colon X^n/X^{n-1} \to S^n$ die Kollapsabbildung zur Zelle e^n_j. Für jedes $i \in J^{n+1}$ gibt es dann nur endlich viele $j \in J^n$, für die $d^{n+1}_{ij} \neq 0$. Um den Korandoperator $\delta^n_{\mathrm{CW}} = \delta_n \circ p^*_n$ zu bestimmen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{H}^n(S^n;A) & \xrightarrow{(f^{n+1}_{ji})^*} & \tilde{H}^n(S^n;A) & \xrightarrow[\cong]{\delta_n} & \tilde{H}^{n+1}(D^{n+1}/S^n;A) \\
\downarrow{\scriptstyle (q^n_j)^*} & & \uparrow{\scriptstyle (\varphi^{n+1}_i)^*} & & \uparrow{\scriptstyle (\bar{\Phi}^{n+1}_i)^*} \\
\tilde{H}^n(X^n/X^{n-1};A) & \xrightarrow{p^*_n} & \tilde{H}^n(X^n;A) & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{H}^{n+1}(X^{n+1}/X^n;A)
\end{array}$$

für $i \in J^{n+1}$, $j \in J^n$. Nach Folgerung 6.5 (2) wirkt $(f^{n+1}_{ji})^*$ auf $A \cong \tilde{H}^n(S^n;A)$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad d^{n+1}_{ji}.

Seien $\alpha = (a_j)_{j\in J^n} \in A^{J^n} \cong \tilde{C}^n_{\mathrm{CW}}(X;A)$ und $c = \sum_{i\in J^{n+1}} r_i \in R^{\oplus J^{n+1}}$ gegeben. Aus Definition 5.17 und der obigen Überlegung folgt

$$\bigl(\delta^n_{\mathrm{CW}}(\alpha)\bigr)(c) = \left(\sum_{j\in J^n} d^{n+1}_{ji} a_j\right)_{i\in J^{n+1}} (c) = \sum_{j\in J^n} \sum_{i\in J^{n+1}} r_i d^{n+1}_{ji} a_j = \alpha\bigl(d^{\mathrm{CW}}_{n+1}(c)\bigr) .$$

Jetzt haben wir die mittlere Zeile im obigen kommutativen Diagramm mit dem in (1)–(2) beschriebenen Komplex identifiziert. Der Beweis von (3) verläuft analog, und wir zeigen (4) durch Diagrammjagd, analog zum Beweis von Satz 5.18. □

Aufgrund von Satz 6.15 könnte man wieder erwarten, dass $\tilde{H}^n(X;A) \cong \hom\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr)$ gilt. Für die Räume $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{H}P^n$ stimmt das tatsächlich, siehe dazu Beispiel 5.20. Ähnlich wie beim universellen Koeffiziententheorem 5.57, bei der Künneth-Formel 5.62 und bei der Milnor-Sequenz 6.11 gilt die allgemeine Aussage auch hier nur bis auf einen derivierten Funktor.

6.16. SATZ (Universelles Koeffiziententheorem für gewöhnliche Kohomologie). *Es sei R ein Hauptidealring und $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;A)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten A in der Kategorie $\mathcal{M}od_R$. Dann existiert für alle n und alle CW-Komplexe X eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R\bigl(\tilde{H}_{n-1}(X;R),A\bigr) \longrightarrow \tilde{H}^n(X;A) \longrightarrow \hom_R\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr) \longrightarrow 0 .$$

Diese Sequenz spaltet, allerdings nicht natürlich.

6.17. BEMERKUNG. Die Abbildung $\tilde{H}^n(X;A) \to \hom_R\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr)$ induziert durch Auswerten (siehe Bemerkung 4.28 (1)) die sogenannte *Kronecker-Paarung* oder das *Kronecker-Produkt*

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \colon \tilde{H}^n(X;A) \times \tilde{H}_n(X;R) \longrightarrow \hom_R\bigl(\tilde{H}_n(X;R),A\bigr) \times \tilde{H}_n(X;R) \xrightarrow{\mathrm{ev}} A .$$

Für $\alpha \in \tilde{H}^n(X;A)$ und $c \in \tilde{H}_n(X;R)$ schreiben wir $\langle c,\alpha\rangle$ oder $\alpha(c) \in A$.

6.18. Bemerkung. Sei R ein Hauptidealring. Jeder endlich erzeugte R-Modul A zerfällt als direkte Summe

$$\begin{aligned} A &\cong \operatorname{Tor}_R A \oplus F_R A \\ \text{mit} \qquad \operatorname{Tor}_R A &= \left\{ a \in A \;\middle|\; ra = 0 \text{ für ein } r \in R \text{ mit } r \neq 0 \right\} \\ \text{und} \qquad F_R A &= A / \operatorname{Tor}_R A \,, \end{aligned}$$

und $F_R A$ ist dann ein freier R-Modul. Wenn $\tilde{H}_n(X;R)$ für alle n endlich erzeugt ist, sind wegen Beispiel 5.56 und Satz 6.16 auch alle $\tilde{H}^n(X;R)$ endlich erzeugt mit

$$\begin{aligned} F_R \tilde{H}^n(X;R) &\cong \hom_R(\tilde{H}_n(X;R);R) \cong F_R \tilde{H}_n(X;R) \\ \text{und} \qquad \operatorname{Tor}_R \tilde{H}^n(X;R) &\cong \operatorname{Ext}_R(\tilde{H}_{n-1}(X;R);R) \cong \operatorname{Tor}_R \tilde{H}_{n-1}(X;R) \,. \end{aligned}$$

Der erste Isomorphismus in jeder Zeile ist natürlich, der zweite jedoch nicht.

6.19. Folgerung. *Es sei $\Bbbk$ ein Körper und $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;V)$ ein gewöhnlicher Kohomologiefunktor mit Koeffizienten V in der Kategorie $\mathcal{V}ec_\Bbbk$. Dann existiert für alle n und alle CW-Komplexe X ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{H}^n(X;V) \cong \hom_\Bbbk\bigl(\tilde{H}_n(X;\Bbbk), V\bigr) \,.$$

Beweis. Nach Beispiel 5.56 verschwindet das Erweiterungsprodukt über Körpern. □

Beweis von Satz 6.16. Der Einfachheit halber schreiben wir C_n, Z_n, B_n und H_n für die Moduln der Ketten, Zykel, Ränder und die Homologie des Komplexes $\bigl(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;R), d^{\mathrm{CW}}_\bullet\bigr)$, und C^n, H^n für die Koketten und die Kohomologie des Komplexes $\bigl(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^{\mathrm{CW}}_\bullet\bigr)$.

Es bezeichne $\iota_n \colon B_n \to Z_n$ die natürliche Inklusion. Nach Definition der Homologie erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow H_n \longleftarrow Z_n \xleftarrow{\iota_n} B_n \longleftarrow 0 \,.$$

Da R ein Hauptidealring ist, sind B_n und Z_n als Untermoduln von C_n frei, also ist das eine freie Auflösung von H_n. Nach Proposition 5.55 liefert der Funktor $\hom_R(\,\cdot\,, A)$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \hom_R(H_n, A) \longrightarrow \hom_R(Z_n, A) \xrightarrow{\iota_n^*} \hom_R(B_n, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R(H_n, A) \longrightarrow 0 \,.$$

Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & B_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & C_{n+1} & \longleftarrow & Z_{n+1} & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle d_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\ 0 & \longleftarrow & B_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & C_n & \longleftarrow & Z_n & \longleftarrow & 0 \,, \end{array} \tag{$*$}$$

wobei die äußeren Komplexe triviales Differential haben. Da die Zeilen aus freien Moduln bestehen, liefert der Funktor $\hom_R(\,\cdot\,, A)$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \hom_R(B_n, A) & \longrightarrow & C^{n+1} & \longrightarrow & \hom_R(Z_{n+1}, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_n} & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \\ 0 & \longrightarrow & \hom_R(B_{n-1}, A) & \longrightarrow & C^n & \longrightarrow & \hom_R(Z_n, A) & \longrightarrow & 0 \,, \end{array}$$

wobei wir die mittlere Spalte nach Satz 6.15 mit dem Komplex $\bigl(\tilde{C}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X;A), \delta^{\mathrm{CW}}_\bullet\bigr)$ identifizieren.

Wir wenden das Schlangenlemma 5.25 an. Da die äußeren Komplexe triviales Differential haben, ändert sich nichts beim Übergang zur Kohomologie. Eine kurze Diagrammjagd zeigt, dass der Verbindungshomomorphismus gerade ι_n^* ist, also erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \hom_R(Z_{n-1},A) \xrightarrow{\iota_{n-1}^*} \hom_R(B_{n-1},A) \longrightarrow H^n \longrightarrow \hom_R(Z_n,A) \xrightarrow{\iota_n^*} \hom_R(B_n,A) \longrightarrow \cdots$$

Hieraus ergibt sich die kurze exakte Sequenz im Satz.

Da die Ränder B_n frei sind, spalten die Zeilen in (*), und wir erhalten Abbildungen $p_n\colon C_n \to Z_n$ mit $p_n|_{Z_n} = \mathrm{id}_{Z_n}$. Wir wenden auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n \\ {\scriptstyle d_{n+1}}\downarrow & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle \iota_n} \\ C_n & \xrightarrow{p_n} & Z_n\ . \end{array}$$

den Funktor $\hom_R(\,\cdot\,,A)$ an und erhalten

$$\begin{array}{ccc} C^{n+1} & \xleftarrow{d_{n+1}^*} & \hom_R(B_n;A) \\ {\scriptstyle \delta_n}\uparrow & \nearrow & \uparrow{\scriptstyle \iota_n^*} \\ C^n & \xleftarrow{p_n^*} & \hom_R(Z_n;A)\ . \end{array}$$

Wir sehen, dass die Einschränkung von p_n^* auf $\ker \iota_n^* = \hom_R(H_n,A)$ nach $\ker \delta_n \subset C^n$ abbildet, also induziert p_n^* die gesuchte Spaltungsabbildung

$$p_n^*|_{\ker \iota_n^*}\colon \hom_R(H_n,A) \longrightarrow \ker \delta_n \twoheadrightarrow H^n(X;A)\ . \qquad \square$$

Mit ähnlichen Methoden zeigt man auch das am Ende von Abschnitt 5.f erwähnte universelle Koeffiziententheorem für die Homologie, siehe Übung 6.97.

6.20. Beispiel. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}P^n$ aus Beispiel 5.21 und $R = A = \mathbb{Z}$. Mit Bemerkung 6.18 erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{falle } k \text{ gerade und } 0 < k \le n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Sei jetzt $R = A = \mathbb{Z}/2$. Da R ein Körper ist, verschwinden alle Erweiterungsprodukte, und es gilt $\hom_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$. Mit Beispiel 5.21 (2) erhalten wir

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cong \hom_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2) & \text{falls } 0 < k \le n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir für $R = \mathbb{Z}$ und $A = \mathbb{Z}/2$ aus Beispiel 5.21 (1) erhalten, allerdings mit etwas mehr Rechenarbeit, ähnlich wie in Beispiel 5.59.

Sei schließlich $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Aus Beispiel 5.21 (3) folgt

$$\tilde{H}^k(\mathbb{R}P^n;\Bbbk) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Als nächstes betrachten wir eine Künnethformel für Kohomologie. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Koeffizienten in einem Körper $\Bbbk$.

6.21. Satz (Kohomologische Künneth-Formel). *Es seien X, Y topologische Räume, und es sei $\Bbbk$ ein Körper. Wir nehmen an, dass $\tilde{H}^k(X;\Bbbk)$ für alle $k \geq 0$ endlich-dimensional ist. Dann gibt es natürliche Isomorphismen*

$$H^n(X \times Y;\Bbbk) \cong \big(H^\bullet(X;\Bbbk) \otimes_\Bbbk H^\bullet(Y;\Bbbk)\big)_n\,, \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$\tilde{H}^n(X \wedge Y;\Bbbk) \cong \big(\tilde{H}^\bullet(X;\Bbbk) \otimes_\Bbbk \tilde{H}^\bullet(Y;\Bbbk)\big)_n\,, \qquad \text{falls } X \text{ und } Y \text{ gut punktiert sind.} \tag{2}$$

Allgemeinere Formulierungen, zum Beispiel über Hauptidealringen, sind möglich; allerdings benötigt man stets eine „Endlichkeitsbedingung“ für einen der beiden Räume, siehe Übung 6.98.

Beweis. Seien V, W zwei $\Bbbk$-Vektorräume. Zu zwei Elementen $\alpha \in V^* = \hom_\Bbbk(V,\Bbbk)$ und $\beta \in W^* = \hom_\Bbbk(W,\Bbbk)$ existiert eine bilineare Abbildung

$$V \times W \longrightarrow \Bbbk \qquad \text{mit} \qquad (v,w) \longmapsto \alpha(v)\,\beta(w)\,.$$

Nach der charakteristischen Eigenschaft 4.28 (2) des Tensorproduktes existiert daher eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta \colon V \otimes W \to \Bbbk \qquad \text{mit} \qquad v \otimes w \longmapsto \alpha(v)\,\beta(w)\,.$$

Die Zuordnung $(\alpha,\beta) \to \alpha \otimes \beta \in (V \otimes W)^*$ ist ebenfalls bilinear, also erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*\,. \tag{*}$$

Sei jetzt einer der beiden Vektorräume endlich-dimensional, etwa V, mit Basis $(v_1,\dots,v_p)$. Dann erhalten wir eine duale Basis $(v^1,\dots,v^p)$ von V^* mit $v^i(v_j) = \delta_{ij}$. Jedes Element von $V^* \otimes W^*$ lässt sich dann darstellen als

$$\sum_{i=1}^p v^i \otimes \beta^i\,,$$

mit $\beta^1, \dots, \beta^p \in W^*$ beliebig. Sei umgekehrt $\gamma \in (V \otimes W)^*$, dann ist nach Bemerkung 4.28 die Abbildung

$$\gamma \circ \big(\otimes_{V,W}(v_i)\big) \colon W \longrightarrow \Bbbk \qquad \text{mit} \qquad w \longmapsto \gamma(v_i \otimes w)$$

linear, und wir setzen $\beta^i = \gamma \circ (\otimes_{V,W}(v_i)) \in W^*$. Jedes Element $u \in V \otimes W$ lässt sich schreiben als

$$u = \sum_{i=1}^p v_i \otimes w_i$$

mit $w_1, \dots, w_p \in W$ beliebig. Einsetzen in γ liefert

$$\gamma(u) = \sum_{i=1}^p \gamma(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^p \beta^i(w_i) = \sum_{i,j=1}^p (v^j \otimes \beta^j)(v_i \otimes w_i) = \left(\sum_{i=1}^p v^i \otimes \beta^i\right)(u)\,.$$

Daher ist die Abbildung (*) in diesem Fall ein Isomorphismus.

Wir beweisen die Aussage (2); der Beweis von (1) ist analog. Nach den Folgerungen 5.64 (2), 6.19 und der obigen Vorarbeit gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^n(X \wedge Y;\Bbbk) &\cong \tilde{H}_n(X \wedge Y;\Bbbk)^* \cong \left(\bigoplus_{k=0}^n \tilde{H}_k(X;\Bbbk) \otimes_\Bbbk \tilde{H}_{n-k}(Y;\Bbbk)\right)^* \\
&\cong \bigoplus_{k=0}^n \tilde{H}_k(X;\Bbbk)^* \otimes_\Bbbk \tilde{H}_{n-k}(Y;\Bbbk)^* \cong \big(\tilde{H}_\bullet(X;\Bbbk)^* \otimes \tilde{H}_\bullet(Y;\Bbbk)^*\big)_n \\
&\cong \big(\tilde{H}^\bullet(X;\Bbbk) \otimes \tilde{H}^\bullet(Y;\Bbbk)\big)_n\,.
\end{aligned}$$

□

Wenn beide Vektorräume unendlich-dimensional sind, ist die Abbildung (*) kein Isomorphismus mehr. Denn jedes Element von $V^* \otimes W^*$ hat „endlichen Rang“, das heißt, lässt sich als endliche Linearkombination zerlegbarer Elemente $\alpha^i \otimes \beta^i$ schreiben. Wenn wir unendlich viele linear unabhängige $\alpha^i \in V^*$ und $\beta^i \in W^*$ für $i \in I$ finden können, erhalten wir ein Element von „unendlichem Rang“

$$\sum_{i \in I} \alpha^i \otimes \beta^i \in (V \otimes W)^* \setminus V^* \otimes W^* \, .$$

6.d. Produkte

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man zumindest für CW-Komplexe Produkte zwischen Kohomologiegruppen definieren kann. Im nächsten Kapitel lernen wir einen abstrakten Zugang kennen, der Produkte auch für verallgemeinerten Kohomologiefunktoren konstruiert. Da wir im Moment nur zellulär arbeiten, können wir das Kürzel „CW“ in der Notation weglassen.

Es seien X, Y CW-Komplexe und R ein kommutativer Ring mit Eins. Es seien

$$\alpha \in \hom_R\bigl(\tilde{C}_k(X;R), R\bigr) = \tilde{C}^k(X;R) \qquad \text{und} \qquad \beta \in \hom_R\bigl(\tilde{C}_\ell(Y;R), R\bigr) = \tilde{C}^\ell(Y;R)$$

Koketten, dann erhalten wir wie im Beweis von Satz 6.21 eine Abbildung

$$\alpha \otimes \beta \colon \tilde{C}_k(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R) \longrightarrow R \, .$$

Da $\tilde{C}_k(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R)$ nach Definition 5.61 und Proposition 5.65 ein direkter Summand von

$$\bigl(\tilde{C}_\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\bullet(Y;R)\bigr)_{k+\ell} \cong \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y;R) \tag{*}$$

ist, können wir $\alpha \otimes \beta$ auf eindeutige Weise mit Satz 6.15 zu einer Kokette

$$\alpha \wedge \beta \in \hom_R\bigl(\tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y;R), R\bigr) \cong \tilde{C}^{k+\ell}(X \wedge Y;R)$$

fortsetzen, die auf allen anderen Summanden des Tensorproduktes verschwindet. Das liefert eine Abbildung

$$\wedge \colon \tilde{C}^\bullet(X;R) \times \tilde{C}^\bullet(Y;R) \longrightarrow \tilde{C}^\bullet(X \wedge Y;R)$$

Sei jetzt $\alpha \in \tilde{C}^k(X;R)$ wie oben, dann setzen wir

$$\tilde{C}_k(X;R) \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R) \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}} R \otimes_R \tilde{C}_\ell(Y;R) \cong \tilde{C}_\ell(Y;R)$$

durch 0 auf alle anderen Summanden des Tensorproduktes (*) fort. Das liefert eine Abbildung

$$/ \colon \tilde{C}_{k+\ell}(X \wedge Y;R) \otimes_R \tilde{C}^k(X;R) \longrightarrow \tilde{C}_\ell(Y;R) \, .$$

6.22. Proposition und Definition. *Die obigen Abbildungen $\wedge$ und $/$ induzieren für CW-Komplexe X, Y natürliche* äußere Produkte

$$\wedge \colon \tilde{H}^\bullet(X;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(Y;R) \longrightarrow \tilde{H}^\bullet(X \wedge Y;R) \, ,$$

$$\textit{und} \qquad / \colon \tilde{H}_\bullet(X \wedge Y;R) \otimes_R \tilde{H}^\bullet(X;R) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(Y;R) \, ,$$

das Smash-Produkt, *sowie das* Schräg- *oder* Slant-Produkt. *Diese haben für alle $\alpha \in \tilde{H}^k(X;R)$, $\beta \in \tilde{H}^\ell(Y;R)$, $\gamma \in \tilde{H}^m(Z;R)$ und $a \in \tilde{H}_k(X;R)$, $b \in \tilde{H}_{k+\ell}(X \wedge Y;R)$, $c \in \tilde{H}_{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z;R)$ die folgenden Eigenschaften.*

(1) Assoziativität. *Es gilt*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{H}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z;R)$$

$$\textit{und} \qquad (c/\alpha)/\beta = c/(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{H}_m(Z;R) \, .$$

(2) Einselement. *Für das Element $1 \in R \cong \tilde{H}^0(S^0;R)$ gilt*

$$1 \wedge \alpha = \alpha \wedge 1 = \alpha \in \tilde{H}^k(X;R) \qquad \textit{und} \qquad a/1 = a \in \tilde{H}_k(X;R) \, .$$

(3) Stabilität. *Für die Stabilisierungs-Isomorphismen σ gilt*

$$(\sigma\alpha)\wedge\beta = \sigma(\alpha\wedge\beta) = (-1)^k\alpha\wedge(\sigma\beta) \in \tilde{H}^{k+\ell+1}\big(S(X\wedge Y);R\big)\ ,$$
$$(\sigma b)/(\sigma\alpha) = b/\alpha \in \tilde{H}_\ell(Y;R) \qquad \textit{und} \qquad (\sigma b)/\alpha = (-1)^k\sigma(b/\alpha) \in \tilde{H}_{\ell+1}(Y;R)\ .$$

(4) Adjunktion. *Für das Kronecker-Produkt gilt*

$$\langle b/\alpha,\beta\rangle = \langle b,\alpha\wedge\beta\rangle \qquad \textit{und} \qquad a/\alpha = \langle a,\alpha\rangle \in R \cong \tilde{H}_0(S^0;R)\ .$$

(5) Transposition. *Die Transpositionsabbildung $t\colon X\wedge Y\to Y\wedge X$ sei gegeben durch $t(x\wedge y) = y\wedge x$, dann gilt*

$$t^*(\beta\wedge\alpha) = (-1)^{k\ell}\alpha\wedge\beta\ .$$

„Natürlichkeit“ für das Schräg-Produkt bedeutet, dass

$$\big((f\wedge g)_* b\big)/\alpha = g_*\big(b/(f^*\alpha)\big) \in \tilde{H}_\ell(W;R) \tag{6.3}$$

für alle $f\colon X\to Z$, $g\colon Y\to W$, $\alpha\in\tilde{H}^k(Z;R)$ und $b\in\tilde{H}_{k+\ell}(X\wedge Y;R)$ gilt. Es ist kontraintuitiv, beim Schräg-Produkt von rechts auf den linken Faktor eines Produktes einzuwirken, aber so erhalten wir alle obigen Eigenschaften. In der Literatur finden sich auch andere Konventionen, die dann meist zu zusätzlichen Vorzeichenfaktoren führen.

Später werden wir sehen, dass Natürlichkeit und die Eigenschaften (1)–(3) die beiden äußeren Produkte bereits eindeutig festlegen. Die Notation „/“ ist etwas irreführend, da hier multipliziert und nicht dividiert wird. Immerhin gelten einzelne „Bruchrechenregeln“, und die Grade der beteiligten Klassen verhalten sich so wie erwartet.

Beweis. Zunächst zeigen wir Wohldefiniertheit des Smash-Produktes, das heißt, das Produkt von Kozykeln ist wieder ein Kozykel, und exakt, falls einer der Faktoren exakt ist. Beides folgt mit Proposition 5.65 und Satz 6.15, denn für α, β wie oben und $v\in\tilde{C}_\bullet(X;R)$, $w\in\tilde{C}_\bullet(Y;R)$ gilt

$$\begin{aligned}\big(\delta^{k+\ell}(\alpha\wedge\beta)\big)(v\otimes w) &= (\alpha\wedge\beta)\big(d_{k+\ell+1}(v\otimes w)\big) = \alpha(dv)\cdot\beta(w) + (-1)^k\alpha(v)\cdot\beta(dw)\\ &= \big(\delta^k\alpha(v)\big)\cdot\beta(w) + (-1)^k\alpha(v)\cdot\big(\delta^\ell\beta(w)\big) = \big(\delta^k\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge\delta^\ell\beta\big)(v\otimes w)\ .\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\alpha(v)\neq 0$ nur dann, wenn $v\in C_k(X;R)$. Analog ist auch das Schrägprodukt wohldefiniert.

Assoziativität (1) folgt, da das Smashprodukt auf Koketten bereits assoziativ ist. Natürlichkeit lässt sich ebenfalls leicht überprüfen. Für das Schrägprodukt erhalten wir Assoziativität auf Ketten- und Kokettenniveau, indem wir Ketten der Form $c = x\otimes y\otimes z$ mit $x\in\tilde{C}_k(X;R)$, $y\in\tilde{C}_\ell(Y;R)$ und $z\in\tilde{C}_m(Z;R)$ betrachten:

$$\big((x\otimes y\otimes z)/\alpha\big)/\beta = \big(\alpha(x)\,y\otimes z\big)/\beta = \alpha(x)\,\beta(y)\,z = (x\otimes y\otimes z)/(\alpha\wedge\beta)\ .$$

Es sei e^0 die nichttriviale Nullzelle von S^0, dann ist $e = 1e^0$ ein Erzeuger von $\tilde{C}_0(S^0;R)\cong R$. Es gilt $S^0\wedge X\cong X\cong X\wedge S^0$, und wir identifizieren $v\in\tilde{C}_k(X;R)\cong\tilde{C}_k(S^0\wedge X;R)$ mit $e\otimes v\in\tilde{C}_0(S^0;R)\otimes_R\tilde{C}_k(X;R)$. Das Element $1\in R\cong\tilde{H}^0(S^0;R)$ wird repräsentiert durch $\varepsilon\in\tilde{C}^0(S^0;R)$ mit $\varepsilon(e)=1$. Es folgt

$$(\varepsilon\wedge\alpha)(v) = (\varepsilon\wedge\alpha)(e\otimes v) = \varepsilon(e)\cdot\alpha(v) = \alpha(v)\ .$$

Genauso erhalten wir die anderen Aussage in (2).

Die Aussagen (3)–(5) bleiben Übung 6.100. □

6.23. Beispiel. Wir benutzen die Stabilisierungsisomorphismen und definieren induktiv Erzeuger

$$e_k = \sigma^k(1)\in\tilde{H}_k(S^kS^0;R) = \tilde{H}_k(S^k) \qquad \text{und} \qquad \varepsilon^k = \sigma^k(1)\in\tilde{H}^k(S^k)\ .$$

Dann folgt aus (2), (3) induktiv

$$\varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell = (\sigma^k 1) \wedge (\sigma^\ell 1) = \sigma^k\big(1 \wedge (\sigma^\ell 1)\big) = \sigma^{k+\ell} 1 = \varepsilon^{k+\ell}$$
$$\text{und} \qquad e_{k+\ell}/\varepsilon^k = (\sigma^k e_\ell)/(\sigma^k 1) = e_\ell/1 = e_\ell \; .$$

Wie in (4) gilt

$$\langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k, \varepsilon^\ell\rangle = \langle e_\ell, \varepsilon^\ell\rangle = 1 = \langle e_{k+\ell}, \varepsilon^{k+\ell}\rangle = \langle e_{k+\ell}, \varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell\rangle \; .$$

Diese Relationen stehen nicht im Widerspruch zu den Vorzeichen in (3) und (5), denn die Transpositionsabbildung $t\colon S^{k+\ell} \to S^{k+\ell}$ hat Abbildungsgrad $(-1)^{k\ell}$, und für (3) ergibt sich daraus

$$\varepsilon^k \wedge (\sigma\varepsilon^\ell) = (-1)^{k(\ell+1)}(\sigma\varepsilon^\ell) \wedge \varepsilon^k = (-1)^{k(\ell+1)}\sigma(\varepsilon^\ell \wedge \varepsilon^k) = (-1)^k \sigma(\varepsilon^k \wedge \varepsilon^\ell) \; .$$

Das bedeutet, wir sollten σ als „Makro“ für $\varepsilon^1\wedge$ auffassen, und auf die Reihenfolge der einzelnen Faktoren achten. Wir benutzen das Kronecker-Produkt und nutzen aus, dass $\tilde H^\ell(S^\ell; R) \cong R$:

$$\langle(\sigma e_{k+\ell})/\varepsilon^k, \sigma\varepsilon^\ell\rangle = \langle \sigma e_{k+\ell}, \varepsilon^k \wedge \sigma\varepsilon^\ell\rangle = (-1)^k = (-1)^k\langle e_{k+\ell}/\varepsilon^k, \varepsilon^\ell\rangle = (-1)^k\langle\sigma(e_{k+\ell}/\varepsilon^k), \sigma\varepsilon^\ell\rangle \; .$$

Da $(X \times Y)_+ = (X_+) \wedge (Y_+)$, lässt sich ein Kreuz-Produkt

$$\times = \wedge\colon \tilde H^\bullet(X_+; R) \otimes_R \tilde H^\bullet(Y_+; R) \to \tilde H^\bullet\big((X \times Y)_+; R\big)$$

für unreduzierte Kohomologie konstruieren. Falls $R = \Bbbk$ ein Körper ist und die Endlichkeitsvoraussetzungen aus Satz 6.21 gelten, entsprechen diese äußeren Produkte gerade den Komponenten der Isomorphismen aus der kohomologischen Künneth-Formel. Auch für Homologietheorien können wir die „linken“ Abbildungen in den Künneth-Sequenzen aus Satz 5.62 und Folgerung 5.63 als Smash- beziehungsweise Kreuzprodukte auffassen, die dann ähnliche Eigenschaften haben.

Die folgende Konstruktion hingegen lässt sich in der Homologie nicht einfach nachmachen. Sei X ein topologischer Raum, dann bezeichne $\Delta_X\colon X \to X \wedge X$ die *Diagonalabbildung* mit $\Delta_X(x) = (x, x)$. Falls X ein CW-Komplex ist, ist Δ_X in der Regel nicht zellulär. Nach Satz 4.43 lässt sich Δ_X jedoch zellulär approximieren. Da alle zellulären Approximationen punktiert homotop sind, ist es für die folgenden Konstruktionen egal, welche wir jeweils wählen.

6.24. Definition. Sei X ein CW-Komplex, Δ'_X eine zelluläre Approximation der Diagonalabbildung, R ein Ring, und k, $\ell \geq 0$. Die *inneren Produkte,* nämlich das *Cup-Produkt* $\smile\colon \tilde H^k(X; R) \times \tilde H^\ell(X; R) \to \tilde H^{k+\ell}(X; R)$ sowie das *Cap-Produkt* $\frown\colon \tilde H_{k+\ell}(X; R) \times \tilde H^k(X; R) \to \tilde H_\ell(X; R)$ sind für alle $\alpha \in \tilde H^k(X; R)$, $\beta \in \tilde H^\ell(X; R)$ und $c \in \tilde H_{k+\ell}(X; R)$ definiert durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta'^*_X(\alpha \wedge \beta) \in \tilde H^{k+\ell}(X; R) \qquad \text{und} \qquad c \frown \alpha = (\Delta'_{X*}c)/\alpha \in \tilde H_\ell(X; R) \; .$$

Um Verwechselungen mit dem Mengensymbolen „$\cup$“ und „$\cap$“ zu vermeiden, schreiben wir „$\smile$“ und „$\frown$“ für die inneren Produkte.

6.25. Proposition. *Die inneren Produkte sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.*

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \qquad \textit{und} \qquad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta) \; .$$

(2) Einselement. *Sei* $p\colon X \to \mathrm{pt}$ *die konstante Abbildung, dann ist* $1 = p_+^*(1) \in \tilde H^0(X_+; R) = H^0(X; R)$ *neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta\rangle = \langle b, \alpha \smile \beta\rangle \; .$$

(4) *Das Cup-Produkt ist* graduiert kommutativ, *das heißt, für alle* $\alpha \in \tilde H^k(X; R)$ *und* $\beta \in \tilde H^\ell(X; R)$ *gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell}\alpha \smile \beta \; .$$

Insbesondere bildet die reduzierte Kohomologie $\big(\tilde H^\bullet(X;R),\smile\big)$ einen graduiert kommutativen Ring, den *Kohomologiering* von X, und $\big(\tilde H_\bullet(X;R),\frown\big)$ ist ein Modul über diesem Ring. Dabei könnte man in der Homologie die Koeffizienten sogar durch einen beliebigen R-Modul A ersetzen.

Beweis. Natürlichkeit und Assoziativität folgen sofort aus Proposition 6.22 (1). Das Verhalten der Eins in (2) erhalten wir aus 6.22 (2), indem wir im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde H^0(X_+;R)\times\tilde H^k(X_+;R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde H^k(X_+\wedge X_+;R) & \xrightarrow{\Delta_X'^*} & \tilde H^k(X_+;R)\\
\uparrow{\scriptstyle p_+^*\times\mathrm{id}_X^*} & & \uparrow{\scriptstyle (p_+\wedge\mathrm{id}_X)^*} & \nearrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \\
\tilde H^0(S^0;R)\times\tilde H^k(X_+;R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde H^k(S^0\wedge X_+;R)\,. & &
\end{array}$$

unten links das Element $1\in R=H^0(S^0;R)$ einsetzen.

Es sei $T\colon \tilde H^\bullet(X;R)\otimes_R\tilde H^\bullet(X;R)\to\tilde H^\bullet(X;R)\otimes_R\tilde H^\bullet(X;R)$ gegeben durch $T(\alpha\otimes\beta)=(-1)^{k\ell}\beta\otimes\alpha$ für $\alpha\in\tilde H^k(X;R)$ und $\beta\in\tilde H^\ell(X;R)$. Es sei Δ_X' eine zelluläre Approximation der Diagonalen Δ_X und t die Transpositionsabbildung, dann ist auch $\Delta_X''=t\circ\Delta_X'$ eine zelluläre Approximation der Diagonalen. Nach Proposition 6.22 (4) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde H^\bullet(X;R)\otimes_R\tilde H^\bullet(X;R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde H^\bullet(X\wedge X;R) & \xrightarrow{\Delta_X''^*} & \tilde H^\bullet(X;R)\\
\downarrow{\scriptstyle T} & & \downarrow{\scriptstyle t^*} & \nearrow{\scriptstyle \Delta_X'^*} & \\
\tilde H^\bullet(X;R)\otimes_R\tilde H^\bullet(X;R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde H^\bullet(X\wedge X;R)\,. & &
\end{array}$$

Daraus folgt (3). □

6.26. Bemerkung. Zur Erinnerung: es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann ist eine (assoziative) *R-Algebra* ein Ring $(A,+,*)$, der gleichzeitig ein unitärer R-Modul ist. Die Addition ist für beide Strukturen die gleiche, und die Algebren-Multiplikation „$*$“ in A ist R-bilinear. Da jede abelsche Gruppe ein $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist ein Ring das gleiche wie eine (assoziative) $\mathbb{Z}$-Algebra. Insbesondere ist $\big(\tilde H^\bullet(X;R),\smile\big)$ eine R-Algebra, die *Kohomologiealgebra.*

Eine Algebra besitzt genau dann ein Einselement, wenn es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R\to A$ gibt, so dass $\varphi(r)*a=a*\varphi(r)=ra$, denn dann gilt $1=\varphi(1)$. Zu jeder R-Algebra A lässt sich ein Einselement hinzufügen. Dazu definieren wir $B=A\oplus R$ mit der Multiplikation

$$(a,r)*(b,s)=(a*b+sa+rb,rs)$$

und erhalten $1_B=(0,1)$ als neues Einselement (wenn A bereits ein Einselement hatte, übernimmt 1_B jetzt diese Rolle). Für die Einbettung $\iota\colon A\to B$ gilt die folgende universelle Eigenschaft: zu jedem Algebren-Homomorphismus $f\colon A\to C$ in eine R-Algebra C mit Eins 1_C existiert genau ein Homorphismus $F\colon B\to C$ mit $F\circ\iota=f$ und $F(1_B)=1_C$. Wegen (2) macht diese Konstruktion aus der reduzierten die unreduzierte Kohomologiealgebra

$$H^\bullet(X;R)=\tilde H^\bullet(X;R)\oplus R\qquad\text{mit}\qquad(\alpha,r)\smile(\beta,s)=(\alpha\smile\beta+s\alpha+r\beta,rs)\,.$$

Insbesondere ist die unreduzierte Kohomologie eine R-Algebra mit Eins, und die unreduzierte Homologie bildet einen unitären Modul.

Wenn $X=\coprod_{i\in I}X_i$ mehrere Zusammenhangskomponenten hat und der Basispunkt x_0 in X_0 mit $0\in I$ liegt, dann folgt

$$\tilde H^\bullet(X;R)=\tilde H^\bullet(X_0;R)\oplus\prod_{i\in I\setminus\{0\}}H^\bullet(X_i;R)\qquad\text{und}\qquad H^\bullet(X;R)=\prod_{i\in I}H^\bullet(X_i;R)\,.$$

Insbesondere hängt die reduzierte Kohomologiealgebra im Allgemeinen von der Wahl der Zusammenhangskomponente des Basispunktes ab, die unreduzierte jedoch nicht. Außerdem können wir die reduzierte Kohomologiealgebra aus der unreduzierten durch Einschränkung zurückerhalten.

Schließlich lässt sich das äußere Produkt aus dem unreduzierten Cup-Produkt rekonstruieren. Seien dazu $p\colon X \times Y \to X$ und $q\colon X \times Y \to Y$ die Projektionen, dann kann zeigen, dass

$$(p^*\alpha) \smile (q^*\beta) = \Delta^*_{X\times Y}\big((p^*\alpha) \times (q^*\beta)\big) \in H^\bullet(X \times Y; R) \; .$$

Wir erhalten auch das reduzierte äußere Produkt, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^k(X;R) \otimes_R H^\ell(Y;R) & \xrightarrow{\times} & H^{k+\ell}(X \times Y; R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde H^k(X;R) \otimes_R \tilde H^\ell(Y;R) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde H^{k+\ell}(X \wedge Y; R) \end{array}$$

kommutiert und die kurze exakte Sequenz in Bemerkung 6.2 (3) spaltet. Es ist also egal, in welchem der vier möglichen Settings (reduziert/unreduziert, innen/außen) wir zuerst Produkte definieren.

Da das Cup-Produkt eine Approximation der Diagonalen erfordert, ist es in Einzelfällen nicht immer einfach zu berechnen. Um wenigstens das Cup-Produkt auf $\mathbb{C}P^n$ angeben zu können, führen wir zunächst relative Produkte ein. Dazu seien A, $B \subset X$ Unterkomplexe eines CW-Komplexes X, dann induziert Δ_X eine *relative Diagonalabbildung*

$$\Delta_{X;A,B}\colon X/(A \cup B) \longrightarrow X/A \wedge X/B \; . \tag{6.4}$$

6.27. Definition. Es sei X ein CW-Komplex mit Unterkomplexen A, $B \subset X$. Dann definieren wir die *relativen inneren Produkte*, das *relative Cup-Produkt* $\smile\colon \tilde H^k(X/A;R) \times \tilde H^\ell(X/B;R) \to \tilde H^{k+\ell}(X/(A \cup B);R)$ und das *relative Cap-Produkt* $\frown\colon \tilde H_{k+\ell}(X/(A \cup B);R) \times \tilde H^k(X/A;R) \to \tilde H_\ell(X/B;R)$ für alle $\alpha \in H^k(X/A;R)$, $\beta \in H^\ell(X/B;R)$ und $c \in H_{k+\ell}(X/(A \cup B);R)$ durch

$$\alpha \smile \beta = \Delta^*_{X;A,B}(\alpha \wedge \beta) \qquad \text{und} \qquad c \frown \alpha = \big((\Delta_{X;A,B})_* c\big)/\alpha \; .$$

Für die relativen Produkte gilt Proposition 6.25 analog, insbesondere sind sie natürlich. Das wollen wir im Folgenden ausnutzen.

6.28. Beispiel. Es sei $k + \ell = n$. Die folgenden Überlegungen funktionieren aber für jeden Ring R, wir schreiben daher der Einfachheit halber die Koeffizienten nicht mit. Wir stellen $\mathbb{C}P^n$ wie in Übung 1.168 als CW-Komplex mit je einer Zelle der Dimension $2k$ für alle $0 \le k \le n$ dar. Die Zellen bis zur Dimension $2k$ bilden dabei einen zu $\mathbb{C}P^k$ homöomorphen Unterraum. Nach Lemma 6.13 „trägt“ die $2k$-Zelle eine Kohomologieklasse α, die unter den natürlichen Abbildungen

$$\mathbb{C}P^k \xrightarrow{p_k} \mathbb{C}P^k/\mathbb{C}P^{k-1} \xleftarrow{\cong} S^{2k}$$

der Klasse ε^{2k} aus Beispiel 6.23 entspricht. Sie verhält sich natürlich unter Inklusionen $\mathbb{C}P^m \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ für $k \le m \le n$, und wir erhalten

$$\alpha \in \tilde H^{2k}(\mathbb{C}P^n) \xleftarrow{\cong} \tilde H^{2k}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde H^{2k}(S^{2k}) \ni \varepsilon^{2k} \; .$$

Es seien $\beta \in \tilde H^{2\ell}(\mathbb{C}P^n)$ und $\gamma \in \tilde H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ entsprechend konstruiert. Dann behaupten wir, dass

$$\alpha \smile \beta = \gamma \; . \tag{$*$}$$

Sei insbesondere $\omega \in \tilde H^2(\mathbb{C}P^n) \cong R$ ein Erzeuger, dann erhalten wir Ringisomorphismen

$$\big(\tilde H^\bullet(\mathbb{C}P^n), \smile\big) \cong (\omega R[\omega])/\omega^{n+1} \qquad \text{und} \qquad \big(H^\bullet(\mathbb{C}P^n), \smile\big) \cong R[\omega]/\omega^{n+1} \; .$$

Um (*) zu beweisen, benötigen wir einige geometrische Vorüberlegungen. Dazu schreiben wir Punkte in $\mathbb{C}P^n$ als $[x : y : z]$ mit $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}^k$ und $z \in \mathbb{C}^\ell$, wobei $(x, y, z) \neq 0$, siehe Beispiel 3.33. Wir betrachten die Teilmengen

$$A = \left\{ [0 : y : z] \;\middle|\; \|y\| \geq \|z\| \right\} \qquad \text{und} \qquad B = \left\{ [0 : y : z] \;\middle|\; \|z\| \geq \|y\| \right\} .$$

Wir nehmen hier an, dass $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur trägt, so dass A und B Unterkomplexe sind, und wählen einen Basispunkt in $A \cap B \neq \emptyset$. Die obigen Teilmengen enthalten jeweils als Deformationsretrakt

$$A \supset \left\{ [0 : y : 0] \;\middle|\; y \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}P^{k-1} \qquad \text{und} \qquad B \supset \left\{ [0 : 0 : z] \;\middle|\; z \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}P^{\ell-1} ,$$

Wir können die zugehörigen Homotopieäquivalenzen auf ganz $\mathbb{C}P^n$ ausdehnen und erhalten Homotopieäquivalenzen

$$\mathbb{C}P^n/A \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}P^n/B \simeq \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} .$$

Außerdem gilt $A \cup B \cong \mathbb{C}P^{n-1}$.

Zusammen mit den obigen Homotopieäquivalenzen induziert die relative Diagonalabbildung eine Abbildung

$$\Delta' \colon \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \wedge (\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) ,$$

so dass das linke Quadrat im folgenden Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}P^n & \xrightarrow{\quad p_n \quad} & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} & \xleftarrow[\cong]{\bar\Phi_{2n}} & (D^{2k} \times D^{2\ell})/\partial(D^{2k} \times D^{2\ell}) \\
\downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mathbb{C}P^n}} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta'} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
\mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{\quad p_k \wedge p_\ell \quad} & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1} & \xleftarrow{\quad \bar\Phi_{2k} \wedge \bar\Phi_{2\ell} \quad} & (D^{2k}/\partial D^{2k}) \wedge (D^{2\ell}/\partial D^{2\ell}) .
\end{array}$$

Für das rechte Quadrat betrachten wir eine stetige Abbildung $\bar\Phi_{2n}$, die für $y \in D^{2k} \setminus \partial D^{2k}$ und $z \in D^{2\ell} \setminus \partial D^{2\ell}$ gegeben wird durch

$$\bar\Phi_{2n}(y, z) = \left[(1 - |y|^2)(1 - |z|^2) : (1 - |z|^2)\, y : (1 - |y|^2)\, z \right] .$$

Mit der Künneth-Formel 6.21 erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde H^{2k}(\mathbb{C}P^n) \otimes_R \tilde H^{2\ell}(\mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde H^{2k}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}) \otimes_R \tilde H^{2\ell}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde H^{2k}(S^{2k}) \otimes_R \tilde H^{2\ell}(S^{2\ell}) \\
\downarrow{\scriptstyle \wedge} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge}{\scriptstyle \cong} \\
\tilde H^{2n}(\mathbb{C}P^n \wedge \mathbb{C}P^n) & \longleftarrow & \tilde H^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1} \wedge \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde H^{2n}(S^{2k} \wedge S^{2\ell}) \\
\downarrow{\scriptstyle \Delta^*_{\mathbb{C}P^n}} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta'^*} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
\tilde H^{2n}(\mathbb{C}P^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde H^{2n}(\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde H^{2n}(S^{2n}) .
\end{array}$$

Wir können die Klassen α und β von $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{k-1}$ beziehungsweise $\mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{\ell-1}$ zurückholen, dabei spielt es wegen Homotopieinvarianz keine Rolle, welchen projektiven Unterraum wir jeweils herausteilen. Wenn wir links oben $\alpha \otimes \beta$ einsetzen, erhalten wir rechts oben $\varepsilon^{2k} \otimes \varepsilon^{2\ell}$, und wegen Beispiel 6.23 daher unten rechts ε^{2n}. Also steht unten links $\gamma = \alpha \smile \beta$.

6.e. Spektren und Kohomologiefunktoren

Ähnlich wie in Abschnitt 5.c wollen wir Kohomologietheorien durch Spektren darstellen. Aus technischen Gründen beschränken wir uns dabei zunächst einmal auf Ω-Spektren. Das erlaubt uns bereits, gewöhnliche Kohomologie mit Hilfe von Eilenberg-Mac Lane-Spektren zu beschreiben. Im Anschluss führen wir dann die sogenannte stabile Modellstruktur auf der Kategorie $\mathcal{ST}_+$ der Spektra und definieren Kohomologiefunktoren für beliebige Spektren.

Wir erinnern uns an die Adjunktion $S \dashv \Omega$ zwischen Einhängungs- und Schleifenraumfunktor, und an die Definition 5.36 eines Ω-Spektrums $(E_\bullet, s_\bullet)$, bestehend aus punktierten Räumen E_i und Abbildungen $s_i\colon SE_i \to E_{i+1}$, so dass die adjungierte Abbildung $E_i \to \Omega E_{i+1}$ für alle $i \geq n_0$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Gemäß Definition 4.62 bezeichnet $[X, Y]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von einer kofibranten Ersetzung von X (beispielsweise einer CW-Approximation von X in der Quillen-Modellstruktur) in eine fibrante Ersetzung von Y (beispielsweise Y, denn alle Räume sind in der Quillen-Modellstruktur fibrant). Die folgende Konstruktion ist dual zu Satz 5.38.

6.29. Satz und Definition. *Zu jedem Ω-Spektrum $\mathbb{E} = (E_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ existiert ein reduzierter $\mathcal{A}b$-wertiger Kohomologiefunktor $(\tilde{E}^\bullet, \delta_\bullet)$ bezüglich der Quillen-Modellstruktur mit*

$$\tilde{E}^k(X) = \operatorname{colim}[S^\ell X, E_{k+\ell}] \,. \qquad (*)$$

Wir nennen $\tilde{E}^\bullet$ den durch $\mathbb{E}$ dargestellten Kohomologiefunktor.

Übrigens sieht die Beschreibung (*) auf den ersten Blick so aus, als würde sie auch für beliebige Spektren funktionieren. Das Problem ist aber, das Kolimiten im Allgemeinen nicht mit Produkten vertauschen, so dass wir dann das Summenaxiom 6.1 (3) nicht beweisen könnten.

Beweis. Zunächst ist der Ausdruck (*) nach Konstruktion funktoriell auf der Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ zur Quillen-Modellstruktur.

Nach der Definition eines Ω-Spektrums wird die Folge $[S^\ell X, E_{k+\ell}] \cong [X, \Omega^\ell E_{k+\ell}]$ stationär, sobald $k + \ell \geq n_0$. Für die folgenden Konstruktionen wählen wir daher ℓ in Abhängigkeit von k und n_0 hinreichend groß. Da $[S^\ell X, E_{k+\ell}]$ nach Bemerkung 3.77 (2) eine abelsche Gruppe ist für alle $\ell \geq 2$, ist $\tilde{E}^k(X)$ eine abelsche Gruppe.

Für $f\colon Y \to X$ definieren wir $\tilde{E}^k f = f^*\colon \tilde{E}^k(X) \to \tilde{E}^k(Y)$ durch $f^*([a]) = [a \circ S^\ell f]$ für alle $a\colon S^\ell X \to E_{k+\ell}$, somit sind die $\tilde{E}^k$ kontravariante Funktoren.

Es sei (X, Y) eine abgeschlossene Kofaserung, dann ist auch $(S^\ell X, S^\ell Y)$ eine abgeschlossene Kofaserung. Wir betrachten die Puppe-Sequenz 4.67 (3) und erhalten die lange exakte Kohomologie-Sequenz 6.1 (2) mit Hilfe des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & [S^\ell X, E_{k+\ell}] & \longrightarrow & [S^\ell Y, E_{k+\ell}] & & & \\
& \cong\downarrow & & \cong\downarrow & \searrow^{\delta} & & \\
\cdots \longrightarrow & [S^{\ell+1} X, E_{k+\ell+1}] & \longrightarrow & [S^{\ell+1} Y, E_{k+\ell+1}] & \longrightarrow & [S^\ell(X/Y), E_{k+\ell+1}] & \longrightarrow [S^\ell X, E_{k+\ell+1}] \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Unter mehrfacher Anwendung von Lemma 4.14 erhalten wir das Summenaxiom 6.1 (3), da

$$\tilde{E}^k\left(\bigvee_{i\in I} X_i\right) = \left[S^\ell \bigvee_{i\in I} X_i, E_{k+\ell}\right] \cong \left[\bigvee_{i\in I} S^\ell X_i, E_{k+\ell}\right] \cong \prod_{i\in I} [S^\ell X_i, E_{k+\ell}] = \prod_{i\in I} \tilde{E}^k(X_i) \,. \qquad \square$$

6.30. Bemerkung. Umgekehrt gilt der *Brownsche Darstellungssatz:* Sei $\tilde{h}^\bullet$ ein $\mathcal{A}b$-wertiger verallgemeinerter Kohomologiefunktor, dann gibt es ein Ω-Spektrum $E_\bullet$ und einen natürlichen Isomorphismus $\tilde{E}^\bullet \to \tilde{h}^\bullet$ auf der Kategorie der CW-Komplexe. Also ist jeder Kohomologiefunktor zur Quillen-Modellstruktur wie in Definition 6.29 durch ein Ω-Spektrum darstellbar.

Wir betrachten das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}A$ aus Satz 5.43 zu einer abelschen Gruppe A. Es ist ein Ω-CW-Spektrum, und die Zuordnung $A \mapsto HA_\bullet$ ist bis auf Homotopie funktoriell. Also erhalten wir ein Analogon zu Satz 5.44.

6.31. Satz. *Es sei R ein Ring und $\mathcal{M}od_R$ die Kategorie der (Rechts-) R-Moduln.*

(1) *Für jeden R-Modul M existiert ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; M)\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}od_R$ mit*
$$\tilde{H}^k(X; M) = \operatorname{colim}[S^\ell X, HM_{k+\ell}]\ ,$$
der das Dimensionsaxiom 6.1 (4) mit $\tilde{H}^0(S^0; M) \cong M$ erfüllt.

(2) *Zu jedem Modulhomomorphismus $f\colon M \to N$ existiert eine natürliche Transformation $\tau_f^\bullet\colon \tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; M) \to \tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; N)$, die mit den Korandoperatoren aus Definition 6.1 (2) verträglich ist, so dass $\tau_f^0(S^0) = f\colon \tilde{H}^0(S^0; M) = M \to N = \tilde{H}^0(S^0; N)$.*

(3) *Sei $g\colon L \to M$ ein weiterer Modulhomomorphismus, dann gilt $\tau_f^\bullet \circ \tau_g^\bullet = \tau_{f\circ g}^\bullet$.*

(4) *Jeder andere gewöhnliche reduzierte Homologiefunktor mit den obigen Eigenschaften ist auf der vollen Unterkategorie der punktierten CW-Komplexe zu $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; M)$ natürlich isomorph.*

Wir können diesen Satz wieder so interpretieren, dass es einen Funktor $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ von der Kategorie $\mathcal{M}od_R$ in die Kategorie der gewöhnlichen Kohomologiefunktoren mit Werten in $\mathcal{M}od_R$ gibt.

Beweis. Der Beweis von (1)–(3) verläuft völlig analog zu dem von Satz 5.44: man betrachtet zunächst den Fall $R = \mathbb{Z}$ inklusive Funktorialität. Anschließend betrachtet man für beliebige R einen R-Modul M als abelsche Gruppe mit einer Abbildung $R \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, um auch Kohomologie als $\mathcal{M}od_R$-wertigen Funktor interpretieren zu können.

Dabei benutzen wir Satz 6.29, um zu zeigen, dass $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; A)$ ein reduzierter Kohomologiefunktor ist. Das Dimensionsaxiom folgt aus Definition 5.41, denn sei A eine abelsche Gruppe, dann gilt
$$\tilde{H}^k(S^0; A) \cong [S^\ell, HA_{\ell+k}] = \pi_\ell(HA_{\ell+k}) \cong \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
für alle hinreichend großen ℓ. Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus abelscher Gruppen, dann existiert nach Satz 5.43 eine zugehörige Familie von Abbildungen $Hf_n\colon HA_n \to HB_n$, und für ein hinreichend großes ℓ definieren wir
$$\tau_f^k = Hf_{k+\ell} \circ \cdot : H^k(\,\cdot\,; A) \cong [S^\ell\,\cdot\,, HA_{k+\ell}] \longrightarrow [S^\ell\,\cdot\,, HB_{k+\ell}] \cong H^k(\,\cdot\,; B)\ .$$
Aussage (4) folgt aus dem Satz 6.15 über die zelluläre Kohomologie. □

6.32. Bemerkung. Ich möchte hier eine harmlose Bemerkung zum universellen Koeffiziententheorem 6.16 und zur obigen Konstruktion einschieben. Da es keine Homologie in negativen Geraden gibt, erhalten wir Isomorphismen
$$\hom_{\mathbb{Z}}(H_0(X), A) \xleftarrow{\cong} H^0(X; A) \xrightarrow{\cong} [X_+, HA_0]\ ,$$
also eine Adjunktion $H_0 \dashv H\,\cdot_0$. Hierbei sei $HA_0 = |A|_\delta$ die A zugrundeliegende Menge als diskreter topologischer Raum, mit Basispunkt $0 \in A$ und $\mathbb{Z}$-Wirkung. Tatsächlich lässt sich diese Adjunktion aus zwei etwas einfacheren Adjunktionen zusammensetzen, nämlich
$$\pi_0\colon \mathrm{Ho}\mathcal{T} \leftrightarrows \mathcal{S}et : |\,\cdot\,|$$
$$\text{und} \qquad \langle\,\cdot\,\rangle\colon \mathcal{S}et \leftrightarrows \mathcal{A}b : \cdot_\delta\ .$$

Geht man zur Strøm-Modellstruktur über, dann stimmt das nicht mehr. Die (im Sinne der Überlagerungstheorie) universelle Überlagerung des polnischen Kreis ist ein zusammenhängender Raum X mit $\pi_0(X) = \mathbb{Z}$, auf dem alle Funktionen in einen diskreten Raum konstant sind. Das zeigt exemplarisch, warum wir Satz 6.29 nur für die Quillen-Modellstruktur formuliert haben.

Um Kohomologie auch für beliebige Spektren definieren zu können, führen wir eine Modellstruktur auf Spektren ein und interpretieren Definition 6.29 in der zugehörigen Homotopiekategorie. Zunächst überlegen wir uns, dass man alle kleinen Limiten und Kolimiten von Spektra erhält, indem man in jedem Grad den entsprechen Limes oder Kolimes bildet und anschließend die Strukturabbildungen entsprechend definiert.

Um typische Kofaserungen zu beschreiben, müssen wir Zellen an ein Spektrum $\mathbb{E}$ ankleben können. Dazu wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ und eine Abbildung $\varphi\colon S^{k-1} \to E_{n_0}$. Dann betrachten wir für alle $n \geq n_0$ den Pushout

$$F_n = E_n \cup_{S^{n-n_0}\varphi} D^{n+k-n_0} \ .$$

Die Stabilisierungsabbildungen erhalten wir als Pushout der Stabilisierungsabbildungen von $\mathbb{E}$ und der Homöomorphismen $S^1 \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) = (D^{\ell+1}, S^\ell)$, siehe Beispiel 3.69 (2). Man sagt, $\mathbb{F}$ entstehe aus $\mathbb{E}$ durch Ankleben einer Zelle der Dimension $k - n_0$. Dabei können wir solche Zellen oft erst in höherem Grad (hier n_0) ankleben, denn es kann sein, dass φ selbst nicht als Einhängung einer Abbildung nach E_{n_0-1} geschrieben werden kann.

Wir erinnern uns an die Homotopiegruppen $\pi_k\mathbb{E}$ von Spektren aus Definition 5.38. Sie sind für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert. Den folgenden Satz werden wir nicht beweisen.

6.33. Satz. *Es gibt eine sogenannte* stabile Modellstruktur *auf der Kategorie $\mathcal{ST}_+$ der Spektren mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Eine Abbildung $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $f_*\colon \pi_k\mathbb{E} \to \pi_k\mathbb{F}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.*
(2) *Eine Abbildung $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ist genau dann eine Faserung, wenn E_k für alle k schwach homotopieäquivalent ist zum Pullback $F_k \times_{\Omega F_{k+1}} \Omega E_{k+1}$.*
(3) *Jede Verkettung von Anklebungen von Zellen und jeder Kolimes solcher Abbildungen ist eine Kofaserung.*

Insbesondere sind die fibranten Objekte genau die Ω-Spektren, und jedes CW-Spektrum ist eine Kofaserung.

Wir interpretieren die Formel (*) in Definition 6.29 jetzt in der Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{ST}_+$. Generell bezeichnet $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ Homotopieklassen von einer kofibranten Ersetzung in eine fibrante Ersetzung. Auf der linken Seite steht $S^\ell X$, das sind die Räume des Einhängungsspektrums $\mathbb{S} \wedge X$. Wir haben schon gesagt, dass wir X durch einen schwach homotopieäquivalenten CW-Komplex ersetzen müssen. In diesem Fall ist $\mathbb{S} \wedge X = (S^\ell X, S^{\ell+1}\mathrm{id}_X)_{\ell\in\mathbb{N}})$ ein CW-Spektrum, also kofibrant.

Wir benutzen jetzt wieder die Adjunktion $S \dashv \Omega$ und schreiben

$$[S^{\ell+m}X, E_{k+\ell+m}] = [S^\ell X, \Omega^m E_{k+\ell+m}] \ .$$

Wenn $\mathbb{E}$ ein Ω-Spektrum ist, ist $\Omega^m E_{k+\ell+m}$ schwach homotopieäquivalent zu $E_{k+\ell}$. Falls nicht, ersetzen wir $E_{k+\ell}$ durch den Kolimes des Systems

$$\begin{aligned} E_{k+\ell} \xrightarrow{\varepsilon_{E_{k+\ell}}} \Omega^1 S^1 E_{k+\ell} \xrightarrow{\Omega^1 s_{k+\ell}} \Omega^1 E_{k+\ell+1} \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow \Omega^m E_{k+\ell+m} \xrightarrow{\Omega^m \varepsilon_{E_{k+\ell+m}}} \Omega^{m+1} S^1 E_{k+\ell+m} \xrightarrow{\Omega^{m+1} s_{k+\ell+m}} \Omega^{m+1} E_{k+\ell+m+1} \longrightarrow \cdots \ , \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_X\colon X \to \Omega^1 S^1 X$ die Einheit der obigen Adjunktion bezeichne. Man kann sich überlegen, dass die Kolimiten dieses Systems ein Ω-Spektrum bilden, indiziert durch $k+\ell$. Für dieses Spektrum schreibt man salopp auch $\Omega^\bullet\mathbb{E}$. Außerdem gibt es natürliche Isomorphismen

$$\Big[X, \mathrm{colim}_m\, \Omega^m E_{k+m}\Big] \cong \cdots \cong \Big[S^\ell X, \mathrm{colim}_m\, \Omega^m E_{k+\ell+m}\Big] \cong \cdots$$

von Mengen und sogar von Gruppen für $\ell \geq 2$. Man kann zeigen, dass die so beschriebene Gruppe wiederum isomorph ist zu $[\mathbb{S} \wedge X, \Omega^\bullet \mathbb{E}]$, diesmal aufgefasst in $\mathrm{Ho}\mathcal{ST}_+$. Wir nennen

$$\Omega^\infty \mathbb{E} = (\Omega^\bullet \mathbb{E})_0 = \mathrm{colim}_m \, \Omega^m E_m$$

den *unendlichen Schleifenraum* zum Spektrum $\mathbb{E}$. Dann erhalten wir eine Adjunktion

$$\mathbb{S} \wedge \cdot : \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+ \leftrightarrows \mathrm{Ho}\mathcal{ST}_+ : \Omega^\infty .$$

Wenn wir das um k verschobene Spektrum $\mathbb{E}$ mit $\mathbb{E}[k]$ bezeichen, können wir die Kohomologie zum Spektrum $\mathbb{E}$ schreiben als

$$\tilde{E}^k(X) = \big[\mathbb{S} \wedge X, \mathbb{E}[k]\big] = \big[X, \Omega^\infty \mathbb{E}[k]\big] = \Big[X, \mathrm{colim}_\ell \, \Omega^\ell E_{k+\ell}\Big] .$$

In der gleichen Sprache können wir auch Homologie beschreiben. Da Sphären durch nur je eine nichttriviale Zelle dargestellt werden können, dürfen wir hier den Kolimes herausziehen und erhalten

$$\tilde{E}_k(X) = \mathrm{colim}_\ell [S^{k+\ell}, X \wedge E_\ell] = \pi_k(X \wedge \mathbb{E}) .$$

Es gibt Räume X und Spektren $\mathbb{E}$, bei denen die Folge von Gruppen $[S^{k+\ell}, X \wedge E_\ell]$ nicht stationär wird.

6.f. Vektor- und Prinzipalbündel

In diesem Abschnitt definieren wir Vektorbündel, das sind spezielle Faserbündel, deren Fasern eine lineare Struktur tragen. Ein Beispiel ist das Tangentialbündel einer differerenzierbaren Mannigfaltigkeit. Aus diesem Grund spielen Vektorbündel in der Differentialgeometrie und -topologie eine Rolle. Wir wählen einen etwas vereinfachten Zugang, bei dem wir uns auf Vektorbündel über CW-Komplexen konzentrieren. Die Argumente für die größere Klasse der parakompakten Räume finden sich unter anderem in [**At**], [**tD2**] und [**H2**].

6.34. Definition. Eine *topologische Gruppe* ist ein topologischer Raum G mit Basispunkt $e \in G$ und zwei stetigen Abbildungen $*\colon G \times G \to G$ und $\cdot^{-1}\colon G \to G$, so dass $(G, *, e, \cdot^{-1})$ die Gruppenaxiome erfüllt.

Eine *stetige* (Links-) *Wirkung* von G auf einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $G \times X \to X$ mit $(g, x) \mapsto g \cdot x$, so dass

$$g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x \qquad \text{und} \qquad e \cdot x = x \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } g, h \in G.$$

Entsprechend definieren wir (stetige) Rechtswirkungen $(x, g) \mapsto x \,.\, g$.

Beispiele sind zum einen beliebige Gruppen G, versehen mit der diskreten Topologie. Zum anderen sei $\Bbbk$ ein topologischer (Schief-) Körper, das heißt, ein (Schief-) Körper mit einer Topologie, bezüglich der alle Rechenoperationen stetig sind, beispielsweise $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Dann sind alle Matrixgruppen $G \subset GL(n, \Bbbk)$ mit der Unterraumtopologie zu $GL(n, \Bbbk) \subset \Bbbk^{n \times n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ topologische Gruppen. Wir interessieren uns vor allem für die Gruppen

$$U(n, \Bbbk) = \big\{\, A \in GL_n(\Bbbk) \;\big|\; A^* A = E_n \,\big\} = \begin{cases} O(n) & \text{für } \Bbbk = \mathbb{R}, \\ U(n) & \text{für } \Bbbk = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp(n) & \text{für } \Bbbk = \mathbb{H}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Die Matrizen mit Determinante 1 bilden Untergruppen $SO(n) \subset O(n)$ sowie $SU(n) \subset U(n)$. Über $\mathbb{H}$ ist keine Determinante definiert.

Wir wollen jetzt $\Bbbk$-Vektorbündel mit einer G-Struktur einführen. Dazu benutzen wir den Begriff des Prinzipalbündels und des assoziierten Bündels. Wir erinnern uns dazu an den Begriff des Faserbündels aus Definition 3.30, und an lokale Trivialisierungen.

6.35. Definition. Es sei G eine topologische Gruppe. Ein *G-Hauptfaser-* oder auch *Prinzipalbündel* über einem topologischen Raum B ist ein Faserbündel $p\colon P \to B$ mit typischer Faser G und einer Rechtswirkung $P \times G \to P$, falls jeder Punkt $b \in B$ eine Umgebung $U \subset B$ mit einer lokalen Trivialisierung $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times G$ besitzt, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) \times G & \longrightarrow & p^{-1}(U) \\ {\scriptstyle \varphi \times \mathrm{id}_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ U \times G \times G & \xrightarrow{\mathrm{id}_U \times *} & U \times G\,. \end{array}$$

Sei $f\colon A \to B$ stetig. Eine *G-Prinzipalbündelabbildung über f* ist eine Abbildung $F\colon Q \to P$ zwischen G-Prinzipalbündel $p\colon P \to B$ und $q\colon Q \to A$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{F} & P \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} Q \times G & \xrightarrow{F \times \mathrm{id}_G} & P \times G \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \xrightarrow{F} & P\,. \end{array}$$

kommutieren. Ein Isomorphismus von *G-Prinzipalbündeln* über B ist eine G-Prinzipalbündelabbildung über id_B. Die Menge der Isomorphieklassen von G-Prinzipalbündeln über B wird mit $\mathrm{Bun}_G(B)$ bezeichnet.

Insbesondere ist die G-Wirkung frei, ihre Bahnen sind gerade die Fasern von p, und lokal ist jedes G-Prinzipalbündel isomorph zum trivialen Bündel $U \times G$, auf dem G durch Rechtsmultiplikation auf dem zweiten Faktor wirkt. Eine G-Prinzipalbündelabbildung bildet Fasern auf Fasern ab und ist mit den G-Wirkungen verträglich.

6.36. Bemerkung. Sei $p\colon P \to B$ ein G-Prinzipalbündel und $f\colon A \to B$ stetig, dann erhält man das *zurückgezogene* G-Prinzipalbündel $f^*p\colon f^*P \to A$ und eine Abbildung $F\colon f^*P \to P$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^*P & \xrightarrow{F} & P \\ {\scriptstyle f^*p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} f^*P \times G & \longrightarrow & f^*P \\ {\scriptstyle F \times \mathrm{id}_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ P \times G & \longrightarrow & P \end{array}$$

kommutieren. Sei $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times G$ eine lokale Trivialisierung von P, dann existiert eine lokale Trivialisierung von f^*P über $f^{-1}(U)$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (f^*p)^{-1}\big(f^{-1}(U)\big) & \longrightarrow & f^{-1}(U) \times G \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times \mathrm{id}_G} \\ p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times G \end{array}$$

kommutiert, insbesondere existiert zu jedem $y \in A$ eine lokale Trivialisierung über einer Umgebung von y.

(1) Einer G-Prinzipalbündelabbildung $F\colon Q \to P$ über $f\colon A \to B$ entspricht dann genau ein Isomorphismus der G-Prinzipalbündel f^*P und Q.
(2) Falls $f\colon A \to B$ eine Inklusion ist, schreiben wir kurz $P|_A$ für $f^*P = p^{-1}(A)$.
(3) Über dem einpunktigen Raum ist jedes G-Prinzipalbündel trivial. Also entspricht eine Trivialisierung $P \cong B \times G$ genau einer G-Prinzipalbündelabbildung $F\colon P \to G$ über $B \to \mathrm{pt}$.

Für die nächste Konstruktion erinnern wir uns an Quotienten nach Gruppenwirkungen aus Definition 2.50.

6.37. Proposition und Definition. *Es sei G eine topologische Gruppe, $p\colon P \to B$ ein G-Prinzipalbündel, und F ein topologischer Raum mit einer Linkswirkung von G. Dann erhält man ein Faserbündel $q\colon P \times_G F \to B$, mit $P \times_G F = (P \times F)/G$, das* zu P assoziierte Faserbündel *mit Faser F, wobei $g \in G$ durch $(x, f) \mapsto (xg^{-1}, gf)$ wirke, mit $q([x, f]) = p(x)$.*

Beweis. Es sei $\varphi\colon p^{-1}(U) \to U \times G$ eine lokale Trivialisierung wie in Definition 6.35. In dieser Trivialisierung wirkt $h \in G$ durch $(u, g, f) \mapsto (u, gh^{-1}, hf)$. Indem wir $h = g$ wählen, können wir (u, g, f) durch (u, e, gf) darstellen. Also existiert eine lokale Trivialisierung ψ von $q^{-1}(U) \subset P \times_G F$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} P \times F & \hookleftarrow & p^{-1}(U) \times F & \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{id}_F} & U \times G \times F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_U \times \cdot} \\ P \times_G F & \hookleftarrow & q^{-1}(U) = p^{-1}(U) \times_G F & \xrightarrow{\psi} & U \times F\,. \end{array}$$ □

Falls die typische Faser F eine bestimmte Struktur trägt und G diese Struktur erhält, können wir auf allen Fasern eines assoziierten Bündels $P \times_G F$ eine entsprechende Struktur einführen. Die obigen lokalen Trivialisierungen erhalten diese Struktur dann ebenfalls, die Zusatzstruktur ist also lokal trivial. Wir benutzen das in der folgenden Definition, um lokal triviale Strukturen auf Faserbündeln auf abstrakte Weise einzuführen. Anschließend machen wir diese Konstruktion anhand von Vektorbündeln konkret.

6.38. Definition. Es sei $q\colon E \to B$ ein Faserbündel mit typischer Faser F und G eine topologischer Gruppe mit einer Linkswirkung auf F. Eine *G-Struktur* auf E besteht aus einem G-Prinzipalbündel $p\colon P \to B$ und einem Isomorphismus $\Phi\colon P \times_G F \to E$ von Faserbündeln, das heißt, einem Homöomorphismus, für den $q \circ \Phi$ gerade die Projektionsabbildung $P \times_G F \to B$ ist. Wir nennen G die *Strukturgruppe.*

Es seien $q\colon E \to B$ und $r\colon D \to A$ Faserbündel mit G-Strukturen $\Phi\colon P \times_G F \to E$ und $\Psi\colon Q \times_G F \to D$, und $f\colon A \to B$ sei stetig. Eine Bündelabbildung $L\colon E \to D$ ist eine *Abbildung von Bündeln mit G-Struktur* über f, wenn es eine G-Prinzipalbündelabbildung $K\colon P \to Q$ gibt, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P \times F & \twoheadrightarrow & P \times_G F & \xrightarrow{\Phi} & E & \xrightarrow{q} & B \\ \downarrow{\scriptstyle K \times \mathrm{id}_G} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Q \times F & \twoheadrightarrow & Q \times_G F & \xrightarrow{\Psi} & D & \xrightarrow{r} & A \end{array}$$

kommutiert. Ein *Isomorphismus von Bündeln mit G-Struktur* über B ist eine Abbildung von Bündeln mit G-Struktur über id_B. Wir betrachten zwei G-Strukturen auf einem Bündel F als *gleich,* wenn id_F ein Isomorphismus von Bündeln mit G-Struktur zwischen ihnen ist.

Falls $F = \Bbbk^r$ ist und G durch lineare Isomorphismen wirkt, nennen wir ein Faserbündel mit typischer Faser F und G-Struktur ein *$\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang r mit G-Struktur,* oder kurz ein G-Vektorbündel. *Vektorbündelabbildungen* und *-isomorphismen* definieren wir entsprechend.

Eigentlich müssten wir der Wirkung von G auf F auch einen Namen geben, etwa $\rho\colon G \times F \to F$, und von einer (G, ρ)-Struktur sprechen. Da aber ρ in den meisten Fällen klar sein wird, haben wir es weggelassen. Analog zu Bemerkung 6.36 können wir Bündel mit G-Struktur zurückziehen, und Abbildungen von Bündeln mit G-Struktur als Isomorphismen von Bündeln mit G-Struktur mit dem zurückgezogenen Bündel betrachten.

6.39. Bemerkung. Wir wollen den obigen Begriff etwas motivieren, dabei konzentrieren wir uns vor allem auf Vektorbündel.

(1) Wenn F eine G-invariante Struktur $\mathcal{S}$ trägt, dann trägt das assoziierte Bündel $E = P \times_G F$ eine entsprechende faserweise Struktur. Lokale Trivialisierungen φ von P über $U \subset B$ induzieren lokale Trivialisierungen ψ von E wie im Beweis von Proposition 6.37, die $E_b = q^{-1}(b)$ für alle $b \in U$ strukturerhaltend auf F abbilden.

Sei etwa $V \to B$ ein Vektorbündel, etwa $V = P \times_G \Bbbk^r$, sei $b \in B$, seien $v = [x, \xi]$ und $w = [x, \eta] \in V_b$ mit $x \in P_b$ und ξ, $\eta \in \Bbbk^r$, und seien λ, $\mu \in \Bbbk$. Dann setzen wir

$$v\lambda + w\mu = [x, \xi\lambda + \eta\mu] \ .$$

Sei $y \in P_b$ ein weiterer Punkt in der selben Faser von P, dann existiert ein $g \in G$ mit $y = xg^{-1}$, und es gilt $v = [y, g\xi]$, $w = [y, g\eta]$. Da $g \in G$ linear wirkt, folgt

$$[y, (g\xi)\lambda + (g\eta)\mu] = [y, g(\xi\lambda + \eta\mu)] = [x, \xi\lambda + \eta\mu] = v\lambda + w\nu \ ,$$

mithin sind Addition und Multiplikation mit Skalaren auf V_b wohldefiniert.

Bei geeigneter Wahl von G können wir auf Vektorbündeln auch zusätzliche Strukturen wie Orientierungen und Skalarprodukte einführen, siehe Bemerkung 6.41 unten.

(2) Wenn die Gruppe G isomorph zur Automorphismengruppe von F mit einer vorgegebenen Struktur ist, aufgefasst als Unterraum des Abbildungsraums $kC(F, F)$ aus Abschnitt 4.c, dann können wir das obige G-Prinzipalbündel identifizieren mit dem Unterraum von $kC(F, E)$, der alle strukturerhaltenden Abbildungen von F in eine Faser E enthält.

Sei etwa $V \to B$ ein $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang r, und sei $G = GL(r, \Bbbk)$ die Automorphismengruppe von $\Bbbk^r$. Ein Vektorraumisomorphismus $x\colon \Bbbk^r \to V_b$ entspricht gerade der Festelegung einer Basis $v_1 = x(e_1)$, $\ldots$, $v_r = x(e_r)$ von V_b. Wir erhalten somit ein $GL(r, \Bbbk)$-Prinzipalbündel $P = P_{GL}(V)$, das sogenannte *Rahmenbündel* von V, durch

$$P_{GL}(V) = \left\{ (v_1, \ldots, v_r) \in P^r \;\middle|\; p(v_1) = \cdots = p(v_r),\ (v_1, \ldots, v_r) \text{ Basis von } V_{p(v_1)} \right\}$$

und einen Vektorbündelisomorphismus $P_{GL}(V) \times_{GL(r,\Bbbk)} \Bbbk^r \to V$ mit

$$[(v_1, \ldots, v_r), (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)] \longmapsto v_1\lambda_1 + \cdots + v_r\lambda_r \in V \ .$$

6.40. Beispiel. Wir geben zunächst einfache Beispiele von Vektorbündeln an. In Abschnitt 3.i hatten wir bereits das Normalenbündel einer Mannigfaltigkeit kennengelernt.

(1) Das *triviale Vektorbündel* $\underline{\Bbbk}^r = B \times \Bbbk^r \to B$ ist assoziiert zum trivialen Prinzipalbündel $B \times G$ mit $G = GL(r, \Bbbk)$.

(2) Der $\Bbbk$-projektive Raum $\Bbbk P^n$ ist der Raum aller eindimensionalen Unterräume von $\Bbbk^{r+1}$. Das tautologische Bündel τ über $\Bbbk P^n$ ist ein $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang 1. Es hat als Faser über einem Unterraum $L \subset \Bbbk^{r+1}$ genau diesen Unterraum. Wir können die Quotientenabbildung $p\colon P = \Bbbk^{r+1} \setminus \{0\} \to \Bbbk P^n$ als ein $GL(1, \Bbbk)$-Prinzipalbündel auffassen, wobei $GL(1, \Bbbk) = \Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$ gilt. Dann ist τ zu diesem Prinzipalbündel assoziiert.

Das *Möbiusband* ist das tautologische Bündel über $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. Es ist bis auf Isomorphie das einzige nichttriviale reelle Vektorbündel über S^1 vom Rang 1.

(3) Es sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, dann ist das Tangentialbündel TM von M ein reelles Vektorbündel vom Rang n. Dabei liefern die Ableitungen von Karten $\psi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ lokale Trivialisierungen der Form $d\psi\colon TU \to TV \cong V \times \mathbb{R}^n$. Das zugehörige $GL(n, \mathbb{R})$-Prinzipalbündel konstruieren wir wie in Bemerkung 6.39 (2).

(4) Eine Riemannsche Metrik g ist ein Skalarprodukt g_x auf T_xM, das differenzierbar von $x \in M$ abhängt. Indem wir auf die obigen lokalen Trivialisierungen das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden, erhalten wir orthonormale lokale Trivialisierungen. Das zugehörige $O(n)$-Prinzipalbündel konstruieren wir in Bemerkung 6.41 (2). Man beachte, dass die lokalen Trivialisierungen $d\varphi$ zu Karten φ nur dann selbst orthonormal sein können, wenn (M, g) flach ist, das heißt, wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet.

(5) Für n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten ist das Tangentialbündel analog ein $\mathbb{C}$-Vektorbündel vom Rang n.

6.41. Bemerkung. Wir wollen Bemerkung 6.39 anhand von Vektorbündeln mit einer zusätzlichen Struktur veranschaulichen. Dabei können wir die folgenden Punkte wahlweise als Definition der entsprechenden Zusatzstruktur auffassen, oder, falls wir schon eine Definition kennen, als Beschreibung mittels einer G-Struktur. Das $Gl(n, \Bbbk)$-Prinzipalbündel zu einem Vektorbündel $V \to B$ hatten wie in Bemerkung 6.39 (2) bereits als Rahmenbündel von V konstruiert.

(1) Eine *Orientierung* auf einem reellen Vektorbündel V ist eine faserweise Orientierung von V. Als typische Faser betrachten wir $\mathbb{R}^r$ mit der Standardorientierung, als Automorphismengruppe erhalten wir $GL(r, \mathbb{R})^+$. Für uns ist ein orientiertes Vektorbündel also ein $GL(r, \mathbb{R})^+$-Vektorbündel. Wir konstruieren ein solches Bündel $P_{GL^+}(V)$ mit $V \cong P_{GL^+}(V) \times_{GL(r,\mathbb{R})^+} \mathbb{R}^r$, indem wir in Bemerkung 6.39 (2) nur orientierte Basen zulassen. Das Möbiusband aus Beispiel 6.40 (2) trägt keine Orientierung, also auch keine $GL_1(\mathbb{R})^+$-Struktur.

(2) Ein *Euklidisches Vektorbündel* ist ein Vektorbündel V mit einem faserweisen Skalarprodukt auf jeder Faser. Die typische Faser ist in diesem Falle $\mathbb{R}^r$ mit dem Standardskalarprodukt und Automorphismengruppe $O(r)$. Wir erhalten das zugehörige Bündel $P_O(V)$, indem wir in der obigen Konstruktion nur Orthonormalbasen zulassen. Analog verfahren wir mit orientierten Euklidischen Vektorbündeln; diese tragen entsprechend eine $SO(r)$-Struktur. Falls B ein parakompakter Raum ist, also insbesondere Partitionen der Eins zu beliebigen offenen Überdeckungen zulässt, kann man auf jedem reellen Vektorbündel ein faserweises Skalarprodukt wählen. Zu jeder $GL(r, \mathbb{R})$- ($SL(r, \mathbb{R})$-) Struktur erhält man also immer eine $O(r)$- ($SO(r)$-) Struktur falls B parakompakt ist; diese ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig.

(3) Die Gruppe $SO(n)$ hat eine zweifache Überlagerung $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$, die für $n \geq 2$ zusammenhängend und für $n \geq 3$ die universelle Überlagerung ist. Man kann die $SO(n)$-Wirkung auf $\mathbb{R}^n$ zurückziehen auf die Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$. Eine *Spin-Struktur* auf einem reellen Vektorbündel V vom Rang n ist also ein Isomorphismus $P_{\mathrm{Spin}} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbb{R}^n \to V$. Das Bündel P_{Spin} ist dabei stets eine zweifache Überlagerung des Bündels P_{SO} aus (2), insbesondere induziert eine Spin-Struktur (in unser Beschreibung) stets ein faserweises Skalarprodukt auf V. Da $\mathrm{Spin}(n)$ nicht effektiv wirkt, kann man P_{Spin} jedoch nicht wie in Bemerkung 6.39 (2) explizit angeben. Tatsächlich gibt es $O(n)$-Bündel, die keine Spin-Struktur zulassen, und auch solche, die mehrere verschiedene Spin-Strukturen erlauben.

(4) Sei $r = 2k$. Eine $GL(k, \mathbb{C})$-Struktur macht aus einem reellen Vektorbündel V vom Rang $2k$ ein komplexes vom Rang k, die typische Faser $\mathbb{C}^k$ ist über $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^{2k}$ isomorph. Der Multiplikation mit i entspricht ein reeller Automorphismus J mit $J^2 = -1$; diesen nennt man auch eine *komplexe Struktur* auf V. Eine $U(k)$-Struktur entspricht der zusätzlichen Wahl eines Hermiteschen Skalarprodukts auf jeder Faser.

(5) Es gibt $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten M, deren Tangentialbündel mit einer Struktur J wie in (4) versehen werden können. In diesem Fall sprechen wir von einer *fast komplexen* Struktur auf M. Eine fast komplexe Struktur erlaubt im Allgemeinen nicht, einen passenden komplexen Mannigfaltigkeitsatlas von M zu wählen, fast

komplexe Strukturen auf TM sind somit schwächer als die komplexen Strukturen aus Beispiel 6.40 (5).

(6) Das triviale Bündel aus Beispiel 6.40 (1) hat als Strukturgruppe die triviale Gruppe $G = \{e\}$. In diesem Fall lassen wir in der Konstruktion aus Bemerkung 6.39 (2) für jede Faser nur die Standardbasis zu, erhalten also ein $\{e\}$ Prinzipalbündel $P \cong B$.

6.g. Klassifikation von Prinzipalbündeln

In diesem Abschnitt wollen wir G-Prinzipalbündel, und damit nach Bemerkung 6.59 auch Vektorbündel, für eine große Klasse von topologischen Räumen durch Homotopieklassen von Abbildungen in einen sogenannten klassifizierenden Raum BG beschreiben. In den nächsten Abschnitten benutzen wir diese Methode, um zwei weitere Familien von Homologie- und Kohomologiefunktoren zu konstruieren.

Für die folgenden Konstruktionen benötigen wir Partitionen der Eins. Dazu definieren wir den *Träger* einer Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ als Teilmenge

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{\, x \in X \mid f(x) \neq 0 \,\}}\ .$$

6.42. Definition. Es sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung eines topologischen Raumes X. Eine $\mathcal{U}$ *untergeordnete Partition der Eins* ist eine Familie stetiger Funktionen $\rho_j\colon X \to I$ mit j aus einer Indexmenge J, so dass die folgenden Axiome gelten.

(1) *Lokale Endlichkeit.* Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $U \subset X$, so dass $\operatorname{supp}(\rho_j) \cap U = \emptyset$ für fast alle $j \in J$.
(2) *Unterordnung unter $\mathcal{U}$.* Zu jedem j existiert ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $\operatorname{supp}(\rho_j) \subset U$.
(3) *Partition der Eins.* Es gilt

$$\sum_{j \in J} \rho_j = 1\ .$$

Wegen Bedingung (1) ist die Summe in (3) endlich. Wir werden Bedingung (2) benutzen, um lokale Konstruktionen innerhalb der Mengen $U \in \mathcal{U}$ auf ganz X zu übertragen.

6.43. Bemerkung. Ohne Beweis geben wir eine Reihe von Resultaten zu Partitionen der Eins an.

(1) Wenn X normal ist (siehe Definition 1.26) und $\mathcal{U}$ lokal endlich, das heißt jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung V, so dass $U \cap V = \emptyset$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$, dann besitzt $\mathcal{U}$ eine untergeordnete Partition der Eins. Der Beweis benutzt unter anderem das Lemma 1.29 von Urysohn.
(2) Ein Hausdorff-Raum heißt *parakompakt,* wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{V}$ besitzt. Das heißt, zu jedem $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subset U$, und zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung W mit $V \cap W = \emptyset$ für fast alle $V \in \mathcal{V}$. Unter anderem sind metrische Räume, kompakte Räume und CW-Komplexe stets parakompakt.
(3) Parakompakte Räume sind immer normal. Insbesondere gibt es zu jeder offenen Überdeckung eines parakompakten Raumes stets eine untergeordnete Partition der Eins.

6.44. Lemma (Homotopielemma für Prinzipalbündel). *Es sei X parakompakt und $p\colon P \to X \times I$ ein G-Prinzipalbündel. Dann gibt es eine Abbildung von G-Prinzipalbündeln $P \to P|_{X \times \{0\}}$ über der Abbildung $\pi\colon X \times I \to X \times I$ mit $\pi(x,t) = (x,0)$.*

Wegen Bemerkung 6.36 (1) ist P also isomorph zum Rückzug eines G-Prinzipalbündels auf $X \cong X \times \{0\}$. Der Name des Lemmas erklärt sich aus dem nächsten Resultat.

6.45. Folgerung. *Es sei X parakompakt, und f, $g\colon X \to Y$ seien homotope Abbildungen. Sei $P \to Y$ ein Prinzipalbündel, dann sind f^*P und $g^*P \to X$ isomorph.* □

Mit den Überlegungen aus dem letzten Abschnitt ergibt sich das analoge Resultat für Vektorbündel. Der folgende Beweis funktioniert im Wesentlichen genauso für beliebige Faserbündel.

Beweis von Lemma 6.44. Wir wählen eine Überdeckung $\mathcal{V}$ von $X \times I$, so dass $P|_V$ trivial ist für alle $V \in \mathcal{V}$. Für jeden Punkt $x \in X$ reichen wegen Kompaktheit von I endlich viele Menge V_1, $\dots$, $V_n \in \mathcal{V}$ aus, um $\{x\} \times I$ zu überdecken. Wir finden daher eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ und eine offene Menge $U \subset X$, so dass $U \times [t_{i-1}, t_i] \subset V_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Indem wir die gegebenen lokalen Trivialisierungen auf diesen Teilmengen zusammensetzen, erhalten wir im ersten Schritt eine lokale Trivialisierung von $P|_{U \times I}$. Wir können also eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von X so wählen, dass $P|_{U \times I}$ für alle $U \in \mathcal{U}$ trivial ist.

Im nächsten Schritt konstruieren wir eine lokal endliche Folge von Funktionen $\rho_n \colon X \to I$ mit Summe 1, so dass die Teilmengen $U_n = \rho_n^{-1}((0,1]) \subset X$ eine offene Überdeckung von X bilden, und $P|_{U_n \times I}$ für alle n trivial ist. Dazu sei $(\rho_j)_{j \in J}$ eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der Eins. Für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq E \subset J$ sei

$$\rho_E(x) = \max\bigl(0, \min_{j \in E}(\rho_j(x)) - \max_{j \notin E}(\rho_j(x))\bigr) \ ,$$

da die Familie $(\rho_j)_{j \in J}$ lokal endlich ist, sind diese Funktionen stetig, und wir betrachten die Teilmengen $U_E \subset X$, auf denen ρ_E positiv ist. Falls $U_E \cap U_F \neq \emptyset$, gilt entweder $E \subset F$ oder $F \subset E$. Wir erhalten daher eine Überdeckung von X aus Mengen der Form

$$U_n = \dot{\bigcup_{E \subset J, \#E = n}} U_E$$

für $n \geq 1$. Da ρ_j lokal endlich war, ist diese Familie ebenfalls lokal endlich. Jede Teilmenge U_E ist im Träger jeder Funktion ρ_j mit $j \in E$ enthalten, insbesondere lässt sich P aus $U_E \times I$, und daher auch auf $U_n \times I$ trivialisieren. Zu guter Letzt sei

$$\rho_n = n \cdot \max_{E \subset J, \#E = n} \rho_E \ ,$$

dann ist die Familie ρ_n wieder lokal endlich mit Summe 1.

Im letzten Schritt konstruieren wir die gesuchte Abbildung $F \colon P \to P|_{X \times \{0\}}$ induktiv über n. Für $n \geq 0$ sei

$$Y_n = \bigl\{ (x,t) \bigm| 0 \leq t \leq \rho_1(x) + \cdots + \rho_n(x) \bigr\} \ , \qquad \text{so dass} \qquad X \times I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \ .$$

Wir schreiben $P_n = P|_{Y_n}$ und $\pi_n = \pi|_{Y_n}$. Dann gilt $\pi_0 = \mathrm{id}_{Y_0}$, und wir setzen $F|_{Y_0} = \mathrm{id}_{Y_0}$. Sei jetzt $n \geq 1$, und sei $F|_{P_n}$ als G-Prinzipalbündelabbildung über π_{n-1} bereits konstruiert. Das Bild von $Y_n \setminus Y_{n-1}$ unter π in $X \times \{0\} \cong X$ ist genau die disjunkte Vereinigung der U_E mit $\#E = n$, wir können also $F|_{P_n}$ über den Teilmengen

$$(Y_n \setminus Y_{n-1}) \cap (U_E \times I)$$

einzeln konstruieren. Dazu benutzen wir zunächst die Trivialisierungen, um eine G-Prinzipalbündelabbildung von P über dieser Teilmenge auf die Einschränkung von P auf den Graphen von $\rho_1 + \cdots \rho_{n-1}$ zu konstruieren. Diese verketten wir mit $F|_{P_{n-1}}$ um F auf P_n fortzusetzen. Da die ursprünglich Partition der Eins lokal endlich war, hat jeder Punkt eine Umgebung W, so dass die Einschränkung von P auf $W \times I$ in endlich vielen Schritten definiert ist. Insbesondere ist die Abbildung F stetig und leistet das gewünschte. □

Wir erinnern uns an die Verbund-Konstruktion aus Übung 3.118. Für eine topologische Gruppe G definieren wir

$$EG = \operatorname*{colim}_{n \to \infty} G^{*n} \ , \tag{6.6}$$

wobei G^{*n} den n-fachen Verbund mit sich selbst bezeichne. Es sei

$$\Delta^n = \left\{ (s_0, \dots, s_n) \in [0,1]^{n+1} \;\middle|\; s_0 + \dots + s_n = 1 \right\}$$

der Standardsimplex. Dann gilt

$$G^{*(n+1)} \cong G^{n+1} \times \Delta^n / \sim ,$$

wobei die Relation $\sim$ erzeugt wird durch

$$(g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \sim (g_0, \dots, g'_i, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \qquad \text{wenn } s_i = 0,$$

mit $i \in \{0, \dots, n\}$ beliebig. Wir erhalten natürliche Einbettungen $G^{*n} \hookrightarrow G^{*n} * G \cong G^{*(n+1)}$, bezüglich der wir den obigen Kolimes bilden. Elemente können wir als $((g_i)_i, (s_i)_i)$ schreiben, wobei $s_i = 0$ für fast alle i und $s_0 + \dots = 1$ gelten muss. Aufgrund der obigen Äquivalenzrelation spielt der Wert von g_i keine Rolle, wenn $s_i = 0$. Tatsächlich ist EG die geometrische Realisierung eines sogenannten *simplizialen Raums.*

Sei G selbst k-zusammenhängend mit $k \geq -1$, dann folgt aus Übung 3.119 induktiv, dass G^{*n} ein $(n(k+2)-2)$-fach zusammenhängender Raum ist. Insbesondere ist EG schwach zusammenziehbar. Wenn wir EG als CW-Komplex schreiben können (zum Beispiel, wenn G eine diskrete Gruppe oder eine Matrixgruppe ist), ist EG nach dem Satz 4.46 von Whitehead sogar zusammenziehbar.

Die Gruppe G wirkt stetig von rechts auf EG durch

$$\big((g_i)_i, (s_i)_i\big) \cdot g = \big((g_i g)_i, (s_i)_i\big) .$$

Diese Wirkung ist frei. Für den Quotienten schreiben wir

$$BG = EG/G . \tag{6.7}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Teilmenge

$$E_i = \operatorname*{colim}_{n \geq i} \left\{ (g_0, \dots, g_n; s_0, \dots, s_n) \;\middle|\; s_i \neq 0 \right\} \subset EG \qquad \text{und} \qquad B_i = E_i/G \subset BG . \tag{6.8}$$

Da $E_i \cap G^{*(n+1)}$ für alle n offen ist, ist E_i in EG offen. Außerdem ist E_i invariant unter der obigen G-Wirkung, also sei $B_i = E_i/G \subset BG$ der Quotient. Dann ist $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von BG. Für Punkte $q = ((g_i)_i, (s_i)_i) \in E_i$ ist die Koordinate $g_i \in G$ aufgrund der Verbund-Konstruktion wohldefiniert und nach Definition der Kolimes-Topologie stetig. Also ist $EG \to BG$ lokal trivial, und insbesondere ein G-Prinzipalbündel.

6.46. Definition. Ein G-Prinzipalbündel $E \to B$ heißt *universell,* und B heißt *klassifizierender Raum* für G-Prinzipalbündel, wenn es für jedes G-Prinzipalbündel $P \to X$ über einem parakompakten Raum X eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $f\colon X \to B$ und einen Isomorphismus $P \cong f^*E$ von G-Prinzipalbündeln gibt. In diesem Fall heißt f die *klassifizierende Abbildung* von $P \to X$.

6.47. Bemerkung. Wir würden gern den Funktor $\mathrm{Bun}_G\colon \mathcal{T}_+ \to \mathcal{S}et$ mit einem Funktor der Form $[\,\cdot\,, B]$ gleichsetzen, wobei B ein klassifizierender Raum sei. Doch leider können wir nur für parakompakte Räume X zeigen, dass das Zurückziehen des universellen Bündels einen natürlichen Isomorphismus $[X, B] \cong \mathrm{Bun}_G(X)$ liefert; hierzu brauchen wir auch das Homotopielemma 6.44. Aus dem gleichen Grund können wir auch nicht einfach sagen, dass B durch eine universelle Eigenschaft bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig charakterisiert ist.

Die Quillen-Modellstruktur bietet einen möglichen Ausweg. Wir können den Funktor Bun_G umdefinieren, indem wir zunächst jeden Raum X mit Hilfe des CW-Approximationssatzes 4.51 durch einen schwach homotopieäquivalenten CW-Komplex X' ersetzen. Die Approximationsabbildung $X' \to X$ liefert uns eine Abbildung $\mathrm{Bun}_G(X) \to \mathrm{Bun}_G(X')$, und wir betrachten $\mathrm{Bun}_G(X')$ anstelle von $\mathrm{Bun}_G(X)$. Da CW-Komplexe parakompakt sind, gilt jetzt $\mathrm{Bun}_G(X') \cong [X', B] \cong [X, B]$ in der Notation von Definition 4.62.

Alternativ können wir den Funktor Bun_G über beliebigen Räumen umdefinieren, indem wir nur solche Bündel $P \to X$ zulassen, für die eine trivialisierende Überdeckung mit einer untergeordneten Partition der Eins existiert. Alle Beweise in diesem Abschnitt lassen sich auf diese Klasse von Bündeln ausdehnen, siehe [**tD2**, Chapter 14], und dieser Zugang passt zur Strøm-Modellstruktur.

Wir werden zeigen, dass das oben konstruierte Bündel $EG \to BG$ ein universelles G-Prinzipalbündel ist. Zur offenen Überdeckung $BG = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ existiert eine untergeordnete Partition der Eins, also ist BG tatsächlich bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt, wenn wir zusätzlich fordern, dass das universelle Bündel eine trivialisierende Überdeckung mit einer untergeordneten Partition der Eins zulässt. Für geeignete Gruppen G ist BG übrigens parakompakt. Das gilt insbesondere für diskrete Gruppen, und für die klassischen Matrixgruppen wie $U(n,\mathbb{k})$ und $SU(n,\mathbb{k})$ aus (6.5).

6.48. Satz (Klassifikation von G-Prinzipalbündeln). *Das Bündel $EG \to BG$ ist ein universelles G-Prinzipalbündel.*

Beweis. Es sei X parakompakt, dann existiert nach Lemma 6.44 eine wohldefinierte Abbildung $[X, BG] \to \mathrm{Bun}_G(X)$. Zur Surjektivität betrachten wir ein G-Prinzipalbündel $P \to X$ über einem parakompakten Raum X und suchen eine Abbildung $F\colon P \to EG$ von G-Prinzipalbündeln über einer stetigen Abbildung $f\colon X \to BG$. Wie im Beweis des Homotopielemmas 6.44 wird X von abzählbar vielen offenen Mengen $U_n \subset X$ überdeckt, auf denen P trivial ist, und es gibt Funktionen $\rho_n\colon X \to I$, die außerhalb U_n verschwinden, und deren (lokal endliche) Summe 1 ist. Es seien $\varphi_n\colon P|_{U_n} \to U_n \times G$ lokale Trivialisierungen, dann erhalten wir die gesuchte Abbildung $F\colon P \to EG$ mit

$$F(y) = \big(((\mathrm{pr}_G \circ \varphi_n)(x))_n, (\rho_n(x))_n\big) \qquad \text{für alle } y \in P\ ,$$

wobei pr_G die Projektion $U_n \times G \to G$ bezeichne. Sie ist mit den G-Wirkungen verträglich und induziert daher eine Abbildung $f\colon X \to BG$. Da die Überdeckung $(U_n)_n$ lokal endlich ist, existiert zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U und eine Zahl n_0, so dass $U \cap U_n = \emptyset$ für alle $n \geq n_0$. Die obige Abbildung ist stetig von $P|_U$ in den n-fachen Verbund von G, daher ist F insgesamt stetig, und somit auch f.

Zur Injektivität der Zuordnung $[X, BG] \to \mathrm{Bun}_G(X)$ sei zunächst $F\colon P \to EG$ eine Abbildung von G-Prinzipalbündeln über $f\colon X \to BG$, gegeben in der Form

$$F(y) = \big(g_0(y), g_1(y), \dots; s_0(y), s_1(y), \dots\big)\ .$$

Mit Hilfe einer Teleskophomotopie ist die obige Abbildung homotop zu

$$F_1(y) = \big(g_0(y), e, g_1(y), e, \dots; s_0(y), 0, s_1(y), 0, \dots\big)\ ;$$

dabei spielen die Einträge in G an den ungeraden Stellen keine Rolle, da die entsprechenden s-Koordinaten alle verschwinden. Die obige Homotopie hat für $i \geq 1$ und $t \in [2^{-i}, 2^{1-i}]$ die Gestalt

$$h(y,t) = \big(g_0(y), \dots, g_{i-1}(y), g_i(y), g_i(y), g_{i+1}(y), g_{i+1}(y), \dots; \\ s_0(y), \dots, s_{i-1}(y), (2-2^i t)\, s_i(y), (2^i t - 1)\, s_i(y), \dots\big)\ .$$

Eine zweite Abbildung $F'\colon P \to EG$ homotopieren wir entsprechend zu

$$F'_1(y) = \big(e, g'_0(y), e, g'_1(y), e, \dots; 0, s'_0(y), 0, s'_1(y), 0, \dots\big)\ .$$

Zwischen diesen zwei Abbildungen gibt es jetzt eine Homotopie

$$h(y,t) = \big(g_0(y), g'_0(y), g_1(y), g'_1(y), \dots; (1-t)s_0(y), ts'_0(y), (1-t)s_1(y), ts'_1(y), \dots\big)\ .$$

All diese Homotopien sind mit den G-Wirkungen verträglich, daher erhalten wir entsprechende Homotopien zwischen den zugrundeliegenden Abbildungen f, $f'\colon X \to BG$. □

Wir erinnern uns an die Gruppen $U(n,\mathbb{k})$ aus (6.5) und nennen $\mathbb{k}$-Vektorbündel mit passendem Skalarprodukt entsprechend $\mathbb{k}$-Hermitesch. Somit ist „$\mathbb{R}$-Hermitesch“ gleichbedeutend mit „Euklidisch“.

6.49. Folgerung (Klassifikation von Vektorbündeln). *Für parakompakte Räume X werden $\mathbb{k}$-Vektorbündel vom Rang n klassifiziert durch $[X, BU(n,\mathbb{k})]$, für $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Orientierte reelle Vektorbündel werden klassifiziert durch $[X, BSO(n)]$.*

Beweis. Wir benutzen eine Partition der Eins, um $\mathbb{k}$-Hermitesche Metriken in lokalen Trivialisierungen zu globalen Metriken zusammenzukleben. Die Isomorphieklasse des so entstandenen $\mathbb{k}$-Hermiteschen Vektorbündels hängt nicht von der Wahl der Metrik ab. Nach Bemerkung 6.41 entspricht dieser Isomorphieklasse genau eine Isomorphieklasse von $U(n,\mathbb{k})$-Rahmenbündeln, und diese werden nach Satz 6.48 durch $[X, BU(n,\mathbb{k})]$ klassifiziert. Zu orientierten reellen Vektorbündeln konstruieren wir entsprechend $SO(n)$-Rahmenbündel. □

6.50. Bemerkung. Es gibt noch einen weiteren Zugang zu klassifizierenden Räumen, der besonders gut für die Gruppen $U(n,\mathbb{k})$ funktioniert. Hierzu sei $G_n(\mathbb{k}^N)$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit der n-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{k}^N$. Die Einbettung $\mathbb{k}^N \cong \mathbb{k}^N \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{k}^{N+1}$ induziert eine Einbettung $G_n(\mathbb{k}^N) \to G_n(\mathbb{k}^{N+1})$, und wir definieren die unendliche Grassmannsche $G_n(\mathbb{k})$ als Kolimes der $G_n(\mathbb{k}^N)$. Für $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ist $G_n(\mathbb{k}^N)$ ein klassifizierender Raum für die Gruppe $U(n,\mathbb{k})$, und somit homotopieäquivalent zum obigen Raum $BU(n,\mathbb{k})$.

Für die unendlich-dimensionalen projektiven Räume $\mathbb{k}P^\infty = G_1(\mathbb{k})$ lässt sich sogar ein expliziter Homöomorphismus zu $BU(1,\mathbb{k})$ angeben, siehe Übung. Da $\mathbb{R}P^\infty$ ein Modell für den Eilenberg-Mac Lane-Raum $H(\mathbb{Z}/2)_1$ und $\mathbb{C}P^\infty$ ein Modell für $H\mathbb{Z}_2$ ist, entsprechen auf parakompakten Räumen X die Isomorphieklassen reeller (komplexer) Geradenbündel gerade Kohomologieklassen in $H^1(X;\mathbb{Z}/2)$ ($H^2(X)$). Das ist ein möglicher Zugang zu charakteristischen Klassen. Auf der anderen Seite ist $\mathbb{H}P^\infty$ kein Eilenberg-Mac Lane-Raum, siehe Beispiel 5.42 (6), daher gibt es für quaternionische Geradenbündel keine analoge Interpretation als Kohomologieklassen.

6.h. Topologische K-Theorie

Wir benutzen Vektorbündel jetzt, um einen allgemeinen Kohomologiefunktor zu konstruieren und das zugehörige Spektrum anzugeben. Wir werden hier nicht alle Sätze beweisen. Bis jetzt hatten all unsere Vektorbündel konstante Dimension auf ganz X. Das werden wir in Zukunft nicht mehr fordern.

Konstruktionen wie direkte Summe, Tensorprodukt, oder Bilden des dualen Moduls lassen sich faserweise auch für Vektorbündel durchführen. Dazu betrachten wir zunächst zwei Prinzipalbündel P, $Q \to X$ mit Strukturgruppe G beziehungsweise H. Wir ziehen P auf Q oder Q auf P zurück und erhalten ein $G \times H$-Prinzipalbündel $P \times_X Q$. Falls G auf $\mathbb{k}^k$ und H auf $\mathbb{k}^\ell$ wirkt, liefern die jeweiligen universellen Eigenschaften $G \times H$-Wirkungen auf $\mathbb{k}^k \oplus \mathbb{k}^\ell$ und, falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, auch auf $\mathbb{k}^k \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}^\ell$. Analog erhalten wir eine Wirkung von $G \times H$ auf dem $\mathbb{H}$-Vektorraum $\mathbb{H}^k \otimes \mathbb{R}^\ell$, falls G auf $\mathbb{H}^k$ und H auf $\mathbb{R}^\ell$ wirkt. Außerdem wirkt G auf dem Dualraum von $\mathbb{k}^k$ durch $(g^*)^{-1}$.

6.51. Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Ein $\mathbb{k}$-*Vektorbündel* $p\colon V \to X$ besteht aus einer lokalkonstanten Funktion $r\colon X \to \mathbb{N}$ und je einem $\mathbb{k}$-Vektorbündel $p\colon p^{-1}(r^{-1}(n)) \to r^{-1}(n)$ vom Rank n für alle n. Wir nennen r den *lokalen Rang* von V. Ein $\mathbb{k}$-*Vektorbündelisomorphismus* $F\colon V \to W$ von $\mathbb{k}$-Vektorbündeln $p\colon V \to X$, $q\colon W \to X$ besteht aus je einer Vektorbündelabbildung $F_n\colon p^{-1}(r^{-1}(n)) \to q^{-1}(r^{-1}(n))$.

Es seien V und $W \to X$ zwei $\mathbb{k}$-Vektorbündel vom lokalen Rang r beziehungsweise $s\colon X \to \mathbb{N}$ mit $V|_{r^{-1}(k)} = P_k \otimes_{G_k} \mathbb{k}^k$ und $W|_{s^{-1}(\ell)} = Q_\ell \otimes_{H_\ell} \mathbb{k}^\ell$ für alle k, ℓ. Wir definieren die *Whitney-Summe* $V \oplus W$, das *Whitney-Produkt* $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ (falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und das duale Bündel V^*

durch

$$\begin{aligned}(V \oplus W)|_{r^{-1}(k)\cap s^{-1}(\ell)} &= (P_k \times_X Q_\ell) \times_{G_k\times H_\ell} (\mathbb{k}^k \oplus \mathbb{k}^\ell)\,,\\ (V \otimes_{\mathbb{k}} W)|_{r^{-1}(k)\cap s^{-1}(\ell)} &= (P_k \times_X Q_\ell) \times_{G_k\times H_\ell} (\mathbb{k}^k \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}^\ell)\\ \text{und} \qquad V^*|_{r^{-1}(k)} &= P_k \times_G (\mathbb{k}^k)^*\,.\end{aligned}$$

All diese Konstruktionen sind mit Zurückziehen von Vektorbündeln verträglich. Ein Tensorprodukt über $\mathbb{H}$ existiert leider nicht; stattdessen können wir quaternionische Vektorbündel mit reellen tensorieren, und erhalten wieder quaternionische Vektorbündel. Weitere Konstruktionen sind möglich, beispielsweise ist $\hom(V,W) \cong V^* \otimes_{\mathbb{k}} W$ ein innerer Hom-Funktor für Vektorbündel.

Direkte Summe und Whitney-Produkt machen aus der Menge der reellen oder komplexen Vektorbündel bis auf Isomorphismus einen kommutativen Semiring. Die sogenannte „Grothendieck-Konstruktion“ macht daraus einen Ring.

6.52. Definition. Ein *virtuelles* $\mathbb{k}$*-Vektorbündel* auf X ist ein Paar $V \ominus W$ von $\mathbb{k}$-Vektorbündeln $p\colon V \to X$ und $q\colon W \to X$. Zwei *virtuelle* $\mathbb{k}$*-Vektorbündel* $V \ominus W$ und $T \ominus U$ über X heißen *äquivalent,* kurz $V \ominus W \sim T \ominus U$, wenn es virtuelle $\mathbb{k}$-Vektorbündel R, $S \to X$ gibt, so dass $V \oplus R \cong T \oplus S$ und $W \oplus R \cong U \oplus S$. Direkte Summe und Tensorprodukt (falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) übertragen sich auf virtuelle Vektorbündel und sind mit Äquivalenz verträglich.

Der Ring (falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) beziehungsweise die Gruppe (falls $\mathbb{k} = \mathbb{H}$) der virtuellen $\mathbb{k}$-Vektorbündel auf X wird mit $K^0_{\mathbb{k}}(X)$ bezeichnet. Für punktierte Räume X bezeichne $\iota\colon \mathrm{pt} \to X$ die Inklusion des Basispunktes, dann definieren wir $\tilde{K}^0_{\mathbb{k}}(X) = \ker\bigl(\iota^*\colon K^0_{\mathbb{k}}(X) \to K^0_{\mathbb{k}}(\mathrm{pt})\bigr)$.

Sei schließlich $f\colon Y \to X$ stetig. Das Zurückziehen von Vektorbündeln induziert

$$f^*\colon K^0_{\mathbb{k}}(X) \longrightarrow K^0_{\mathbb{k}}(Y)\,, \qquad \text{und} \qquad f^*\colon \tilde{K}^0_{\mathbb{k}}(X) \longrightarrow \tilde{K}^0_{\mathbb{k}}(Y)$$

falls f punktiert ist.

6.53. Beispiel. Nach dem Satz 3.48 vom Igel ist das Tangentialbündel TS^{2n} nicht trivial. Betrachten wir die übliche Einbettung $S^{2n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, dann ist das Normalenbündel νS^{2n} trivial, denn für jeden Punkt $p \in S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ bildet der Ortsvektor p zugleich eine Basis des eindimensionalen Normalenraums $\nu_p S^{2n}$, siehe Abschnitt 3.i. Indem wir T_pS^{2n} und ν_pS^{2n} als Unterräume von $\mathbb{R}^{2n+1}$ auffassen, erhalten wir $\mathbb{R}$-Vektorbündelisomorphismen

$$T_pS^{2n} \oplus \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} T_pS^{2n} \oplus \nu_pS^{2n} \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^{2n+1} \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbb{R}}^{2n} \oplus \underline{\mathbb{R}}\,.$$

Somit ist das Tangentialbündel äquivalent (aber nicht isomorph!) zu einem trivialen Vektorbündel. Man sagt daher, dass TS^{2n} *stabil trivial* ist. Außerdem sehen wir, dass die Kürzungsregel für die Whitney-Summe nicht gilt.

Der Übergang von $\mathbb{k}$-Vektorbündeln zu virtuellen $\mathbb{k}$-Vektorbündeln in Definition 6.51 entspricht dem Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$. Da die Halbgruppe der $\mathbb{k}$-Vektorbündel jedoch keine Kürzungseigenschaft besitzt, mussten wir etwas sorgfältiger vorgehen.

6.54. Bemerkung. Wir sammeln ein paar nützliche Eigenschaften (ohne Beweise).

(1) Jedes $\mathbb{k}$-Vektorbündel V über einem parakompakten Raum X lässt sich mit einem faserweisen Skalarprodukt ausstatten, das in den Trivialisierungen stetig vom Basispunkt abhängt. Daher dürfen wir annehmen, dass $p\colon p^{-1}(r^{-1}(n)) \to r^{-1}(n)$ in diesem Fall ein $U(n,\mathbb{k})$-Vektorbündel ist. Auf der anderen Seite kann man auch zeigen, dass $U(n,\mathbb{k})$ ein Deformationsretrakt von $GL_n(\mathbb{k})$ und somit $BU(n,\mathbb{k})$ ein Deformationsretrakt von $BGL_n(\mathbb{k})$ ist.

(2) Zu jedem Vektorbündel W über einem kompakten Raum existiert ein sogenanntes *komplementäres Vektorbündel* U, so dass $W \oplus U \cong \underline{\mathbb{k}}^N$ für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere lässt sich jedes virtuelle $\mathbb{k}$-Vektorbündel $V \ominus W$ über einem kompakten Raum X durch das äquivalente virtuelle $\mathbb{k}$-Vektorbündel $(V \oplus U) \ominus \underline{\mathbb{k}}^N$ ersetzen. Für nicht kompakte Räume ist diese Aussage im Allgemeinen nicht richtig.
(3) Whitney-Summe und Whitney-Produkt erfüllen die üblichen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze jeweils bis auf natürliche Isomorphismen. Dadurch wird $K^0_{\mathbb{k}}(X)$ für alle X zu einem kommutativen Ring mit Einselement $\underline{\mathbb{k}}$, falls $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Außerdem können wir $K^0_{\mathbb{H}}(X)$ als $K^0_{\mathbb{R}}(X)$-Modul auffassen.
(4) Alle obigen Konstruktionen sind mit Zurückziehen verträglich. Wir erhalten also einen kontravarianten Funktor $K^0_{\mathbb{k}}$ von der Kategorie $\mathcal{T}op$ oder $kw\mathcal{H}$ in die Kategorie der kommutativen Ringe ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) beziehungsweise der $K^0_{\mathbb{R}}$-Moduln ($\mathbb{k} = \mathbb{H}$).
(5) Ein $\mathbb{k}$-Vektorbündel über einem Punkt ist ein $\mathbb{k}$-Vektorraum und wird klassifiziert durch seine Dimension $n \in \mathbb{N}$. Ein virtuelles $\mathbb{k}$-Vektorbündel über einem Punkt wird somit durch seine virtuelle Dimension $n = \mathbb{Z}$ klassifiziert.

Zu einer Kohomologietheorie fehlt uns unter anderem die lange exakte Sequenz. Daher wollen wir Ω-Spektren $\mathbb{K}$ für komplexe und $\mathbb{KO}$ für reelle K-Theorie konstruieren, so dass $\tilde{K}^0_{\mathbb{C}}(X) = [X, K_0]$ und $\tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(X) = [X, KO_0]$ zumindest für kompakte X gilt. Dazu betrachten wir die Folge von Gruppen $\mathrm{pt} = U(0, \mathbb{k}) \hookrightarrow U(1, \mathbb{k}) \hookrightarrow \dots$, wobei die Inklusionsabbildung einer Matrix $A \in U(n, \mathbb{k})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(n+1, \mathbb{k}) \tag{6.9}$$

zuordnet. Wir definieren topologische Gruppen

$$U(\mathbb{k}) = \operatorname*{colim}_{n\to\infty} U(n, \mathbb{k}) = \begin{cases} O & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{R}, \\ U & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{C}, \text{ und} \\ Sp & \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Wir erhalten Folgen von Inklusionen $EU(n, \mathbb{k}) \hookrightarrow EU(n+1, \mathbb{k})$ und $BU(n, \mathbb{k}) \hookrightarrow BU(n+1, \mathbb{k})$ und, da sowohl $E\cdot$ als auch $U(\mathbb{k})$ als Kolimiten konstruiert sind und Kolimiten kommutieren, ein universelles $U(\mathbb{k})$-Prinzipalbündel

$$EU(\mathbb{k}) = \operatorname*{colim}_{n\to\infty} EU(n, \mathbb{k}) \longrightarrow BU(\mathbb{k}) = \operatorname*{colim}_{n\to\infty} BU(n, \mathbb{k}) \cong EU/U \ .$$

6.55. Satz. *Sei X ein kompakter punktierter CW-Komplex, dann gilt*

$$\tilde{K}^0_{\mathbb{k}}(X) = [X, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})] \ .$$

Für den Satz ist es nicht nötig, dass X ein CW-Komplex ist; es macht den Beweis aber einfacher. Falls X nicht kompakt ist, erhalten wir immer noch eine Abbildung $\tilde{K}^0_{\mathbb{k}}(X) \to [X, \mathbb{Z} \times BU(\mathbb{k})]$, allerdings ist diese nicht immer ein Isomorphismus. Wir wählen Basispunkte in allen $BU(\mathbb{k})$ und betrachten als Beispiel den Raum

$$X = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} BU(k, \mathbb{k}) \ .$$

Dann gibt es kein virtuelles Vektorbündel $V \ominus W$ auf X, so dass $(V \ominus W)|_{BU(k,\mathbb{k})} \sim (VU(k, \mathbb{k}) \ominus \underline{\mathbb{k}}^k)$, insbesondere erfüllt der Funktor $\tilde{K}^0_{\mathbb{k}}$ nicht das Summenaxiom aus Definition 6.1 (3).

Beweis. Es sei $V \ominus W$ ein virtuelles $\mathbb{k}$-Vektorbündel über X, dann existiert $U \to X$, so dass $U \oplus W \cong \underline{\mathbb{k}}^n$ auf ganz X. Wir dürfen $U \oplus V$ mit einem Skalarprodukt ausstatten. Dann sei $r\colon X \to \mathbb{Z}$ der

lokale Rang des Bündels $U \oplus V$, und es sei $f_m \colon r^{-1}(m) \to BU(m, \Bbbk)$ die klassifizierende Abbildung des Bündels $(U \oplus V)|_{r^{-1}(m)}$. Wir definieren $F \colon X \to \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk)$ durch

$$F(x) = (m-n, f_m(x)) \in \{m-n\} \times BU(m, \Bbbk) \subset \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk) \qquad \text{für alle } m \text{ und alle } x \in r^{-1}(m).$$

Da isomorphe Vektorbündel nach Satz 6.48 homotope klassifizierende Abbildungen haben, können wir Wohldefiniertheit zeigen, indem wir $V \ominus W$ um ein $\Bbbk$-Vektorbündel R zu $(V \oplus R) \ominus (W \oplus R)$ „erweitern“ und die neue klassifizierende Abbildung mit F vergleichen. Dazu wählen wir wie oben ein $\Bbbk$-Vektorbündel S, so dass $W \oplus R \oplus S \cong \underline{\Bbbk}^\ell$. Das heißt, wir haben das obige Bündel U durch $U' = R \oplus S$ ersetzt. Wir erhalten einen $\Bbbk$-Vektorbündel-Isomorphismus

$$V \oplus U \oplus \underline{\Bbbk}^\ell \cong V \oplus U \oplus W \oplus U' \cong V \oplus U' \oplus \Bbbk^n \ .$$

Nach Konstruktion von $U(m, \Bbbk) \subset U(m+\ell, \Bbbk)$ und $BU(m, \Bbbk) \subset BU(m+\ell, \Bbbk)$ wird das Bündel $V \oplus U \oplus \underline{\Bbbk}^\ell$ nach wie vor durch

$$F \colon X \longrightarrow \{m-n\} \times BU(m, \Bbbk) \subset \{(m+\ell)-(n+\ell)\} \times BU(m+\ell, \Bbbk) \subset \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk)$$

klassifiziert. Diese Abbildung ist homotop zur klassifizierenden Abbildung für $V \oplus U' \oplus \Bbbk^n$, und es folgt Wohldefiniertheit.

Zur Surjektivität betrachten wir $F \colon X \to \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk)$. Wir können $BU(\Bbbk)$ mit einer CW-Struktur versehen, so dass die Unterräume $BU(n, \Bbbk)$ Unterkomplexe sind. Da X kompakt ist, faktorisiert eine zelluläre Approximation von F über $\mathbb{Z} \times BU(n, \Bbbk)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $F = (r, f)$, und ohne Einschränkung gelte $n \geq r$ auf ganz X. Dann klassifiziert F das $\Bbbk$-Vektorbündel

$$\big(f^* VU(n, \Bbbk)\big) \ominus \underline{\Bbbk}^{n-r} \ .$$

Zur Injektivität sei $H \colon X \times I \to \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk)$ eine zelluläre Homotopie, ohne Einschränkung faktorisiere H durch $\mathbb{Z} \times BU(n, \Bbbk)$ Nach dem Homotopielemma 6.44 sind die durch H_0 und H_1 induzierten virtuellen Bündel isomorph, also insbesondere äquivalent. □

Es bleibt zu zeigen, dass $BU(\Bbbk)$ zu einem Ω-Spektrum gehört. Dazu bezeichne $\tau_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ das tautologische Bündel. Man kann zeigen (Übung), dass

$$\tau_{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \cong \underline{\mathbb{C}} \oplus \tau_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \tau_{\mathbb{C}} \ ,$$

oder kurz $(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}})^2 = 0 \in K^0(S^2)$. Da $\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}|_{\mathrm{pt}} = 0$, gilt sogar $\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}} \in \tilde{K}^0(S^2)$.

6.56. Satz (Bott-Periodizität). *Für jeden gut punktierten kompakten topologischen Raum existiert ein Isomorphismus*

$$\sigma^2 \colon \tilde{K}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}^0(S^2 X) \ ,$$

dabei wird $\sigma^2(V \ominus W) \in \tilde{K}^0(S^2X)$ dargestellt durch das virtuelle $\mathbb{C}$-Vektorbündel

$$(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes_{\mathbb{C}} (V \ominus W) = p_{S^2}^*(\tau_{\mathbb{C}} \ominus \underline{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} p_X^*(V \ominus W) \in \tilde{K}^0(S^2 X) \ .$$

Das „äußere Tensorprodukt “$\boxtimes$“ entspricht dabei dem Smash-Produkt aus Definition 6.22, siehe Bemerkung 6.60. Für den Beweis, dass σ^2 einen Isomorphismus $\tilde{K}^0(X) \to \tilde{K}^0(S^2X)$ induziert, verweisen wir auf [**At**] und [**H2**, Theorem 2.2]. Als Konsequenz können wir jetzt das Ω-Spektrum für K-Theorie angeben.

6.57. Satz und Definition. *Komplexe K-Theorie ist der allgemeine Kohomologiefunktor zum Ω-Spektrum $\mathbb{K}$ mit*

$$K_n = \begin{cases} \mathbb{Z} \times BU & \text{falls } n \text{ gerade ist, und} \\ U & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Mit Satz 6.29 sehen wir, dass K-Theorie ein allgemeiner Kohomologiefunktor ist, der wegen Satz 6.55 für kompakte Räume mit der Konstruktion in Definition 6.51 übereinstimmt. Insbesondere erhalten wir eine lange exakte K-Theorie-Sequenz für Kofaserungen und eine Mayer-Vietoris-Sequenz. Da sich lange exakte Sequenzen in komplexer K-Theorie wegen Bott-Periodizität alle sechs Einträge wiederholen, heißen sie auch *Sechs-Term-Sequenzen.* Nach Satz 5.38 existiert auch ein allgemeiner Homologiefunktor zum obigen Spektrum, die sogenannte *K-Homologie.* Da ihre geometrische Interpretation etwas schwieriger ist, geben wir sie hier nicht an.

Auf der anderen Seite erfüllt $K^\bullet$ im Gegensatz zu $K^0_{\mathbb{C}}$ das Summenaxiom. Um beide Funktoren unterscheiden zu können, schreiben wir daher K für den Kohomologiefunktor. Analog schreiben wir KO für reelle K-Theorie. Diese Notation ist nicht Standard, sondern folgt Definition 5.38. In der Literatur wird oft auch unsere „naive“ K-Theorie mit K beziehungsweise KO bezeichnet.

Beweis. Wir müssen zwei Stabilisierungsabbildungen so konstruieren, dass $\mathbb{K}$ ein Ω-Spektrum wird, und wir Bott-Periodizität erhalten. Als erstes betrachten wir das Faserbündel $EU \to BU$ mit Faser U, diese ist nach Bemerkung 4.70 (4) homotopieäquivalent zur Homotopiefaser. Mithilfe der Fasersequenz aus Satz 4.72 und der zugehörigen langen exakten Sequenz sehen wir, dass U schwach äquivalent zu $\Omega(BU)$ ist, da EU zusammenziehbar ist. Außerdem sieht der Schleifenfunktor nur die Zusammenhangskomponente des Basispunktes, so dass $\Omega BU \cong \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$. Nach den Sätzen 4.46 und 4.55 von Whitehead und Milnor sind also U und $\Omega(\mathbb{Z} \times BU)$ homotopieäquivalent, und wir erhalten eine Abbildung $U \to \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$. Die Adjunktion zwischen Einhängungs- und Schleifenfunktor liefert die erste Stabilisierungsabbildung $s\colon SU \to \mathbb{Z} \times BU$.

Wir konstruieren als nächstes eine Abbildung $S^2(\mathbb{Z} \times BU) \to \mathbb{Z} \times BU$, so dass die induzierte Abbildung $\pi_k(\mathbb{Z}\times BU) \to \pi_{k+2}(BU)$ für alle $k \geq 0$ ein Isomorphismus ist. Dazu schreiben wir $\mathbb{Z}\times BU$ als

$$\mathbb{Z} \times BU = \varinjlim X_n \qquad \text{mit} \qquad X_n = \{-n, \dots, n\} \times Y_n \qquad \text{und} \qquad Y_n = \big(U(n)^{*n}\big)/U(n)$$

und nutzen aus, dass X_n ist und die natürlichen Inklusionen $X_n \to X_{n+1}$ Kofaserungen sind. Auf X_n definieren wir das virtuelle $\Bbbk$-Vektorbündel V_n durch

$$V_n|_{\{\ell\}\times Y_n} = VU(n)|_{Y_n} \ominus \underline{\mathbb{C}}^{n-\ell} \,.$$

Dann sei $F_n\colon S^2X_n \to BU$ die klassifizierende Abbildung des virtuellen Vektorbündels

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \longrightarrow X_n \,,$$

für ein hinreichend großes N gilt also $(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n \cong F_n^*V_N$. Da $V_n \cong V_{n+1}|_{X_n}$, ist F_n homotop zu $F_{n+1}|_{X_n}$. Da $X_n \subset X_{n+1}$ eine Kofaserung ist, können wir die F_n induktiv so durch homotope Abbildungen ersetzen, dass schließlich $F_n = F_{n+1}|_{X_n}$ für alle n gilt. Dadurch erhalten wir eine Abbildung

$$F\colon S^2(\mathbb{Z} \times BU) \cong \varinjlim S^2X_n \longrightarrow BU \,.$$

Sei jetzt $[f] \in \tilde{K}^0(S^k) = \pi_k(\mathbb{Z} \times BU)$, dann repräsentiert f ein virtuelles $\mathbb{C}$-Vektorbündel $V \to S^k$. Da S^k kompakt ist, faktorisiert f über ein X_n, und es folgt $V \cong f^*V_n$ und

$$(\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V \cong (S^2f)^*\big((\tau_{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{C}}) \boxtimes V_n\big) \cong (S^2f \circ F_n)^*V_N \,.$$

Bott-Periodizität 6.56 und Bemerkung 3.10 liefern somit einen Isomorphismus

$$\pi_k(\mathbb{Z} \times BU) \xrightarrow{F_*\circ S^2} \pi_{k+2}(BU) \xrightarrow{\cong} \pi_k(\Omega^2BU) \,.$$

Also induziert $F\colon S^2(\mathbb{Z} \times BU) \to \mathbb{Z} \times BU$ eine schwache Äquivalenz $\mathbb{Z} \times BU \to \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU)$. Verketten mit der Homotopieäquivalenz $\Omega(\mathbb{Z}\times BU) \to U$ liefert eine schwache Äquivalenz $\mathbb{Z}\times BU \to \Omega U$. Via Adjunktion erhalten wir die zweite Stabilisierungsabbildung $s\colon S(\mathbb{Z} \times BU) \to U$. Damit haben wir das gesuchte Ω-Spektrum konstruiert. □

6.58. Bemerkung. Da $\mathbb{K}$ ein Ω-Spektrum ist, folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $k > \frac{n}{2}$, dass

$$\tilde{K}^n(S^0) = \pi_0(K_n) \cong \pi_{2k-n}(\mathbb{Z} \times BU) \cong \pi_{2k-n-1}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

da $\pi_0(U) = 0$ und $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ nach Übung 6.112.

6.59. Bemerkung. Wir geben das reelle Analogon ohne weitere Erläuterungen an.

(1) Es sei $\tau_{\mathbb{H}} \to \mathbb{H}P^1 \cong S^4$ das tautologische Bündel. Wie bei der komplexen Bott-Periodizität 6.56 erhalten wir für kompakte CW-Komplexe X einen Isomorphismus

$$\sigma^4 \colon \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(S^4X) \qquad \text{mit} \qquad (V \ominus W) \mapsto (\tau_{\mathbb{H}} \ominus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{R}} (V \ominus W) \; .$$

Da wir mit einem virtuellen $\mathbb{H}$-Bündel tensorieren, landen wir in quaternionischer K-Theorie.

(2) Das Tensorieren eines Rechts- mit einem Links-$\mathbb{H}$-Vektorbündel liefert ein reelles Vektorbündel, da $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist. Wenn $\tau_{\mathbb{H}}$ eine Links-$\mathbb{H}$-Vektorbündel ist, ist das duale Vektorbündel $\tau^*_{\mathbb{H}}$ ein Rechts-$\mathbb{H}$-Vektorbündel. Wir erhalten einen weiteren Isomorphismus

$$\sigma^4 \colon \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(S^4X) \qquad \text{mit} \qquad (V \ominus W) \mapsto (\tau^*_{\mathbb{H}} \ominus \underline{\mathbb{H}}) \boxtimes_{\mathbb{H}} (V \ominus W) \; .$$

Zusammen mit (1) ergibt sich hieraus reelle Bott-Periodizität mit Periode 8, nämlich

$$\sigma^8 \colon \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(X) \cong \tilde{K}^0_{\mathbb{R}}(S^8X) \; .$$

(3) Ähnlich wie in Satz 6.57 können wir zu einem Ω-Spektrum $\mathbb{KO}$ „auffüllen“ mit

$$\begin{aligned} KO_8 &= \mathbb{Z} \times BO \; , & KO_{8k+1} &= U/O \; , & KO_{8k+2} &= Sp/U \; , & KO_{8k+3} &= Sp \; , \\ KO_{8k+4} &= \mathbb{Z} \times BSp \; , & KO_{8k+5} &= U/Sp \; , & KO_{8k+6} &= O/U \; , & KO_{8k+7} &= O \; , \end{aligned}$$

Zumindest die Stabilisierungsabbildungen $S^1 \wedge O \to \mathbb{Z} \times BO$ und $S^1 \wedge Sp \to \mathbb{Z} \times BSp$ kommen wie oben zustande. Wir bilden U/O als Kolimes von $U(n)/O(n)$, indem wir reelle als komplexe Matrizen auffassen; entsprechend konstruieren wir Sp/U. Umgekehrt bilden wir O/U als Kolimes von $O(2n)/U(n)$, indem wir komplexe Matrizen mit reellen Matrizen identifizieren, die eine zusätzliche komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2n}$ festhalten; analog bilden wir U/Sp. Als Koeffizientengruppen erhalten wir

$$\widetilde{KO}^{8k-n}(S^0) \cong \pi_0(KO_{8k-n}) \cong \pi_{8k+n}(\mathbb{Z} \times BO) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0, 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für } n = 1, 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) Wegen (2) und (3) gibt es auch einen mit quaternionischer K-Theorie verwandten allgemeinen Kohomologiefunktor: für kompakte CW-Komplexe gilt

$$\widetilde{KSp}^k_{\mathbb{H}}(X) \cong \widetilde{KO}^k(S^4X) \cong \widetilde{KO}^{k\pm4}(X) \; .$$

6.60. Bemerkung. Zur Konstruktion der Bott-Periodizität hatten wir das äußere Tensorprodukt benutzt. Seien $\Bbbk$-Vektorbündel $V \to X$ und $W \to Y$ mit $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gegeben, dann lautet die allgemeine Definition

$$V \boxtimes W = (p_X^* V) \otimes_{\Bbbk} (p_Y^* W) \longrightarrow X \times Y \; ,$$

dabei ist „$\otimes$“ wieder das Whitney-Produkt, und $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ sind die Projektionen im Produkt. Da das Whitney-Produkt bis auf eindeutige Isomorphismen assoziativ ist, gilt das auch fürs äußere Tensorprodukt.

(1) Seien $X = (X, x_0)$ und $Y = (Y, y_0)$ punktiert, und seien $V|_{x_0}$ und $W|_{y_0}$ von virtueller Dimension 0, dann ist $V \boxtimes W|_{X\vee Y}$ trivial von virtueller Dimension 0, und $V \boxtimes W$ stellt ein wohldefiniertes Element in $\tilde{K}^0_{\Bbbk}(X \wedge Y)$ dar. Wir erhalten ein Analogon zum Smash-Produkt aus Definition 6.22. Es ist ebenfalls assoziativ und kommutativ bis auf natürliche Isomorphismen, insbesondere also assoziativ und kommutativ auf $\tilde{K}^0_{\Bbbk}$.

(2) Das Einselement $1 \in \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^0)$ wird repräsentiert durch ein $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang 0 auf dem Basispunkt und Rang 1 auf dem anderen Punkt der S^0.

(3) Die Stabilisierungsisomorphismen σ^2 in Satz 6.56 und σ^8 in Bemerkung 6.59 (2) wurden mit Hilfe des äußeren Produktes definiert. Es sei $n_0 = 2$ falls $\Bbbk = \mathbb{C}$ und $n_0 = 8$ falls $\Bbbk = \mathbb{R}$. In Analogie zu Proposition 6.22 (3) gilt daher

$$(\sigma^{n_0} V) \boxtimes_{\mathbb{C}} W = \sigma^{n_0}(V \boxtimes_{\mathbb{C}} W) = V \boxtimes_{\mathbb{C}} (\sigma^{n_0} W) \in \tilde{K}^0\big(S^{n_0}(V \wedge W)\big) \ .$$

(4) Seien jetzt X, Y kompakte CW-Komplexe, und seien $\alpha \in \tilde{K}^k_{\Bbbk}(X)$ und $\beta \in \tilde{K}^\ell_{\Bbbk}(Y)$ für $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $0 \le k,\, \ell < n_0$. Es gibt natürliche Isomorphismen

$$\sigma^{n_0-k} \colon \tilde{K}^k_{\Bbbk}(X) \cong [X, \Omega^{n_0-k}(\mathbb{Z} \times BU(\Bbbk))] \xrightarrow{\cong} [S^{n_0-k}X, \mathbb{Z} \times BU(\Bbbk)] \cong \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^{n_0-k}X) \ ,$$

also identifizieren wir α mit $V = \sigma^{n_0-k}\alpha \in \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^{n_0-k}X)$ und β mit $W = \sigma^{n_0-\ell}\beta \in \tilde{K}^0_{\Bbbk}(S^{n_0-k}Y)$ und definieren

$$\alpha \cdot \beta = \sigma^{k+\ell}(V \boxtimes_{\Bbbk} W) \in \tilde{K}^{k+\ell}_{\Bbbk}\big(X \wedge Y\big) \ .$$

Beim Vertauschen von α und β haben wir im Zwischenschritt zusätzlich eine Transpositionsabbildung $S^{k+\ell} \to S^{\ell+k}$ anzuwenden. Wie in Proposition 6.22 (3) gilt daher

$$t^*(\beta \cdot \alpha) = (-1)^{k\ell} V\alpha \cdot \beta \ .$$

(5) Wir haben festgestellt, dass es kein Produkt $\tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(X) \times \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(Y) \to \tilde{K}^0_{\mathbb{H}}(X \wedge Y)$ gibt. Das erklärt sich, indem wir $\tilde{K}^0_{\mathbb{H}}$ wie in Bemerkung 6.59 (4) mit $\tilde{K}^4_{\mathbb{R}}$ identifizieren.

Wir haben jetzt also zwei allgemeine Kohomologiefunktoren mit Produkten definiert. Zur geometrischen Interpretation der Verbindungshomomorphismen in den langen exakten Sequenzen und zu den Produkten zwischen höheren K-Gruppen haben wir leider noch nichts sagen können.

6.i. Bordismus

Wir kennen bereits den gerahmten (Ko-) Bordismus, dabei ging es um Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ mit trivialem Normalenbündel. In diesem Abschnitt wollen wir Bordismustheorien zu anderen Strukturen auf M betrachten. Die Pontryagin-Thom-Konstruktion funktioniert dabei ähnlich wie in Satz 3.88, insbesondere können wir Zusatzstrukturen nur über das Normalenbündel einführen (in Satz 3.88 hatten wir eine Trivialisierung des Normalenbündels zugrundegelegt). Wir betrachten daher zunächst einmal normale Strukturen.

Die Pontryagin-Thom-Konstruktion legt es nahe, zu normalen Strukturen sogenannte Thom-Spektren zu konstruieren. Die Struktur eines Spektrums ergibt sich hier allein aus geometrischen Überlegungen, insofern könnte man die Konstruktionen in diesem Abschnitt als Motivation für Spektren und die zugehörigen (Ko-) Homologiefunktoren betrachten. Allerdings sind Thom-Spektren typischerweise weder Einhängungs- noch Ω-Spektren. Daher werden wir die zugehörigen Kohomologiefunktoren hier zunächst nur auf kompakten CW-Komplexen betrachten. Außerdem ergibt sich eine schöne geometrische Interpretation nur für glatte Mannigfaltigkeiten.

Wir wollen von Untermannigfaltigkeiten zu abstrakten Mannigfaltigkeiten übergehen. Wie üblich nennen wir eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand *geschlossen*. Wir zitieren einen Satz aus der Differentialtopologie.

6.61. Satz (Einbettungs-, Whitney). *Jede geschlossene m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit lässt sich für alle $n \geq 2m$ in den $\mathbb{R}^n$ einbetten.*

Wir können n beliebig vergrößern, indem wir eine lineare Einbettung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$ nachschalten. Je zwei Einbettungen $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ und $g\colon M \to \mathbb{R}^{n'}$ sind in einem größeren $\mathbb{R}^N$ homotop, dazu definiere etwa $h\colon I \times M \to \mathbb{R}^{n+n'+1}$ durch

$$h(s,p) = \big(s, (1-s)\cdot f(p), s \cdot g(p)\big) \ .$$

Es bezeichne $\nu f \to M$ das Normalenbündel von $\operatorname{im} f \subset \mathbb{R}^n$, siehe Abschnitt 3.i. Sei g die Verkettung

$$g\colon M \xhookrightarrow{f} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N \ , \tag{6.10}$$

dann folgt $\nu g = \underline{\mathbb{R}}^{N-n} \oplus \nu f$. Wir betrachten die natürlichen Inklusionen $\iota_n\colon O(n) \to O(n+1)$ aus (6.9). Sei $\vartheta\colon M \to BO(n-k)$ eine klassifizierende Abbildung für $\nu_{\mathbb{R}^n} M$, dann ist

$$B\iota_{N-m-1} \circ \cdots \circ B\iota_{n-m} \circ \vartheta\colon M \longrightarrow BO(N-m)$$

eine klassifizierende Abbildung für $\nu_{\mathbb{R}^N} M$. Außerdem sind Normalenbündel homotoper Einbettung f und g nach dem Homotopielemma 6.44 isomorph, und der Isomorphismus ist bis auf Homotopie eindeutig durch die Homotopie zwischen f und g bestimmt.

6.62. Definition. Es sei M eine m-dimensionale geschlossene glatte Mannigfaltigkeit, und es sei $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das *stabile Normalenbündel* $\nu^s M \in KO^0(M)$ ist definiert als

$$\nu^s M = [\nu f \ominus \underline{\mathbb{R}}^n] \in KO^0(M) \ .$$

Aus den obigen Vorüberlegungen folgt, dass die K-Theorieklasse $\nu^s M$ nicht von der Einbettung f, sondern nur von M selbst abhängt. Das gilt insbesondere auch für den Rang $-m$ von $\nu^s M$. Das Normalenbündel ist komplementär zum Tangentialbündel, siehe Bemerkung 6.54 (2), und tatsächlich gilt $\nu^s M = -[TM] \in KO^0(M)$.

Wir haben in Definition 6.38 G-Strukturen auf reellen Vektorbündeln $V \to X$ vom Rang k als Isomorphismen $V \cong P_G \times_G \mathbb{R}^k$ eingeführt. Nach dem Klassifikationssatz 6.48 wird das zugrundeliegende Prinzipalbündel durch eine Abbildung $\vartheta_G\colon X \to BG$ klassifiziert. Da G linear auf $\mathbb{R}^k$ wirkt, erhalten wir eine Homorphismus $\rho\colon G \to GL(k,\mathbb{R})$ und die davon induzierte Abbildung $B\rho\colon BG \to BGl(k,\mathbb{R})$. Sei $\vartheta_{GL}\colon X \to BGL(k,\mathbb{R})$ die klassifizierende Abbildung des Rahmenbündels $P_{GL}(V)$, dann entspricht eine G-Struktur auf V genau einem Lift ϑ_G von ϑ_{GL} im linken Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & BG \\ & \overset{\vartheta_G}{\nearrow} & \big\downarrow {\scriptstyle B\rho} \\ X & \xrightarrow[\vartheta_{GL}]{} & BGL(k,\mathbb{R}) \ , \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & BG \\ & \overset{\vartheta_G}{\nearrow} & \big\downarrow {\scriptstyle B\rho} \\ X & \xrightarrow[\vartheta_O]{} & BO(k) \ . \end{array}$$

Im Folgenden ist G stets kompakt. Dann ist die obige Abbildung ρ konjugiert zu einer Abbildung mit Werten in $O(k) \subset BGL(k,\mathbb{R})$, und das Vektorbündel V trägt eine mit der G-Struktur verträgliche Metrik. Das liefert uns das rechte Diagramm oben.

Im Falle des stabilen Normalenbündels betrachten wir eine Folge von Abbildungen $\vartheta_{O(k)}\colon M \to BO(k)$ mit $B\iota_k \circ \vartheta_{O(k)} = \vartheta_{O(k+1)}$. Wir suchen daher nach einer entsprechenden Folge von Strukturgruppen G_k mit Abbildungen $G_k \to G_{k+1}$ und $\rho_k\colon G_k \to O(k)$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} BG_k & \longrightarrow & BG_{k+1} \\ \big\downarrow {\scriptstyle B\rho_k} & & \big\downarrow {\scriptstyle B\rho_{k+1}} \\ BO(k) & \xrightarrow{B\iota_k} & BO(k+1) \end{array}$$

kommutiert. Ein Lift ϑ_{G_k} von $\vartheta_{O(k)}$ liefert durch Verkettung Lifts $\vartheta_{G_{k'}}$ von $\vartheta_{O(k')}$ für alle $k' > k$. Im Übrigen ist es im Folgenden nicht notwendig, dass die Räume BG_k klassifizierende Räume von Gruppen sind und die Abbildungen $B\rho_k$ von Gruppenhomomorphismen induziert werden.

Wir wissen bereits, dass alle Einbettungen einer Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Raum beim Übergang zu einer hinreichend großen Dimension homotop werden. Wir wissen auch, dass klassifizierende Abbildungen nur bis auf Homotopie eindeutig bestimmt sind. Daher brauchen wir auch einen Begriff für Homotopien für die obigen Lifts. Wichtig ist dabei, dass die Liftungseigenschaft im Verlauf der Homotopie nicht verloren geht. All diese Vorüberlegungen motivieren die folgende Definition.

6.63. Definition. Eine *stabile lineare Struktur* $\mathbb{B} = (B_k, b_k, c_k)$ besteht aus einer Folge von CW-Komplexen B_k und Abbildungen $b_k\colon B_k \to B_{k+1}$ und $c_k\colon B_k \to BO(k)$, so dass für alle k gilt

$$B\iota_k \circ c_k = c_{k+1} \circ b_k \ .$$

Eine *stabile normale* $\mathbb{B}$*-Struktur* (ι, ϑ_k) auf einer m-dimensionalen geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit M besteht aus einer Einbettung $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ und einem Lift $\vartheta_k\colon M \to B_k$ der klassifizierenden Abbildung $\vartheta\colon M \to BO(k)$.

Eine Homotopie zu einer weiteren stabilen normalen $\mathbb{B}$-Struktur $(\iota', \vartheta'_\ell)$ besteht aus eine Einbettung $J\colon M \times I \to \mathbb{R}^N \times I$ für ein $N \geq \max(m+k, m+\ell)$, mit $J(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \{s\}$, so dass ein $\varepsilon > 0$ mit $J(x,s) = (\iota(x) \times \{0\}, s)$ für $s \in [0, \varepsilon]$ und $J(x,s) = (\iota'(x) \times \{0\}, s)$ für $s \in [1-\varepsilon, 1]$, und einem Lift Θ_{N-m} der klassifizierenden Abbildung $\Theta\colon M \times I \to BO(N-m)$ des Normalenbündels von J, so dass

$$\begin{aligned} \Theta|_{M\times\{0\}} &= B\iota_{N-m-1} \circ \cdots \circ B\iota_k \circ \vartheta \ , & \Theta_{N-m}|_{M\times\{0\}} &= b_{N-m-1} \circ \cdots \circ b_k \circ \vartheta_k \ , \\ \Theta|_{M\times\{1\}} &= B\iota_{N-m-1} \circ \cdots \circ B\iota_\ell \circ \vartheta' \ , & \Theta_{N-m}|_{M\times\{1\}} &= b_{N-m-1} \circ \cdots \circ b_\ell \circ \vartheta'_\ell \ . \end{aligned}$$

Eine $\mathbb{B}$*-Mannigfaltigkeit* $(M, [\iota, \vartheta])$ ist eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Homotopieklasse stabiler normaler $\mathbb{B}$-Strukturen.

6.64. Bemerkung. Wir betrachten einige stabile lineare Strukturen.

(1) Wenn wir keine weitere Struktur festlegen wollen, wählen wir $B_k = BO(k)$ und $c_k = \mathrm{id}_{BO(k)}$. Die zugehörige stabile lineare Struktur heiße $\mathbb{BO}$.
(2) Zu jeder Orientierung von TM gehört genau eine Orientierung von νf, so dass das Hintereinanderhängen zweier orientierter Basen eine orientierte Basis des umgebenden $\mathbb{R}^{m+k}$ liefert und umgekehrt. Diese Orientierung von νf ist invariant unter Stabilisierung, und wird klassifiziert durch $c_k\colon BSO(k) \to BO(k)$; wenn wir $BSO(k) = EO(k)/SO(k)$ wählen, ist c_k eine zweifache Überlagerung. Eine normale $\mathbb{BSO}$-Struktur auf M entspricht also genau einer Orientierung des Tangentialbündels TM.
(3) Völlig analog existiert zu jeder Spinstruktur von TM eine passende Spinstruktur von νf, und diese ist ebenfalls invariant unter Stabilisierung. Wir betrachten dazu die stabile lineare Struktur $\mathbb{B}$Spin mit $c_k\colon B\mathrm{Spin}(n) \to BO(n)$; die Homotopiefaser dieser Abbildung ist $\mathbb{R}P^\infty$.
(4) In Analogie zu den fast komplexen Strukturen aus Bemerkung 6.41 (5) definieren wir die stabile komplexe Struktur $\mathbb{BU}$ klassifiziert durch $c_k\colon B_k = BU(\ell) \to BO(k)$ für $k = 2\ell$. und $c_k = B\iota_{k-1} \circ c_{k-1}\colon BU(\ell) \to BO(k)$ für $k = 2\ell + 1$. Auf ähnliche Weise erhalten wir auch die stabilen linearen Strukturen $\mathbb{BSU}$ und $\mathbb{B}Sp$.
(5) Wenn wir für alle k die triviale Gruppe $G_k = \{e\}$ wählen, ist $B_k = BG_k$ zusammenziehbar. Das Normalenbündel lässt eine solche $\mathbb{B}$fr-Struktur genau dann zu, wenn es trivial ist.

In Abschnitt 3.i hatten wir gesehen, dass es verschiedene, nicht äquivalente Trivialisierungen des Normalenbündels geben kann. Als Trivialisierungen von abstrakten Bündeln sind sie jedoch isomorph. Zur Unterscheidung ist daher die obige umständliche Definition nötig.

Es sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Wie in Abschnitt 3.i identifizieren wir für ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ positiver Länge das relative Normalenbündel $\nu_{J\times N}(J \times M)$ mit $p_M^* \nu_N M = J \times \nu_N M$. Daher können wir die klassifizierenden Abbildungen beider Normalenbündel vergleichen.

6.65. Definition. Es sei $0 \leq k \leq n$, sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, sei N eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $m = n - k$.

(1) Eine *normale $\mathbb{B}$-Struktur* auf einer m-dimensionalen kompakten glatten Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ ist eine Abbildung $\vartheta\colon M \to B_k$, so dass $c_k \circ \vartheta\colon M \to BO(k)$ das relative Normalenbündel $\nu_N M$ klassifiziert. Dann heißt das Paar (M, ϑ) eine m-dimensionale $\mathbb{B}$-*Untermannigfaltigkeit* von N.

(2) Ein $\mathbb{B}$-*Bordismus* (W, Θ) zwischen m-dimensionalen $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten (M_i, ϑ_i) von N mit $i = 0, 1$ besteht aus einer glatten kompakten $(m+1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $W \subset I \times N$ mit Rand $\partial W \subset \partial I \times N$ und Krägen

$$W \cap \big([0,\varepsilon) \times N\big) = [0,\varepsilon) \times M_0 \quad \text{und} \quad W \cap \big((1-\varepsilon, 1] \times N\big) = (1-\varepsilon, 1] \times M_1$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, und einer normalen $\mathbb{B}$-Struktur $\Theta\colon W \to B_k$, so dass

$$\bar\vartheta|_{[0,\varepsilon)\times M_0} = \vartheta_0 \circ \pi_{M_0} \qquad \text{und} \qquad \bar\vartheta|_{(1-\varepsilon,1]\times M_1} = \vartheta_1 \circ \pi_{M_1}\ .$$

Wenn $M_0 = \emptyset$ gilt, nennen wir (M_1, ϑ_1) eine $\mathbb{B}$-nullbordante Mannigfaltigkeit und (W, Θ) einen $\mathbb{B}$-*Nullbordismus.*

(3) Zwei kompakte m-dimensionale $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten von N heißen $\mathbb{B}$-*bordant,* wenn ein $\mathbb{B}$-Bordismus zwischen ihnen existiert. Es bezeichne $\Omega^k_{\mathbb{B}}(N)$ die Menge aller $\mathbb{B}$-Bordismusklassen von m-dimensionalen $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten von N.

Wie in Bemerkung 3.87 überprüft man, dass $\mathbb{B}$-Bordismus eine Äquivalenzrelation ist.

Eine Abbildung $f\colon L \to N$ heißt *transversal* zu einer Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ in N, wenn $\operatorname{im}(df_p) + T_{f(p)}M = T_{f(p)}N$ für jeden Punkt $\in f^{-1}(M) \subset L$ gilt. In diesem Fall ist $f^{-1}M \subset L$ eine $\dim L + \dim M - \dim N$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wenn f eine Einbettung ist, dann ist $\operatorname{im} f \cap M$ entsprechend eine $\dim L + \dim M - \dim N$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von N.

Wir erinnern uns an den Begriff einer eigentlichen Abbildung aus Übung 4.79. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ heißt *eigentlich,* wenn die Inklusion $M \hookrightarrow N$ eigentlich ist. Insbesondere sind geschlossene Untermannigfaltigkeiten immer eigentlich.

6.66. Satz (Transversalitäts-). *Sei N eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, und sei $f\colon L \to N$ eine glatte Abbildung. Wir nehmen an, dass entweder*

(1) *die Mannigfaltigkeit L kompakt und M eigentlich, oder*
(2) *die Abbildung f eigentlich und M kompakt ist.*

Dann existiert eine zu f homotope Abbildung g transversal zu M. Wenn f eine Einbettung war, kann auch g als Einbettung gewählt werden. In Situation (2) *kann die Homotopie* mit kompaktem Träger *oder auch* kompakt getragen *gewählt werden, das heißt, außerhalb einer kompakten Teilmenge von L stationär.*

Diesen Satz haben wir implizit bereits in Abschnitt 3.i benutzt, um Surjektivität der Pontryagin-Thom-Abbildung zu zeigen. Mit

6.67. Proposition und Definition. *Es sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, N eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, und (M, ϑ) eine $n-k$-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von N mit normaler $\mathbb{B}$-Struktur.*

(1) *Es sei $f\colon L \to N$ eine eigentliche, zu M transversale Abbildung. Dann repräsentiert $\vartheta \circ df$ eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $f^{-1}(M)$, und die Bordismusklasse von $(f^{-1}(M), \vartheta \circ df)$ hängt nur von der Bordismusklasse von (M, ϑ) und von der Klasse von f modulo kompakt getragener Homotopien ab. Insbesondere ist $\Omega^k_{\mathbb{B}}$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten und der glatten eigentlichen Abbildungen in die Kategorie $\mathcal{S}et$.*

(2) *Die Abbildung $b_k \circ \vartheta\colon M \to B_{k+1}$ ist eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $M \times \{0\} \subset N \times \mathbb{R}$. Insbesondere erhalten wir eine Abbildung*

$$s_k\colon \Omega^k_{\mathbb{B}}(N) \to \Omega^{k+1}_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}) \ .$$

(3) *Durch Stabilisieren erhalten wir einen kontravarianten Funktor*

$$MB^k(N) = \operatorname{colim} \Omega^{k+\ell}_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell)$$

wie in (1)*, aber mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen.*

Beweis. Wenn f zu M transversal ist, induziert df eine Vektorbündelabbildung $\nu_L(f^{-1}(M)) \to \nu_N M$, somit beschreibt $\vartheta \circ df$ eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $f^{-1}(M)$.

Zur Homotopieinvarianz überlegt man sich, dass man eine Homotopie $h\colon L \times I \to N$ zwischen zwei zu M transversalen Abbildungen $f_i\colon L \to N$, $i = 0, 1$, transversal zu M und auf $[0, \varepsilon]$ sowie auf $[1-\varepsilon, 1] \subset I$ stationär wählen kann. Dann definiert $\vartheta \circ dh$ wie oben eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf dem Kobordismus $h^{-1}(M) \subset L \times I$, passend zu den normalen $\mathbb{B}$-Strukturen auf $f_i^{-1}(M)$.

Sei (W, Θ) mit $W \subset M \times I$ ein $\mathbb{B}$-Bordismus zwischen (M_0, ϑ_0), (M_1, ϑ_1), und $F\colon L \times I \to N \times I$ transversal zu W und homotop zu $f \times \mathrm{id}_I$ mit kompaktem Träger in $L \times (0,1)$. Dann erhalten wir einen $\mathbb{B}$-Bordismus $(F^{-1}(M), \Theta \circ dF)$ zwischen den zwei $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten $(f^{-1}(M_i), \vartheta_i \circ df)$ für $i = 0, 1$.

Zu (2) betrachten wir $M \times \{0\}$ als Untermannigfaltigkeit von $N \times \mathbb{R}$ mit $\nu_{N\times\mathbb{R}} M \cong \nu_N M \oplus \underline{\mathbb{R}}$, mit klassifizierender Abbildung

$$B\iota_k \circ c_k \circ f = c_{k+1} \circ (b_k \circ f_k)\colon M \longrightarrow BO(k+1) \ ,$$

somit ist $f_{k+1} = b_k \circ f_k\colon M \to B_{k+1}$ eine normale $\mathbb{B}$-Struktur auf $M \times \{0\}$. Völlig analog induziert ein $\mathbb{B}$-Bordismus in N einen $\mathbb{B}$-Bordismus in $N \times \mathbb{R}$, und wir erhalten eine natürliche Abbildung

$$\Omega^k_{\mathbb{B}}(N) \longrightarrow \Omega^{k+1}_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}) \ .$$

Wie in Bemerkung 3.89 trägt $\Omega_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell)$ die Struktur einer abelschen Halbgruppe für $\ell \geq 2$, dabei addiert man G-Bordismusklassen, indem man geeignete Repräsentanten durch Verschieben disjunkt macht und dann vereinigt, und wir erhalten (3). □

Anhand des Beweises von Punkt (1) sehen wir, warum es sinnvoll ist, Mannigfaltigkeiten mit normaler Struktur bis auf Bordismus zu betrachten, und als „Grad“ die Kodimension zu verwenden.

Für die stabilen linearen Strukturen $\mathbb{B} = \mathbb{BO}$, $\mathbb{BSO}$, $\mathbb{B}$Spin, $\mathbb{BU}$, $\mathbb{BSU}$, $\mathbb{B}Sp$ und $\mathbb{B}$fr aus Bemerkung 6.64 bezeichnet man die zugehörigen Mengen von Kobordismusklassen üblicherweise mit Ω_O, Ω_{SO}, Ω_{Spin}, Ω_U, Ω_{SU}, Ω_{Sp} und Ω_{fr}, und die zugehörigen Funktoren in (3) mit MO, …, MSp und M_{fr}.

Wir definieren das tautologische Vektorbündel $VO(k) = EO(k) \times_{O(k)} \mathbb{R}^k \to BO(k)$ wie in Definition 6.37 mit der Euklidischen Metrik gemäß Bemerkung 6.41 (1). Zu einer stabilen linearen

Struktur $\mathbb{B} = (B_k, b_k, c_k)$ wie in Definition 6.63 erhalten wir Euklidische Vektorbündel $c_k^* VO(k) \to B_k$ vom Rang k zusammen mit Vektorbündelabbildungen

$$\begin{array}{ccc} c_k^* VO(k) \oplus \underline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & c_{k+1}^* VO(k+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_k & \xrightarrow{\quad b_k \quad} & B_{k+1} \,. \end{array}$$

Der Beweis der in der folgenden Definition enthaltenen Behauptungen bleibt Übung.

6.68. Proposition und Definition. *Es sei $V \to X$ ein Euklidisches Vektorbündel, dann definieren wir das* Ball- *und das* Sphärenbündel *sowie den* Thom-Raum *von V als*

$$DV = \big\{\, v \in V \;\big|\; \|v\| \le 1 \,\big\}\,, \qquad SV = \big\{\, v \in V \;\big|\; \|v\| = 1 \,\big\} \qquad \text{und} \qquad MV = DV/SV\,. \tag{1}$$

Jede Abbildung $F\colon V \to W$ Euklidischer Vektorbündel induziert Abbildungen $DF\colon DV \to DW$ und $SF\colon SV \to SW$ von Faserbündeln und eine punktierte Abbildung $MF\colon MV \to MW$.

Zu einer stabilen linearen Struktur $\mathbb{B} = (B_k, b_k, c_k)$ definieren wir das Thom-Spektrum $\mathbb{MB}$ *durch*

$$MB_k = M\big(c_k^* VO(k)\big) \qquad \text{und} \qquad s_k\colon S^1 \wedge MB_k \cong M\big(c_k^* VO(k) \oplus \underline{\mathbb{R}}\big) \longrightarrow MB_{k+1}\,. \tag{2}$$

Man beachte, dass die Konstruktion von MF nur für faserweise Isomorphismen funktioniert. Wenn der Basisraum X kompakt ist, können wir MV alternativ auch als Einpunktkompaktifizierung des Totalraums von V betrachten. Das erlaubt es, auch ohne Wahl einer Euklidischen Metrik Thom-Räume zu konstruieren.

6.69. Satz (von der Röhrenumgebung). *Es sei N eine glatte Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine eigentliche Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine Metrik auf dem Normalenbündel $\nu_N M \to M$ und eine Einbettung $a\colon D\nu_N M \to N$, deren Differential $da|_M$ gerade der natürliche Isomorphismus $\nu_N M \oplus TM \cong f^*TN$ ist.*

Wir erinnern uns an die Konstruktion von Kohomologiefunktoren zu Ω-Spektren in Satz 6.29. Obwohl Thom-Spektren keine Ω-Spektren sind, können wir entsprechende Konstruktion hier wiederholen. Allerdings können wir nicht unmittelbar folgern, dass wir einen Kohomologiefunktor $M_B^\bullet$ zum Thom-Spektrum $\mathbb{MB}$ erhalten. Es bezeichne $\dot N$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von N aus Satz 1.67.

6.70. Satz (Pontryagin-Thom). *Für alle $0 \le k \le n$ und alle stabilen linearen Strukturen $\mathbb{B}$ gilt*

$$\Omega_{\mathbb{B}}^k(N) \cong [\dot N, MB_k]\,.$$

Die Stabilierungsabbildung aus Definition 6.67 (2) entspricht der Abbildung

$$[\dot N, MB_k] \xrightarrow{S} [S\dot N, SMB_k] \xrightarrow{s_k \circ} [S\dot N, MB_{k+1}]\,.$$

Wenn N kompakt ist, ist die Einpunktkompaktifizierung $\dot N = N_+$. Für $\ell \ge 2$ ist $\Omega_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell)$ eine abelsche Halbgruppe, siehe oben. Aus dem obigen Satz und Bemerkung 3.77 folgt, dass $\Omega_{\mathbb{B}}(N \times \mathbb{R}^\ell) \cong [S^\ell \dot N, MB_{k+\ell}]$ sogar eine abelsche Gruppe ist.

Beweis. Wir gehen vor wie im Beweis von Satz 3.88. Es sei (M, ϑ) eine kompakte $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeit von N. Nach Konstruktion existiert eine Vektorbündelabbildung $\Theta\colon \nu_N M \to c_k^* VO(k)$ über ϑ. Nach Satz 6.69 existiert eine Einbettung $a\colon D\nu_N M \to N$. Es bezeichne $*$ den Basispunkt in MB_k. Wir definieren $\varphi\colon \dot N \to MB_k$ ähnlich wie in (3.8) durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Theta(v) & \text{falls } x = a(v) \text{ für ein } v \in D\nu_N M \setminus S\nu_N M, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wieder stetig, und lässt sich stetig auf die Einpunktkompaktifizierung $\dot{N}$ von N fortsetzen. Sie hängt bis auf Homotopie nicht von den Wahlen von Θ und a ab.

Um zu zeigen, dass $[\varphi] \in [\dot{N}, MB_k]$ invariant unter $\mathbb{B}$-Bordismen ist, betrachten wir einen $\mathbb{B}$-Bordismus $(W, \bar{\vartheta})$ zwischen (M_0, ϑ_0) und (M_1, ϑ_1). Es seien $\varphi_i \colon S^n \to MB_k$ für $i = 0, 1$ wie oben konstruiert. Die obige Konstruktion liefert jetzt auch für W eine Abbildung $\Phi \colon I \times N \to MB_k$, die sich stetig auf die Einpunktkompaktifizierung $I_+ \wedge \dot{N}$ fortsetzen lässt. Einschränken auf $\{i\} \times S^n$ liefert für $i = 0, 1$ dann die obigen Abbildungen φ_i. Somit stellt Φ eine Homotopie zwischen φ_0 und φ_1 dar.

Um Surjektivität zu zeigen, sei $\varphi \colon \dot{N} \to MB_k$ gegeben. Wir betrachten

$$B_k \cong \big\{\, v \in c_k^* VO(k) \;\big|\; v = 0 \,\big\} \subset c_k^* DVO(k)$$

als Unterraum von MB_k. Es seien $BO_i(k) \subset BO(k)$ die trivialisierenden Teilmengen aus (6.8) und $U_i = c_k^{-1}(BO_i(k)) \subset B_k$, dann ist $V_i = c_k^* VO(k)|_{U_i}$ trivial, und $\psi_i \colon V_i \to \mathbb{R}^k$ bezeichne die zugehörige lokale Trivialisierung. Da $\dot{N}$ kompakt ist, wird $\operatorname{im}\varphi$ von $MB_k \setminus B_k$ und endlich vielen der Mengen $DV_i \setminus SV_i \subset MB_k$ überdeckt. Man kann φ daher wegen des Transversalitätssatzes 6.66 sukzessive durch homotope Abbildungen so ersetzen, dass für diese endlich vielen Indizes i die zusammengesetzten Abbildungen

$$\varphi^{-1}(DV_i \setminus SV_i) \xrightarrow{\varphi} DV_i \setminus SV_i \xrightarrow{\psi_i} \mathbb{R}^k$$

den Nullpunkt 0 als regulären Wert besitzen. Dabei modifiziert man φ immer nur auf kompakten Teilmengen von N. Wir dürfen φ als eine zu $B_k \subset MB_k$ transversale Abbildung auffassen.

Die Urbilder von 0 unter den Abbildungen $\psi_i \circ \varphi$ setzen sich dann zusammen zu einer abgeschlossenen (und daher kompakten) Untermannigfaltigkeit $M = \varphi^{-1}(B_k) \subset N \subset \dot{N}$. Außerdem induziert φ eine Abbildung $\Theta \colon \nu_N M \to c_k^* VO(k)$ über $\vartheta = \varphi|_M \colon M \to B_k$. Somit haben wir φ eine m-dimensionale $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeit von N zugeordnet. Man überprüft leicht, dass (M, ϑ) das Urbild von $[\varphi]$ unter der obigen Abbildung $\Omega_G(N) \to [\dot{N}, MB_k]$ repräsentiert.

Zur Injektivität seien (M_i, ϑ_i) zwei $\mathbb{B}$-Untermannigfaltigkeiten von N für $i = 0, 1$, und $\varphi_i \colon \dot{N} \to MB_k$ seien wie oben konstruiert. Es sei $\Phi \colon I_+ \wedge \dot{N} \to MB_k$ eine Homotopie zwischen φ_0 und φ_1. Wie oben können wir Φ relativ zu $(\partial I)_+ \wedge \dot{N}$ transversal zum Nullschnitt $B_k \subset MB_k$ deformieren. Dann ist $W = \Phi^{-1}(B_k) \subset I \times N$ ein $\mathbb{B}$-Bordismus zwischen (M_0, ϑ_0) und (M_1, ϑ_1) wird.

Damit ist gezeigt, dass die obige Abbildung $\Omega_G(N) \to [\dot{N}, MG]$ bijektiv ist. Wie in Bemerkung 3.89 ist $\Omega_G(N \times \mathbb{R}^\ell) \to [S^\ell \dot{N}, MG]$ ein Halbgruppenhomomorphismus für $\ell \geq 1$, insbesondere ist $\Omega_G(\mathbb{R}^\ell \times N)$ dann sogar eine Gruppe. Aus der obigen Konstruktion ergibt sich auch die Aussage über den Stabilisierungshomomorphismus $\Omega_{\mathbb{B}}^k(N) \to \Omega_{\mathbb{B}}^{k+1}(N \times \mathbb{R})$. □

Um Bordismus als (unreduzierte) Homologietheorie zu verstehen, gehen wir vor wie in Definition 3.95, gehen aber jetzt von $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeiten aus, dargestellt als Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ wie in Definition 6.63. Bordismen zwischen ihnen definieren wir wie in Definition 6.65.

6.71. Definition. Es sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, es sei X ein topologischer Raum, und es sei $k \geq 0$.

(1) Ein *singulärer $\mathbb{B}$-k-Zykel* $(M, [\vartheta, \iota], f)$ in X besteht aus einer kompakten k-dimensionalen $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeit $(M, [\vartheta, \iota])$ und einer stetigen Abbildung $f \colon M \to X$.

(2) Zwei singuläre $\mathbb{B}$-k-Zykel $(M_i, [\vartheta_i, \iota_i], f_i)$ mit $i = 0, 1$ heißen $\mathbb{B}$-*bordant* in X, wenn ein kompakter $\mathbb{B}$-Bordismus $(W, [\bar{\vartheta}, \bar{\iota}])$ zwischen ihnen und eine Abbildung $F \colon W \to X$ mit $F|_{M_i} = f_i$ existiert.

(3) Die Menge aller $\mathbb{B}$-Bordismusklassen $[(M, [\theta, \iota], f)]$ in X wird mit $\Omega_k^{\mathbb{B}}(X)$ bezeichnet. Für jede stetige Abbildung $g \colon X \to Y$ erhalten wir eine Abbildung $g_* \colon \Omega_k^{\mathbb{B}}(X) \to \Omega_k^{\mathbb{B}}(Y)$ via

$$g\big([(M, \theta, f)]\big) = [(M, \theta, g \circ f)] \,.$$

Man sieht leicht, dass g_* in (3) auch Bordismen $(W, [\bar\vartheta, \bar\iota], F)$ korrekt auf Bordismen $(W, [\bar\vartheta, \bar\iota], g \circ F)$ in Y abbildet. Auf diese Weise wird $\Omega_k^{\mathbb{B}}$ zu einem kovarianten Funktor. Die $\mathbb{B}$-Bordismusklassen bilden eine abelsche Halbgruppe unter disjunkter Vereinigung mit neutralem Element $\emptyset$.

Man beachte die Notation: wir haben soeben $\Omega_k^{\mathbb{B}}(X)$ definiert, im Gegensatz zu den $\Omega_{\mathbb{B}}^k(N)$, $\Omega_{SO(k)}(N)$ und $\Omega_{U(k)}(N)$ aus Definition 6.65. Ein wichtiger Unterschied besteht darin, dass wir in Definition 6.65 das relative Normalenbündel von M in einer Mannigfaltigkeit N betrachtet haben, während es hier um das stabile Normalenbündel von M, also die K-Theorie-Klasse von νM im umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$ geht, und M erst anschließend nach X abgebildet wird.

Die Pontryagin-Thom-Konstruktion zeigt, dass $\Omega_\bullet^{\mathbb{G}}$ eine allgemeine unreduzierte Homologietheorie ist, siehe Satz 3.97 für den gerahmten Fall. Wir erinnern wir uns an Satz 5.38.

6.72. Folgerung. *Es sei $\mathbb{B}$ eine stabile lineare Struktur, es sei X ein topologischer Raum, und $k \geq 0$. Dann gilt*

$$\Omega_k^{\mathbb{B}}(X) \cong MB_k(X) = \widetilde{MB}_k(X_+) \ .$$

Beweis. Es sei $(M, [\vartheta, \iota])$ eine k-dimensionale $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeit, mit dem Satz 6.61 von Whitney repräsentiert als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Außerdem sei $f\colon M \to X$ gegeben. Für $a\colon D\nu \to \mathbb{R}^n$ wie in Satz 6.69 definieren wir $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to MG_{n-k} \wedge X_+$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \big(f(p), \Theta(v)\big) \in X \times c_{n-k}^*\big(DVO(n-k) \setminus SVO(n-k)\big) & \text{falls } x = a(v) \text{ mit } v \in D\nu_p M, \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig und lässt sich stetig auf S^n fortsetzen. Analog verfahren wir mit $\mathbb{B}$-Bordismen in X. Stabilisierung entspricht dem Übergang von $\mathbb{R}^n$ zu $\mathbb{R}^{n+1}$, und macht aus φ bis auf Homotopie die Abbildung

$$S^{n+1} \xrightarrow{S\varphi} SMB_{n-k} \xrightarrow{s_{n-k}} MB_{n+1-k} \ .$$

Nach Satz 5.38 erhalten wir ein Element von $MB_k(X_+) = \operatorname{colim} \pi_n(MB_{n-k} \wedge X_+)$.

Zur Surjektivität der Abbildung $\Omega_k^{\mathbb{B}}(X) \to MB_k(X_+)$ sei $\varphi\colon S^n \to MB_{n-k} \wedge X_+$ gegeben, und es sei $U = \varphi^{-1}((MB_{n-k} \wedge X_+) \setminus \{*\}) \subset \mathbb{R}^n$. Wie im Beweis von Satz 6.70 lässt sich φ auf einer kompakten Teilmenge von U transversal zu B_{n-k} deformieren, so dass $M = \varphi^{-1}(B_{n-k} \times X) \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit wird. Die Mannigfaltigkeit M trägt eine $\mathbb{B}$-Struktur ϑ wie gehabt, und $f = p_X \circ \varphi|_M$ liefert die gesuchte Abbildung nach X. Genauso verfahren wir mit Homotopien, und erhalten Injektivität. □

6.73. Bemerkung. Historisch gesehen war orientierter Bordismus der erste Versuch von Poincaré, so etwas wie „Homologie“ zu definieren. Mit den Arbeiten von Pontryagin und Thom können wir Bordismus mittlerweile als allgemeinen Homologiefunktor verstehen. Das Hauptproblem mit dieser Definition besteht aber darin, dass das Dimensionsaxiom verletzt ist. Während nämlich alle orientierten k-Mannigfaltigkeiten für $1 \leq k \leq 3$ orientiert nullbordant sind, ist $\Omega_4^{SO} \cong \widetilde{MSO}_4(S^0) \cong \mathbb{Z}$ und wird erzeugt von $\mathbb{C}P^2$. Dennoch ist es oft genug möglich, Homologieklassen durch singuläre Zykel darzustellen.

Was sich beim Versuch, Homologie zu definieren, als Manko herausgestellt hat, erweist sich bei der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten als wertvolles Hilfsmittel. Typische Invarianten von Bordismusklassen sind charakteristische Zahlen. Mit ihrer Hilfe erkennt man, dass die Gruppen Ω_{4k}^{SO} allesamt unendlich sind. Diese charakteristischen Zahlen spielen eine gewisse Rolle in der Differentialtopologie, beispielsweise in der Indextheorie.

Schließlich kann bei geeigneter Wahl eines Raumes X Bordismustheorie auch für kompliziertere Klassifikationsprobleme genutzt werden. Gesucht seien beispielsweise geschlossene orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeiten M mit einem komplexen Geradenbündel $L \to M$ bis auf Bordismen W, auf die sich L fortsetzen lässt. Da Geradenbündel auf L nach Satz 6.48 durch

Abbildungen nach $BU(1) \cong \mathbb{C}P^\infty$ beschrieben werden, interessieren wir uns für die Bordismusgruppe $\mathbb{M}SO_k(BU(1)_+)$. Verallgemeinerungen des universellen Koeffiziententheorems helfen bei der Bestimmung solcher Bordismusgruppen.

6.74. Bemerkung. Wir wollen jetzt Produkte betrachten. Wichtig ist dabei, dass die direkte Summe zweier $\mathbb{B}$-Vektorbündel wieder ein $\mathbb{B}$-Vektorbündel ist. Als erstes wählen wir dazu Abbildungen $m\colon BO(k) \times BO(\ell) \to BO(k+\ell)$, so dass darüber Abbildungen von Vektorbündeln $VO(k) \times VO(\ell) \to VO(k+\ell)$ existieren. Anschließend wählen wir analog Abbildungen $\mu\colon B_k \times B_\ell \to B_{k+\ell}$, so dass

$$\begin{array}{ccc} B_k \times B_\ell & \xrightarrow{\mu_{k,\ell}} & B_{k+\ell} \\ \downarrow{\scriptstyle c_k \times c_\ell} & & \downarrow{\scriptstyle c_{k+\ell}} \\ BO(k) \times BO(\ell) & \xrightarrow{m_{k,\ell}} & BO(k+\ell) \end{array}$$

kommutiert. All diese Abbildungen müssen gewisse Verträglichkeiten untereinander und mit den Abbildungen b_k, $B\iota_k$ erfüllen, auf die wir hier noch nicht eingehen wollen. Dann existieren Abbildungen von Vektorbündeln und Thom-Räumen

$$c_k^* VO(k) \times c_\ell^* VO(\ell) \longrightarrow c_{k+\ell}^* VO(k+\ell) \qquad \text{und} \qquad MB_k \wedge MB_\ell \longrightarrow MB_{k+\ell}\,.$$

Wir können zunächst ein Produkt von $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeiten $(M_i, [\vartheta_i, \iota_i])$ mit $i = 0, 1$ einführen, nämlich

$$(M_0, [\vartheta_0, \iota_0]) \times (M_1, [\vartheta_1, \iota_1]) = \big(M_0 \times M_1, [\mu_{k,\ell} \circ (\vartheta_0 \times \vartheta_1), \iota_0 \times \iota_1]\big)\,,$$

da $\mu_{k,\ell} \circ (\vartheta_0 \times \vartheta_1)$ eine $\Bbbk$-Struktur auf dem Normalenbündel $\nu\iota_0 \times \nu\iota_1$ definiert. Es ist mit Bordismen verträglich. Falls M_0 Kodimension k in $\mathbb{R}^m$ und M_1 Kodimension ℓ in $\mathbb{R}^n$ hat, liefert die Pontryagin-Thom-Konstruktion Elemente $[\varphi_0] \in \pi_m(MB_k)$ und $[\varphi_1] \in \pi_n(MB_\ell)$, und das Produkt wird dargestellt durch das Bild unter der Abbildung

$$\pi_m(MB_k) \times \pi_n(MB_\ell) \xrightarrow{\wedge} \pi_{m+n}(MB_k \wedge MB_\ell) \longrightarrow \pi_{m+n}(MB_{k+\ell})\,.$$

Völlig analog erhalten wir ein äußeres Produkt von Kobordismen in Mannigfaltigkeiten N_0 und N_1, dargestellt durch die Abbildung

$$\times\colon [\dot N_0, MB_k] \times [\dot N_1, MB_\ell] \xrightarrow{\wedge} \big[\dot N_0 \wedge \dot N_1, MB_k \wedge MB_\ell\big] \longrightarrow \big[(N_0 \times N_1)^{\cdot}, MB_{k+\ell}\big]\,.$$

Auch hier ist das Produkt zweiter Untermannigfaltigkeiten das kartesische Produkt in $N_0 \times N_1$ mit der passenden normalen $\mathbb{B}$-Struktur.

Um ein inneres Produkt zu konstruieren, sei $\Delta\colon N \to N \times N$ eine geeignete Approximation der Diagonalabbildung, transversal zum kartesischen Produkt der betrachteten Untermannigfaltigkeiten. Dann erhalten wir mit Proposition 6.67 (1) das innere Produkt

$$\smile\colon [\dot N, MB_k] \times [\dot N, MB_\ell] \xrightarrow{\times} \big[\dot N \wedge \dot N, MB_{k+\ell}\big] \xrightarrow{\Delta^*} \big[\dot N, MB_{k+\ell}\big]\,.$$

Fall M_0 zu M_1 transversal ist, können wir für Δ die Diagonalbbildung selbst wählen. In diesem Fall liegt $(M_0, \vartheta_0) \smile (M_1, \vartheta_1)$ die Untermannigfaltigkeit $M_0 \cap M_1$ der Kodimension $k+\ell$ zugrunde. Aus dem kartesischen Produkt wird also der Durchschnitt. Wenn wir bis hier alles korrekt definiert haben, ist das neutrale Element für das innere Produkt gerade die Mannigfaltigkeit N selbst, vorausgesetzt sie ist kompakt, aufgefasst als Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0 mit trivialer $\mathbb{B}$-Struktur.

Wenn wir stabilisieren, können wir auch Untermannigfaltigkeiten von $N \times \mathbb{R}^m$ betrachten, die größere Dimension als N haben. Als Kobordismusklassen haben diese Mannigfaltigkeiten negativen Index. Wir erhalten also einen Ring $\Omega^\bullet_{\mathbb{B}}(N)$ mit Elementen vom Grad $k \le \dim N$.

Das Schräg-Produkt $\Omega^{\mathbb{B}}_{n-k}(N \times X) \times \Omega^{\ell}_{\mathbb{B}}(N) \to \Omega^{\mathbb{B}}_{n-k-\ell}(X)$ entspricht der Abbildung

$$/ \colon \pi_n(MB_k \wedge \dot{N} \wedge X_+) \times [\dot{N}, MB_\ell] \longrightarrow \pi_n(MB_k \wedge MB_\ell \wedge X_+) \longrightarrow \pi_n(MB_{k+\ell} \wedge X_+)$$

$$\text{mit} \quad ([f],[\varphi]) \longmapsto \left(S^n \xrightarrow{f} MB_k \wedge \dot{N} \wedge X_+ \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\varphi\wedge\mathrm{id}} MB_\ell \wedge MB_k \wedge X_+ \longrightarrow MB_{k+\ell} \wedge X_+\right) .$$

Es bildet einen $(n-\ell)$-Zykel und einen k-Kozykel auf einen $(n-k-\ell)$-Zykel ab. Mit Hilfe der Diagonalabbildung erhalten wir das Cap-Produkt

$$\frown \colon \pi_n(MB_k \wedge \dot{N}) \times [\dot{N}, MB_\ell] \xrightarrow{\Delta_* \times \mathrm{id}} \pi_n(MB_k \wedge \dot{N} \wedge \dot{N}) \times [\dot{N}, MB_\ell] \xrightarrow{/} \pi_n(MB_{k+\ell} \wedge \dot{N}) .$$

Wenn $f \colon M_0 \to N$ zu $M_1 \subset N$ transversal ist, liegt dem Cap-Produkt wieder der Durchschnitt zugrunde, genauer die Einschränkung $f \colon f^{-1}(M_1) \to N$. Falls N kompakt ist, wirkt N wieder als neutrales Element.

Zu guter Letzt wollen wir annehmen, dass N selbst eine kompakte n-dimensionale $\mathbb{B}$-Mannigfaltigkeit ist. Dann können wir $\mathrm{id}_N \colon N \to N$ als *Fundamentalklasse* $[N] \in \Omega^{\mathbb{B}}_n(N)$ betrachten. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$[N] \frown \cdot \colon \Omega^k_{\mathbb{B}}(N) \longrightarrow \Omega^{\mathbb{B}}_{n-k}(N) ,$$

die sogenannte *Poincaré-Dualität.*

6.75. Beispiel. Wir wollen uns den Unterschied zwischen Bordismus und Kobordismus anhand von orientierten Mannigfaltigkeit — genauer, Mannigfaltigkeiten mit $\mathbb{BSO}$-Struktur — anschauen.

Es sei N zunächst eine beliebige, nicht notwendig orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein k-Zykel in N besteht aus einer Abbildung $f \colon M \to N$, wobei M kompakt und k-dimensional ist mit oriertem stabilen Normalenbündel. Nach Bemerkung 6.64 (2) legt das eine Orientierung auf TM fest. Man sagt dann auch, dass M selbst orientiert ist.

Auf der anderen Seite ist ein ℓ-Kozykel eine $(n-\ell)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $L \subset N$, deren Normalenbündel $\nu_N L$ in N orientiert ist. Man sagt auch, L sei *relativ zu N orientiert.* Wenn N selbst eine Orientierung trägt, erhält man analog zu Bemerkung 6.64 (2) auch eine Orientierung von L. Das entspricht gerade der Poincaré-Dualität $\Omega^{n-\ell}_{\mathbb{B}}(N) \cong \Omega^{\mathbb{B}}_\ell(N)$.

Zu guter Letzt darf die Dimension k eines Zykels beliebig groß sein. Das bedeutet, das wegen Poincaré-Dualität auch Kozykel beliebig hohe Dimension haben dürfen (und demnach negativen Grad $n-k$). Um $f \colon M \to N$ als Kozykel zu realisieren, betten wir M zusätzlich mit dem Satz 6.61 in den $\mathbb{R}^N$ ein und kombinieren beides zu einer Abbildung $M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}^N$, dargestellt nach Pontryagin-Thom durch $[S^N \wedge \dot{N}, MB_{N+n-k}]$. Der Grad dieses Kozykels ist somit $(N+n-k)-N = n-k$.

6.j. Natürliche Transformationen zwischen Kohomologiefunktoren

Wir können die verschiedenen Funktoren und Kohomologiebegriffe zueinander in Beziehung setzen. Da alle diese Funktoren durch Räume beziehungsweise Ω-Spektren dargestellt werden, können wir dazu das Yoneda-Lemma benutzen.

6.76. Definition. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(1) Ein kovarianter Funktor $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ heißt *darstellbar,* wenn es ein Objekt C in $\mathcal{C}$ und eine natürliche Bijektion

$$\tau \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot) \longrightarrow \mathcal{F}$$

gibt.

(2) Ein kontravarianter Funktor $\mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ heißt *darstellbar,* wenn es ein Objekt C in $\mathcal{C}$ und eine natürliche Bijektion

$$\tau \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, C) \longrightarrow \mathcal{F}$$

gibt.

In beiden Fällen nennen wir C das *darstellende Objekt* und $\tau_C(\mathrm{id}_C) \in \mathcal{F}C$ das *universelle Element.*

Darstellendes Objekt zu sein ist eine universelle Eigenschaft, also sind darstellende Objekte stets bis auf Isomorphie in C eindeutig. Manchmal tragen Morphismenmengen eine zusätzliche Struktur in einer Kategorie $\mathcal{D}$. In diesem Fall erhalten wir einen $\mathcal{D}$-wertigen Funktor. Zum Beispiel ist $[S^k X, Y] = [X, \Omega^k Y]$ in $\mathrm{Ho}\mathcal{T}_+$ eine Gruppe, falls $k \geq 1$, und eine abelsche Gruppe, falls $k \geq 2$.

6.77. Beispiel. Wir kennen genügend Beispiele darstellbarer Funktoren.

(1) Die k-te Homotopiegruppe $\pi_k \colon \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+ \to \mathcal{S}et$ wird durch S^k dargestellt. Da S^k für $k \geq 1$ eine Einhängung ist, erhalten wir Werte in Gruppen, und für $k \geq 2$ sogar in abelschen Gruppen. Das universelle Element ist für $k \geq 1$ das Einselement $[\mathrm{id}_{S^k}] = 1 \in \mathbb{Z} \cong \pi_k(S^k)$.
(2) Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie, dann wird der vergessliche Funktor $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ aus Bemerkung 4.29 durch das Einheitsobjekt E dargestellt.
(3) Ein Kohomologiefunktor $\tilde{E}^k \colon \mathrm{Ho}\mathcal{T}_+ \to \mathcal{A}b$ wird durch den k-ten Raum E_k aus einem Ω-Spektrum $\mathbb{E}$ dargestellt. Da E_k schwach äquivalent zu $\Omega^\ell E_{k+\ell}$ ist, erhalten wir abelsche Gruppen. Beispiele sind gewöhnliche Kohomologie, K-Theorie und stabiler Kobordismus.
(4) Der kontravariante Funktor Bun_G auf der naiven Homotopiekategorie der parakompakten Räume wird durch den Raum BG dargestellt. Das universelle Element ist hier das universelle G-Prinzipalbündel $EG \to BG$.
(5) Unstabiler Kobordismus wird durch Thom-Räume MG dargestellt. Das universelle Element wäre hier $BG \subset MG$, was wir ja tatsächlich als unendlich-dimensionale Untermannigfaltigkeit von endlicher Kodimension aufgefasst haben.

Homologiefunktoren lassen sich in der Regel nicht im obigen Sinne darstellen. Für stabilen Bordismus und für stabile Homotopiegruppen müssen wir zur stabilen Homotopiekategorie übergehen.

Sei $u = \tau_C(\mathrm{id}_C)$ das universelle Element, dann gilt $\tau_X(f) = \mathcal{F}f(u)$ nach dem nun folgenden Yoneda-Lemma im Speziallfall $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ und $\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$.

6.78. Lemma (Yoneda). *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und C ein Objekt von $\mathcal{C}$.*

(1) (Kovariante Fassung) *Es sei $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot\,)$ und $\mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ ein weiterer kovarianter Funktor,*
(2) (Kontravariante Fassung) *beziehungsweise $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot\,, C)$ und $\mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ ein weiterer kontravarianter Funktor.*

Dann steht die Menge der natürlichen Transformationen $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in Bijektion zur Menge $\mathcal{G}C$ vermöge

$$\big(\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}\big) \longmapsto \varphi_C(\mathrm{id}_C) \in \mathcal{G}C \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{G}C \ni x \longmapsto (\mathrm{ev}_x \circ \mathcal{G}) \; .$$

Auch hier ersetzen wir $\mathcal{S}et$ gegebenenfalls durch eine andere Kategorie, falls die Morphismenmengen eine zusätzliche Struktur tragen.

Beweis. Sei zunächst φ eine natürliche Transformation. Wir wenden φ auf das universelle Element $\mathrm{id}_C \in \mathcal{F}C$ an und erhalten $x = \varphi(\mathrm{id}_C) \in \mathcal{G}C$.

Im kovarianten Fall ist ein Element $a \in \mathcal{F}A$ eine Abbildung $a \colon C \to A$. Schreibe $a = a \circ \mathrm{id}_C = \mathcal{F}a(\mathrm{id}_C) \in \mathcal{F}A$. Da φ natürlich ist, folgt

$$\varphi_A(a) = (\varphi_A \circ \mathcal{F}a)(\mathrm{id}_C) = (\mathcal{G}a \circ \varphi_C)(\mathrm{id}_C) = \mathcal{G}a(x) = (\mathrm{ev}_x \circ \mathcal{G})(a) \in \mathcal{G}A \; .$$

Für $x \in \mathcal{G}C$ erhalten wir eine natürliche Transformation, da

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathrm{Abb}(\mathcal{G}C, \mathcal{G}A) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} & \mathcal{G}A \\ {\scriptstyle g\circ}\downarrow{\scriptstyle =\mathcal{F}g} & & {\scriptstyle \mathcal{G}g\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}g} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathrm{Abb}(\mathcal{G}C, \mathcal{G}B) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} & \mathcal{G}B \; . \end{array}$$

Da $(\mathrm{ev}_x \circ \mathcal{G})(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{\mathcal{G}C}(x) = x$, sind diese Konstruktionen zueinander invers.

Zu (2) gehen wir analog vor und betrachten $a = \mathrm{id}_C \circ a = \mathcal{F}a(\mathrm{id}_C) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) = \mathcal{F}A$. Natürlichkeit folgt jetzt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathrm{Abb}(\mathcal{G}C, \mathcal{G}B) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} & \mathcal{G}B \\ {\scriptstyle \circ g}\downarrow & {\scriptstyle =\mathcal{F}g} & {\scriptstyle \mathcal{G}g\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}g} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathrm{Abb}(\mathcal{G}C, \mathcal{G}A) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} & \mathcal{G}A\,. \end{array}$$

□

Wir können das Yoneda-Lemma benutzen, um Beziehungen zwischen verschiedenen Funktoren herzustellen.

6.79. Beispiel (Charakteristische Klassen). Es sei G eine topologische Gruppe mit klassifizierendem Raum BG wie in Definition 6.46, und es sei $\tilde{h}^\bullet$ ein beliebiger Kohomologiefunktor. Jedes Element $c \in \tilde{h}^k(BG)$ definiert nach dem Yoneda-Lemma eine natürliche Transformation $c\colon \mathrm{Bun}_G \to \tilde{h}^k$, eine sogenannte *charakteristische Klasse.*

Als Beispiel betrachten wir die Identitätsabbildung $c_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}P^\infty}$ auf dem Raum $BU(1) \cong \mathbb{C}P^\infty \cong H\mathbb{Z}_2$. Da dieser Raum ganzzahlige gewöhnliche Kohomologie $\tilde{H}^2$ darstellt, ordnen wir jedem komplexen Geradenbündel L auf einem Raum X nach Wahl einer Hermiteschen Metrik zunächst ein $U(1)$-Prinzipalbündel und dann ein Element $c_1(L) \in \tilde{H}^2(X)$ zu, die *erste Chern-Klasse.* Die Determinante $\det_{\mathbb{C}}\colon U(k) \to U(1)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, definiert also eine Abbildung $BU(k) \to BU(1)$. Nach dem Yoneda-Lemma erhalten wir eine natürliche Transformation $\mathrm{Bun}_{U(k)} \to \mathrm{Bun}_{U(1)}$. Das erlaubt uns, die erste Chern-Klasse auf beliebige komplexe Vektorbündel V auszudehnen.

Da die Determinante multiplikativ ist, gilt $c_1(V \oplus W) = c_1(\det V \otimes \det W) = c_1(V) + c_1(W) \in H^2(X)$ (Übung?). Das heißt, die erste Chern-Klasse ist additiv und dehnt sich daher auf komplexe K-Theorie aus. Mit einiger zusätzlicher Arbeit definiert man auch höhere Chern-Klassen $c_k\colon K^0 \to H^{2k}$.

Der Homöomorphismus $\mathbb{C}P^\infty \cong MU(1)$ (Übung?) erlaubt es uns auch, die erste Chern-Klasse mit Werten in komplexem Kobordismus Ω^2_U zu verstehen. Man spricht dann von der *Connor-Floyd-Chern-Klasse,* und definiert auch höhere Klassen $c_k\colon K^0 \to \Omega^{2k}_U$. Da komplexer Kobordismus nach Quillen die universelle multiplikative Kohomologietheorie ist, lassen sich alle anderen Varianten der Chern-Klassen auf die Connor-Floyd-Klassen zurückführen. Insbesondere lassen sich Chern-Klassen von Vektorbündeln immer durch Untermannigfaltigkeiten darstellen.

In der algebraischen Geometrie ist das Analogon zur erster Connor-Floyd-Chern-Klasse übrigens der sogenannte *Divisor* eines Geradenbündels, das ist eine formale Linearkombination von Untervarietäten der komplexen Kodimension 1. Auch hier definiert man eine Äquivalenzrelation, so dass Divisorenklassen genau den holomorphen Geradenbündeln bis auf Isomorphismen entsprechen.

6.k. Multiplikative Kohomologiefunktoren

Wir betrachten Kohomologiefunktoren $(\tilde{h}^\bullet, \delta_\bullet)$ im Sinne von Definition 6.1. In Analogie zu Proposition 5.34 wollen wir die Axiome etwas abändern. Dazu definieren wir einen natürlichen Stabilisierungshomomorphismus $\sigma^k\colon \tilde{h}^k(\,\cdot\,) \to \tilde{h}^{k+1}(S\,\cdot\,)$, so dass für alle Kofaserungen (X, A) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^k(SA) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{h}^k(X/\!/A) \\ {\scriptstyle \sigma^{k-1}}\uparrow{\scriptstyle \cong} & & \uparrow{\scriptstyle \cong} \\ \tilde{h}^{k-1}(A) & \xrightarrow{\partial_k} & \tilde{h}^k(X/A)\,. \end{array} \qquad (*)$$

kommutiert. Für $(\tilde{h}^\bullet, \sigma^\bullet)$ fordern wir aus Definition 6.1 Homotopieinvarianz (1) und das Summenaxiom (3), und anstelle der Kohomologiesequenz (2) nur noch das

(2') *Quotientenaxiom.* Für jede Kofaserung (X, A) ist die folgende Sequenz exakt:

$$\tilde{h}^k(X/A) \longrightarrow \tilde{h}^k(X) \longrightarrow \tilde{h}^k(A) \ .$$

Der Beweis von Proposition 5.34 lässt sich übertragen und zeigt, dass wir einen äquivalenten Kohomologiebegriff erhalten.

Im Folgenden benötigen wir die natürliche Transposition

$$\tau_{X,Y} \colon X \wedge Y \longrightarrow Y \wedge X \qquad \text{mit} \qquad \tau_{X,Y}(x \wedge y) = y \wedge x \ .$$

6.80. Definition. Ein *allgemeiner reduzierter multiplikativer Kohomologiefunktor* $(\tilde{h}^\bullet, \sigma^\bullet, \wedge, 1)$ besteht aus einem allgemeinen, reduzierten Kohomologiefunktor $(\tilde{h}^\bullet, \sigma^\bullet)$ und einer *multiplikativen Struktur,* nämlich natürlichen äußeren Produkten

$$\wedge \colon \tilde{h}^k(X) \otimes \tilde{h}^\ell(Y) \longrightarrow \tilde{h}^{k+\ell}(X \wedge Y)$$

für je zwei Räume X, Y und ganze Zahlen k, ℓ, und einem *Einselement* $1 \in \tilde{h}^0(S^0)$, so dass für alle Räume X, Y, Z und alle $\alpha \in \tilde{h}^k(X)$, $\beta \in \tilde{h}^\ell(Y)$ und $\gamma \in \tilde{h}^m(Z)$ die folgenden Axiome gelten.

(1) *Assoziativität.* Es gilt

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \in \tilde{h}^{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z) \ .$$

(2) *Einselement.* Es gilt

$$1 \wedge \alpha = \alpha \wedge 1 = \alpha \in \tilde{h}^k(X) \ .$$

(3) *Stabilität.* Für die Stabilisierungs-Isomorphismen $\sigma^\bullet$ gilt

$$(\sigma^k \alpha) \wedge \beta = \sigma^{k+\ell}(\alpha \wedge \beta) = (-1)^k \alpha \wedge (\sigma^\ell \beta) \in \tilde{h}^{k+\ell+1}\big(S(X \wedge Y); R\big) \ .$$

Wir nennen $(\tilde{h}^\bullet, \sigma^\bullet, \wedge, 1)$ unter der folgenden Bedingung (*graduiert*) *kommutativ.*

(4) *Transposition.*Es gilt

$$\tau_{X,Y}^*(\beta \wedge \alpha) = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta \ .$$

6.81. Beispiel. Wir haben bereits die folgenden kommutativen multiplikativen Kohomologiefunktoren kennengelernt.

(1) Gewöhnliche Kohomologie $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; R)$ mit Koeffizienten in einem Ring R, siehe Proposition und Definition 6.22.
(2) K-Theorie über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ mit den äußeren Tensorprodukt „$\boxtimes$“ und dem inneren Tensorprodukt „$\otimes$“, siehe Bemerkung 6.60.
(3) Kobordismus für multiplikative stabile lineare Strukturen $\mathbb{B}$, siehe Bemerkung 6.74.

Die Produkte haben wir dabei mehr oder weniger ad hoc definiert, während wir für die Kohomologiefunktoren jeweils Spektren angegeben haben. Indem wir ähnlich wie im Yoneda-Lemma 6.78 vorgehen, können wir die multiplikative Struktur bereits auf den einzelnen Räumen der Spektren selbst angeben. Sobald wir diese Struktur haben, können wir auch Schräg–Produkte und äußere Produkte auf der Homologie definieren. Mit der Diagonalabbildung $\Delta \colon X \to X \wedge X$ erhalten wir die inneren Produkte $\smile$ und $\frown$. Im nächsten Kapitel erweitern wir diese Theorie noch um den Begriff der *Orientierung,* so dass wir auch Poincaré-Dualität und verwandte Konzepte formulieren können.

Wir erinnern uns an den Brownschen Darstellungssatz, siehe Bemerkung 6.30. Sei $\mathbb{E} = (E_\bullet, s_\bullet)$ ein Ω-Spektrum, dann bezeichne $(\tilde{E}^\bullet, \sigma^\bullet)$ den zugehörigen Kohomologiefunktor mit

$$\tilde{E}^k(X) \cong [X, E_k] \qquad \text{und} \qquad \sigma_X^k \colon [X, E_k] \xrightarrow{S} [SX, SE_k] \xrightarrow{s_k \circ} [SX, E_{k+1}] \ .$$

Wir betrachten die universellen Kohomologieklassen $[\mathrm{id}_{E_k}] \in \tilde{E}^k(E_k)$. Wir repräsentieren $\alpha \in \tilde{E}^k(X)$ durch $a\colon X \to E_k$, so dass $\alpha = a^*[\mathrm{id}_{E_k}] \in \tilde{E}^k(X)$.

Seien ein äußeres Produkt $\wedge$ und ein Einselement $1 \in \tilde{E}^0(S^0)$ wie in Definition 6.80 gegeben. Dann stellen wir $[\mathrm{id}_{E_k}] \wedge [\mathrm{id}_{E_\ell}] \in \tilde{E}^{k+\ell}(E_k \wedge E_\ell)$ dar durch eine Abbildung

$$\mu_{k,\ell}\colon E_k \wedge E_\ell \longrightarrow E_{k+\ell} \ .$$

Dann wird „$\wedge$“ durch die Sammlung der $\mu_{k,\ell}$ bereits vollständig beschrieben, denn aufgrund der Natürlichkeit gilt für $\alpha = a^*[\mathrm{id}_{E_k}] \in \tilde{E}^k(X)$ und $\beta = b^*[\mathrm{id}_{E_\ell}] \in \tilde{E}^\ell(X)$ bereits

$$\alpha \wedge \beta = (a \wedge b)^*\big([\mathrm{id}_{E_k}] \wedge [\mathrm{id}_{E_\ell}]\big) = (a \wedge b)^*[\mu_{k+\ell}] \in \tilde{E}^{k+\ell}(X \wedge Y) \ .$$

Um die Axiome aus Definition 6.80 mit Hilfe der $\mu_{k,\ell}$ zu beschreiben, brauchen wir die natürlichen Transformationen α, λ, ρ aus Definition 4.26 für die monoidale Kategorie $(\mathcal{T}_+, \wedge, S^0)$, sowie die oben eingeführte Transposition τ. Ein Minuszeichen in einer der folgenden Gleichungen realisieren wir mit Hilfe des Elements $-1 \in \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Dieses Element wirkt auch auf Schleifenräumen wie den E_k.

6.82. Proposition. *Es sei $\mathbb{E}$ ein Ω-Spektrum. Dann stellen $1\colon S^0 \to E_0$ und $\mu_{k,\ell}\colon E_k \wedge E_\ell \to E_{k+\ell}$ genau dann eine multiplikative Struktur dar, wenn für alle k, ℓ, m gilt*

$$\begin{gathered}
\mu_{k+\ell,m} \circ (\mu_{k,\ell} \wedge \mathrm{id}_{E_m}) \sim \mu_{k,\ell+m} \circ (\mathrm{id}_{E_k} \wedge \mu_{\ell,m}) \circ \alpha_{E_k,E_\ell,E_m} \ , \\
\lambda_{E_k} \sim \mu_{0,k} \circ (1 \wedge \mathrm{id}_{E_k}) \qquad \textit{und} \qquad \rho_{E_k} \sim \mu_{k,0} \circ (\mathrm{id}_{E_k} \wedge 1) \ , \\
s^k \sim \mu_{1,k} \circ \big((s^0 \circ S^1 1) \wedge \mathrm{id}_{E_k}\big) \qquad \textit{und} \qquad (-1)^k s^k \sim \mu_{1,k} \circ \big(\mathrm{id}_{E_k} \wedge (s^0 \circ S^1 1)\big) \ .
\end{gathered}$$

Sie ist genau dann graduiert kommutativ, wenn zusätzlich

$$\mu_{\ell,k} \circ \tau_{E_k,E_\ell} \sim (-1)^{kl} \mu_{k,\ell} \ .$$

Wir nennen ein Ω-Spektrum mit einer multiplikativen Struktur in Zukunft auch kurz ein Ω-*Ringspektrum,* obwohl man Ringspektren eigentlich nur in einer Kategorie von Spektren mit einer „guten“ monoidalen Struktur betrachten sollte. Für die nächste Definition erinnern wir noch einmal an die Konstruktion von Homologiefunktoren aus Satz 5.38.

6.83. Proposition und Definition. *Es sei $(E_\bullet, s_\bullet, \mu_{\bullet,\bullet}, 1)$ ein Ω-Ringspektrum. Dann ist das Schräg-Produkt $\tilde{E}_{k+\ell}(X \wedge Y) \times \tilde{E}^k(X) \to \tilde{E}_\ell(X)$ gegeben für $b\colon S^{k+\ell+m} \to E_{k+\ell} \wedge X \wedge Y$ und $\alpha\colon X \to E_l$ durch die Abbildung*

$$b/\alpha\colon S^{k+\ell+m} \xrightarrow{b} E_m \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\alpha\wedge\mathrm{id}} E_m \wedge E_k \wedge Y \xrightarrow{\mu_{m,k}\wedge\mathrm{id}} E_{m+k} \wedge Y$$

natürlich und hat für alle $\alpha \in \tilde{E}^k(X)$, $\beta \in \tilde{E}^\ell(Y)$ und $a \in \tilde{E}_k(X)$, $b \in \tilde{E}_{k+\ell}(X \wedge Y)$, $c \in \tilde{E}_{k+\ell+m}(X \wedge Y \wedge Z)$ die folgenden Eigenschaften.und hat die folgenden Eigenschaften.

(1) Assoziativität. *Es gilt*

$$(c/\alpha)/\beta = c/(\alpha \wedge \beta) \in \tilde{E}_m(Z) \ .$$

(2) Einselement. *Für das Element $1 \in R \cong \tilde{E}^0(S^0)$ gilt*

$$a/1 = a \in \tilde{E}_k(X) \ .$$

(3) Stabilität. *Für die Stabilisierungs-Isomorphismen σ gilt*

$$(\sigma b)/(\sigma\alpha) = b/\alpha \in \tilde{E}_\ell(Y) \qquad \textit{und} \qquad (\sigma b)/\alpha = (-1)^k \sigma(b/\alpha) \in \tilde{E}_{\ell+1}(Y) \ . \quad \square$$

Wenn wir das Schräg-Produkt auf den Fall $Y = S^0$ spezialisieren, erhalten wir für $a \in \tilde{E}_k(X)$ und $\alpha \in \tilde{E}^k(X)$ das *Kronecker-Produkt*

$$\langle a, \alpha \rangle = a/\alpha \in H^0(S^0) \; .$$

Dann gilt auch das Analogon von Proposition 6.22 (4).

Mit Hilfe der Diagonalabbildungen $\Delta_X \colon X \to X \times X$ erhalten wir auch innere Produkte wie in Definition 6.24. Wir formulieren sie für die unreduzierten Funktoren $E^\bullet(X) = \tilde{E}^\bullet(X_+)$ und $E_\bullet(X) = \tilde{E}_\bullet(X_+)$. Dabei nennen wir die äußeren Produkte jetzt „$\times$“ und „$/$“. Sie haben ähnliche Eigenschaften wie in Proposition 6.25.

6.84. Proposition und Definition. *Es sei $\mathbb{E} = (E_\bullet, s_\bullet, \mu_{\bullet,\bullet}, 1)$ ein Ω-Ringspektrum. Es sei X ein Raum und (X, A), (X, B) punktierte Kofaserungen. Dann definieren wir die* inneren Produkte

$$\smile = \Delta_X^* \circ \times \colon E^k(X, A) \otimes E^\ell(X, B) \longrightarrow E^{k+\ell}(X, A \cup B)$$

$$\textit{und} \qquad \frown = / \circ (\Delta_{X,*} \otimes \mathrm{id}) \colon E_{k+\ell}(X, A \cup B) \otimes E^k(X, A) \longrightarrow E_\ell(X, B) \; .$$

Sie sind natürlich und haben folgende Eigenschaften.

(1) Assoziativgesetz. *Es gilt*

$$(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \qquad \textit{und} \qquad (c \frown \alpha) \frown \beta = c \frown (\alpha \smile \beta) \; .$$

(2) Einselement. *Sei $p \colon X \to \mathrm{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $1 = p_+^*(1) \in \tilde{E}^0(X_+) = E^0(X)$ neutrales Element für beide Produkte.*

(3) Adjunktion. *Es gilt*

$$\langle b \frown \alpha, \beta \rangle = \langle b, \alpha \smile \beta \rangle \; .$$

(4) *Wenn $\mathbb{E}$ graduiert kommutativ ist, ist das Cup-Produkt* graduiert kommutativ, *das heißt, für alle $\alpha \in \tilde{E}^k(X)$ und $\beta \in \tilde{E}^\ell(X)$ gilt*

$$\beta \smile \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \smile \beta \; . \quad \square$$

Das neutrale Element hätte uns in $(\tilde{E}^\bullet(X), \smile)$ gefehlt.

6.85. Bemerkung. Als erste Anwendung zeigen wir, dass das Cup-Produkt auf $\tilde{E}^\bullet(SX)$ verschwindet. Dazu sei

$$SX = X \wedge \big([0,1]/\{0,1\}\big) \; , \qquad A = X \wedge \big(\big[0, \tfrac{1}{2}\big], 0\big) \; , \qquad \text{und} \qquad B = X \wedge \big(\big[\tfrac{1}{2}, 1\big], 1\big) \; .$$

Dann gilt $A \cup B = SX$. Außerdem sind A, $B \cong CX$ zusammenziehbar, und nach Proposition 3.62 sind die Quotientenabbildungen $p \colon SX \to SX/A$ und $q \colon SX \to SX/B$ Homotopieäquivalenzen. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^k(SX/A) \times \tilde{E}^\ell(SX/B) & \xrightarrow{\smile} & \tilde{E}^{k+\ell}(SX/SX) = 0 \\ \downarrow{\scriptstyle p^* \times q^*}\cong & & \downarrow \\ \tilde{E}^k(SX) \times \tilde{E}^\ell(SX) & \xrightarrow{\smile} & \tilde{E}^{k+\ell}(SX) \; . \end{array}$$

6.86. Bemerkung. Wie in Bemerkung 6.26 ist $\tilde{E}^\bullet(X)$ eine $E^\bullet$-Algebra ohne Eins. Wir können eine Eins hinzufügen und erhalten die unreduzierte Kohomologie-Algebra $E^\bullet(X)$. Während $\tilde{E}^\bullet(X)$ als $E^\bullet$-Modul unabhängig von der Wahl des Basispunktes ist, sieht $\tilde{E}^\bullet(X)$ als $E^\bullet$-Algebra zumindest die Zusammenhangskomponente des Basispunktes. Die unreduzierte Kohomologie-Algebra $E^\bullet(X)$ ist wiederum basispunktunabhängig.

6.87. Definition. Es sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und $E^\bullet$ eine multiplikative Kohomologiefunktor. Wenn es $k \geq 0$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \tilde{E}^\bullet(X)$ gibt, so dass

- $\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_k \neq 0$ falls $k \geq 0$, und
- $\beta_1 \smile \cdots \smile \beta_{k+1} = 0$ für alle $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1} \in \tilde{E}^\bullet(X)$,

dann hat X die *E-Cup-Länge* $\mathrm{cl}_E(X) = k$, andernfalls $\mathrm{cl}_E(X) = \infty$.

Wenn es ein $k \geq 0$ gibt, so dass $\mathrm{cl}_E(X) \leq k$ für alle multiplikativen Kohomologiefunktoren $E^\bullet$ und $\mathrm{cl}_E(X) = k$ für mindestens einen, dann hat X die *Cup-Länge* $\mathrm{cl}(X) = k$, andernfalls $\mathrm{cl}(X) = \infty$.

Wir müssen in der obigen Definition auf jeden Fall mit der reduzierten E-Kohomologie arbeiten, anderfalls erhielten wir beliebig lange Produkte der Form $1 \cdots 1 \neq 0$.

6.88. Beispiel. Die Cup-Länge ist ein sehr grobes Maß für die Komplexität eines topologischen Raumes.

(1) Jeder zusammenziehbare Raum X hat Cup-Länge $\mathrm{cl}(X) = 0$. Sei umgekehrt X ein zusammenhängender, einfach zusammenhängender CW-Komplex mit $\mathrm{cl}_H(X) = 0$ für die ganzzahlige Kohomologie, dann ist X zusammenziehbar nach Übung 6.99.
(2) Nach Bemerkung 6.86 gilt $\mathrm{cl}(SX) \leq 1$ für alle Suspensionen.
(3) In Übung 6.115 sehen wir, dass $\mathrm{cl}(\mathbb{C}P^n) = \mathrm{cl}(\mathbb{H}P^n) = n$.

6.89. Proposition. *Es sei X ein zusammenhängender CW-Komplex der Dimension m. Dann gilt* $\mathrm{cl}(X) \leq m$.

Beweis. Wir nehmen an, dass das 0-Skelett X^0 nur aus dem Basispunkt besteht, indem wir Satz 4.51 auf $(X, \{x_0\})$ anwenden. Seien jetzt $1 \leq p,\, q \leq m$, und sei $\Delta'_{X;X^{p-1},X^{q-1}}$ eine zelluläre Approximation der Diagonalen $\Delta_{X;X^{p-1},X^{q-1}}$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\qquad\qquad\Delta\qquad\qquad} & X \wedge X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/X^{p+q-1} & \xrightarrow{\Delta'_{X;X^{p-1},X^{q-1}}} & (X \wedge X)/(X^{p-1} \wedge X \cup X \wedge X^{q-1}) = (X/X^{p-1}) \wedge (X/X^{q-1})\,. \end{array}$$

Für $\alpha \in \tilde{E}^k(X/X^{p-1})$ und $\beta \in \tilde{E}^\ell(X/X^{q-1})$ folgt $\alpha \smile \beta \in \tilde{E}^{k+\ell}(X/X^{p+q-1})$. Da $\tilde{E}^\bullet(X) = \tilde{E}^\bullet(X/X^0)$, liegen induktiv alle p-fachen Produkte in $\tilde{E}^\bullet(X/X^{p-1})$. □

6.l. Übungen zu Kapitel 6

Übungen zu Abschnitt 6.a.

6.90. Übung. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 für Kohomologie-Funktoren.

Übungen zu Abschnitt 6.b.

6.91. Übung. Es seien inverse Systeme (A_i, f_i), (A'_i, f'_i) und (A''_i, f''_i) wie in Bemerkung 6.12 gegeben.

(1) Zeigen Sie, dass alle f'_i surjektiv sind. Folgern Sie daraus
$$\lim{}^1 A'_i = 0\,.$$
(2) Zeigen Sie, dass für jedes i ein $j \geq i$ existiert mit $f''_{i+1} \circ \cdots \circ f''_k = 0$ für alle $k \geq j$, falls (A_i, f_i) die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Folgern Sie, dass dann
$$\lim{}^1 A''_i = 0\,.$$

6.92. Übung. Schreiben Sie das inverse System aus Beispiel 6.8 als

$$(A'_\bullet, f_\bullet) = \big(3^0\mathbb{Z} \longleftarrow 3^1\mathbb{Z} \longleftarrow 3^2\mathbb{Z} \longleftarrow \cdots\big)$$

mit den offensichtlichen Inklusionen und betrachten Sie die inversen Systeme $A_i = \mathbb{R}$, $A''_i = \mathbb{R}/3^i\mathbb{Z}$, so dass Sie eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (A'_\bullet, f'_\bullet) \longrightarrow (A_\bullet, f_\bullet) \longrightarrow (A''_\bullet, f''_\bullet) \longrightarrow 0$$

von inversen Systemen erhalten.

(1) Zeigen Sie, dass $(A_\bullet, f_\bullet)$ und $(A''_\bullet, f''_\bullet)$ die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllen.
(2) Berechnen Sie $\lim^1 A'_i$ mit der langen exakten Sequenz aus Satz 6.10.

Übungen zu Abschnitt 6.c.

6.93. Übung. Es seien $X = \mathbb{R}P^2 \times S^3$ und $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^3$.

(1) Zeigen Sie, dass X und Y isomorphe Homotopiegruppen haben.
(2) Bestimmen Sie die ganzzahligen Homologiegruppen von X und Y.
(3) Bestimmen Sie die ganzzahligen Kohomologiegruppen von X und Y.

6.94. Übung. Konstruieren Sie die Stabilisierungs-Isomorphismen für zelluläre Homologie und Kohomologie.

(1) Geben Sie zuerst mit Hilfe von Proposition 5.65 Isomorphismen

$$\phi_n \colon \tilde{C}_n^{\mathrm{CW}}(X; A) \longrightarrow \tilde{C}_{n+1}^{\mathrm{CW}}(S^1 \wedge X; A)$$

mit $\phi_{n-1} \circ d_n^{\mathrm{CW}} = -d_{n+1}^{\mathrm{CW}} \circ \phi_n$ an.
(2) Zeigen Sie, dass diese mit den Isomorphismen aus Satz 5.10 beziehungsweise Folgerung 6.4 übereinstimmen. *Hinweis:* Betrachten Sie die Kofaserung $X \hookrightarrow CX = (I, 0) \wedge X$ und gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 3.42 (4).

6.95. Übung. Bestimmen Sie für $1 \leq k \leq n$ die folgenden Kronecker-Produkte.

$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \tag{a}$$

$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \tag{b}$$

$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\,, \tag{c}$$

$$\tilde{H}^k_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\,. \tag{d}$$

6.96. Übung. Wir betrachten den Moore-Raum MA_k zur Gruppe $A = \mathbb{Z}/n$ und die Abbildungen f, $g \colon MA_k \to S^{k+1}$ aus Übung 5.94. Bestimmen Sie $\tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(MA_k; \mathbb{Z})$ und die Abbildungen f^*, $g^* \colon \tilde{H}^\bullet(S^{k+1}; \mathbb{Z}) \to \tilde{H}^\bullet(MA_k; \mathbb{Z})$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Übung 5.94 (1).

6.97. Übung. Es sei R ein Hauptidealring und A ein R-Modul. Dann existiert für jeden topologischen Raum X eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X; R) \otimes_R A \longrightarrow \tilde{H}_k(X; A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_R\big(\tilde{H}_{k-1}(X; R), A\big) \longrightarrow 0$$

wie in Satz 5.57. Diese Sequenz spaltet (allerdings nicht natürlich).

Hinweis: Beweisen Sie diese Aussage zunächst für CW-Komplexe mit den Methoden aus dem Beweis von Satz 6.16. Beutzen Sie dann Natürlichkeit und die Invarianz der gewöhnlichen Homologie unter schwachen Äquivalenzen.

6.98. Übung. Es seien X, Y CW-Komplexe und R ein Hauptidealring. Formulieren und beweisen Sie eine Künneth-Formel für $\tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(X \wedge Y; R)$. Nehmen Sie dazu an, dass einer der beiden Faktoren *von endlichem Typ* ist, das heißt, in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt.

6.99. Übung. Es sei X ein zusammenhängender CW-Komplex mit $\tilde{H}^\bullet(X) = 0$.

(1) Folgern Sie aus dem universellen Koeffiziententheorem 6.16, dass $\tilde{H}_\bullet(X) = 0$.
(2) Sei X außerdem einfach zusammenhängend. Folgern Sie aus dem homologischen Satz 5.50 von Whitehead, dass X zusammenziehbar ist.

Übungen zu Abschnitt 6.d.

6.100. Übung. Beweisen Sie einige der fehlenden Aussagen in Proposition 6.22.

(1) Zeigen Sie zunächst einige der Aussagen in (3) und (5) zum Smashprodukt.
(2) Beweisen Sie dann die zweite Aussage in (4) auf Ketten- / Kokettenniveau.
(3) Leiten Sie daraus alle anderen Aussagen über das Schrägprodukt ab.

6.101. Übung. Bestimmen Sie für alle $n \geq 1$ die Kohomologieringe (insbes. ihre multiplikative Struktur)

$$\tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}^\bullet_{\mathrm{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \; .$$

6.102. Übung. Es bezeichne $[\mathbb{C}P^n] \in H_{2n}(\mathbb{C}P^n; R)$ die von der $2n$-Zelle erzeugte Homologieklasse. Zeigen Sie, dass $\big(H_\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \frown\big)$ ein freier $(H^\bullet(\mathbb{C}P^n; R), \smile)$-Modul mit Erzeuger $[\mathbb{C}P^n]$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Kronecker-Produkt $\langle [\mathbb{C}P^n], \omega^n \rangle$.

6.103. Übung. Wir betrachten die Räume aus Beispiel 5.69.

(1) Berechnen Sie die Kohomologie-Algebra von $S^2 \times S^4$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ oder einem Körper $\Bbbk$, und zeigen Sie insbesondere, dass das Cup-Produkt von zwei Kohomologieklassen von Grad 2 verschwindet.
(2) Folgern Sie, dass $\mathbb{C}P^3$ und $S^2 \times S^4$ nicht homotopieäquivalent sind.

Übungen zu Abschnitt 6.e.

6.104. Übung. Es bezeichne $H^\bullet(\,\cdot\,; \mathbb{Z})$ die unreduzierte Kohomologie zum Eilenberg-Mac Lane-Spektrum $\mathbb{H}\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für jeden topologischen Raum X gilt

$$H^0(X; \mathbb{Z}) = [X, \mathbb{Z}] \qquad \text{und} \qquad H^1(X; \mathbb{Z}) = [X, S^1] \; .$$

6.105. Übung. Zeigen Sie: die radiale Projektion vom „topologischen Huhn“ X aus Beispiel 4.52 auf S^1 ist nicht zusammenziehbar. Folgern Sie, dass $\tilde{H}^1(X) = [X, H\mathbb{Z}_1] \neq 0$ mit der „naiven“ Interpretation von $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ gilt, obwohl X schwach zusammenziehbar ist.

6.106. Übung. Sei $\mathbb{E}$ ein Ω-Spektrum und $B \subset A \subset X$ seien beliebige Räume. Beweisen Sie die Exaktheit einer der Sequenzen

$$\cdots \longleftarrow E_k(X, A) \longleftarrow E_k(X, B) \longleftarrow E_k(A, B) \xleftarrow{\partial} E_{k+1}(X, A) \longleftarrow \cdots \; ,$$

$$\cdots \longrightarrow E^k(X, A) \longrightarrow E^k(X, B) \longrightarrow E^k(A, B) \xrightarrow{\delta} E^{k+1}(X, A) \longrightarrow \cdots \; .$$

Orientieren Sie sich dazu an Übung 3.112.

Übungen zu Abschnitt 6.f.

6.107. Übung. Zeigen Sie: Die Konstruktionen vor Definition 6.46, die jeder Gruppe G einen schwach zusammenziehbaren Raum EG mit freier G-Wirkung und einen klassifizierenden Raum BG zuordnen, so dass $BG = EG/G$, sind Funktoren von der Kategorie der topologischen Gruppen in die Kategorie $kw\mathcal{H}$.

6.108. Übung. Es sei $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe. Zeigen Sie, dass der Raum EG/H zu BH homotopieäquivalent ist. Folgern Sie, dass der Quotient G/H die Homotopiefaser der natürlichen Abbildung $BH \to BG$ ist.

6.109. Übung. Überlegen Sie sich, dass die Menge der positiv definiten selbstadjungierten Matrizen über $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ konvex ist. Folgern Sie, dass jedes $\Bbbk$-Vektorbündel vom Rang r über einem CW-Komplex eine $U(r, \Bbbk)$-Struktur trägt. Da $BGL_r(\Bbbk)$ als CW-Komplex dargestellt werden kann, gibt es daher eine klassifizierende Abbildung $BGL_r(\Bbbk) \to BU(r, \Bbbk)$ für das tautologische Bündel.

6.110. Übung. Wir betrachten die Gruppe $O(1) \cong \mathbb{Z}/2 \cong S^0$. Zeigen Sie:

(1) Der Raum $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zum Verbund von n Kopien der S^0.
(2) Der Raum $BO(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}/2, 1)$, siehe Beispiel 5.42 (4).
(3) Für jeden topologischen Raum gilt $\mathrm{Bun}_{O(1)}(X) \cong H^1(X, \mathbb{Z}/2)$.

Die einem reellen Vektorbündel $V \to X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklasse $w_1(V) \in H^1(X, \mathbb{Z}/2)$ heißt auch *erste Stiefel-Whitney-Klasse.*

6.111. Übung. Wir betrachten die Gruppe $U(1) \cong SO(2) \cong S^1 \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(1) Der Raum $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist homöomorph zum Verbund von n Kopien der S^1.
(2) Der Raum $BU(1)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}, 2)$, siehe Beispiel 5.42 (5).
(3) Für jeden topologischen Raum gilt $\mathrm{Bun}_{U(1)}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$.

Die einem komplexen Vektorbündel $V \to X$ vom Rang 1 entsprechende Kohomologieklasse $c_1(V) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ heißt auch *erste Chern-Klasse.*

Übungen zu Abschnitt 6.h.

6.112. Übung. Die übliche Wirkung von $U(n+1)$ auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Abbildung

$$p\colon U(n+1) \ni g \mapsto g \cdot e_1 \in S^{2n+1} .$$

(1) Zeigen Sie, dass p ein Faserbündel mit Faser $U(n) \subset U(n+1)$ ist.
(2) Folgern Sie, dass $\iota_n\colon U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ eine $(2n)$-zusammenhängende Abbildung ist.
(3) Bestimmen Sie $\pi_k(U(n))$ für $k = 0$, 1 und alle n.
(4) Aufgrund von Bott-Periodizität gilt

$$\varinjlim \pi_k(U(n)) = \varinjlim \pi_{k+2}(U(n))$$

für alle k, wobei der Limes über n läuft. Welche $\pi_k(U(n))$ können Sie mit dieser Information bestimmen?

Übungen zu Abschnitt 6.i.

6.113. Übung. Es seien $V \to X$, $W \to Y$ Euklidische Vektorbündel. Zeigen Sie:

(1) Eine Abbildung Euklidischer Vektorbündel im Sinne von Definition 6.38 induziert eine Abbildung von Thom-Räumen $MV \to MW$.
(2) Das kartesische Produkt $V \times W$ ist ein Euklidisches Vektorbündel über $X \times Y$ mit Thom-Raum $MV \wedge MW$.

6.114. Übung. Es sei N eine Mannigfaltigkeit mit Untermannigfaltigkeiten M_0, M_1. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen aus Bemerkung 6.74:

(1) Die Diagonalabbildung $\Delta\colon N \to N \times N$ ist genau dann zu $M_0 \times M_1 \subset N \times N$ transversal, wenn M_0 zu M_1 transversal ist.
(2) In jedem Fall gilt $\Delta^{-1}(M_0 \times M_1) = M_0 \cap M_1$.

6.115. Übung. Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cl}(\Bbbk P^n) \geq n$, indem Sie ein nicht verschwindendes Cup-Produkt in einem geeigneten reduzierten multiplikativen Kohomologiering von $\Bbbk P^n$ angeben.
(2) Zeigen Sie, dass $LS(\Bbbk P^n) \leq n$.

KAPITEL 7

Dualität

In allgemeinen monoidalen Kategorien gibt es einen Begriff von starker Dualität. In der stabilen Homotopiekategorie $\mathcal{HSCW}$ der CW-Spektren ist das die sogenannte Spanier-Whitehead- oder S-Dualität. Beim Übergang von einem Raum zu seinem Dualraum vertauschen Homologie und Kohomologie ihre Rollen. Motiviert von unseren Überlegungen zur Poincaré-Dualität in der Bordismustheorie führen wir Orientierungen und Fundamentalklassen ein. Anschließend beweisen wir den Thom-Isomorphismussatz und Poincaré-Dualität, indem wir den Thom-Isomorphismus mit Spanier-Whitehead-Dualität kombinieren.

7.a. Spanier-Whitehead-Dualität

In diesem Kapitel führen wir eine stabile Dualität zwischen topologischen Räumen X und X^* ein, so dass die Homologie von X genau die Kohomologie von X^* ist und umgekehrt. Streng genommen handelt es sich um eine Dualität zwischen (Einhängungs-) Spektren. Sie funktioniert besonders gut für endliche Spektren, oder äquivalent für endliche CW-Komplexe. Kompakte glatte Mannigfaltigkeiten sind typische Beispiele hierfür, und wir können das Dual einer kompakten Mannigfaltigkeit explizit angeben als Thom-Spektrum ihres stabilen Normalenbündels; dazu folgen wir Dold und Puppe [**DP**].

Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.c. Wir erinnern uns auch an die natürlichen Isomorphismen λ und ρ aus Definition 4.26. Der Beweis der folgenden Behauptung ist Standard.

7.1. Proposition und Definition. *Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine monoidale Kategorie. Für zwei Objekte A, B von $\mathcal{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es gibt Abbildungen $\varepsilon\colon B \otimes A \to E$ und $\eta\colon E \to A \otimes B$, so dass*

$$\mathrm{id}_A\colon A \xrightarrow{\lambda^{-1}} E \otimes A \xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}} A \otimes B \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} A \otimes E \xrightarrow{\rho} A\,, \tag{1a}$$

$$\mathrm{id}_B\colon B \xrightarrow{\rho^{-1}} B \otimes E \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} B \otimes A \otimes B \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}} E \otimes B \xrightarrow{\lambda} B\,. \tag{1b}$$

(2) *Es gibt eine Adjunktion $\cdot \otimes A \dashv \cdot \otimes B$.*

*Falls eine dieser Aussagen gilt, heißt A (*stark*)* dualisierbar *mit* starkem Dual B. *Wenn außerdem A starkes Dual von B ist, heißt B* reflexiv.

Die Abbildungen ε und η sind gerade Einheit und Koeinheit der Adjunktion aus (2), siehe Bemerkung 4.2. Später benutzen wir Eigenschaft (1) zum Nachweis der starken Dualität. In den Anwendungen arbeiten wir oft mit (2), siehe Bemerkung 7.4.

In einer symmetrischen monoidalen Kategorie spielen A und B die gleiche Rolle. Also ist A genau dann starkes Dual von B, wenn B starkes Dual von A ist, und stark dualisierbare Objekte sind automatisch reflexiv.

7.2. Beispiel. Die folgenden Beispiele lassen sich leicht überprüfen (Übung).

(1) Ein $\Bbbk$-Vektorraum ist genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich-dimensional ist.

(2) Sei R kommutativer Ring mit Eins. Dann ist ein R-Modul genau dann stark dualisierbar, wenn er endlich erzeugt und projektiv ist.

Da $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ und $\mathcal{M}od_R$ symmetrisch monoidal sind, ist Dualität hier eine symmetrische Relation.

In der topologischen Kategorie $(\mathcal{T}_+, \wedge, S^0)$ gibt es nicht viele dualisierbare Objekte. Erst wenn wir zur stabilen Homotopiekategorie $\mathrm{Ho}\mathcal{ST}_+$ übergehen, erhalten wir einen interessanten Dualitätsbegriff. Da wir das reduzierte Produkt auf $\mathcal{ST}_+$ nicht eingeführt haben, geben wir hier eine Ad-Hoc-Definition. Dazu sei τ_0 die „naive“ Transposition aus Bemerkung 3.70 (2). Wie schon zuvor realisieren wir (-1) durch eine Selbstabbildung einer Sphäre.

7.3. Definition. Seien X, Y in $\mathcal{T}_+$. Dann heißt Y ein *Spanier-Whitehead-Dual* oder *S-Dual* von X vom *Grad* $n \in \mathbb{N}$, wenn es eine Auswertungsabbildung $\varepsilon_n \colon Y \wedge X \to S^n$ und eine Koauswertungsabbildung $\eta_n \colon S^n \to X \wedge Y$ gibt, so dass die Abbildungen

$$S^n \wedge X \xrightarrow{\eta_n \wedge \mathrm{id}} X \wedge Y \wedge X \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \varepsilon_n} X \wedge S^n \xrightarrow{\tau} S^n \wedge X \,, \tag{1a'}$$

$$S^n \wedge Y \xrightarrow{(-1)^n \tau_0} Y \wedge S^n \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \eta_n} Y \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\varepsilon_n \wedge \mathrm{id}} S^n \wedge Y \tag{1b'}$$

jeweils homotop zur Identität von $S^n X$ beziehungsweise $S^n Y$ sind.

7.4. Bemerkung. Da das reduzierte Produkt symmetrisch ist, ist jeder stark dualisierbare Raum auch reflexiv, allerdings müssen wir etwas mit den Vorzeichen aufpassen. Es sei Y ein Spanier-Whitehead-Dual von X vom Grad n, dann fassen wir Y und S^n als Räume vom Grad n auf, daher rührt das Vorzeichen $(-1)^n$ bei der zweiten Abbildung. Man kann übrigens zeigen, dass jeder endliche CW-Komplex stark dualisierbar ist, wir werden jedoch etwas anders vorgehen.

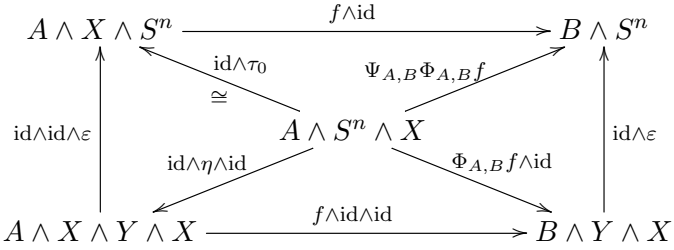
Anstelle der Adjunktion aus Definition 7.1 (2) erhalten wir nur Abbildungen

$$\Phi_{A,B} \colon [A \wedge X, B] \longrightarrow [A \wedge S^n, B \wedge Y] \qquad \text{und} \qquad \Psi_{A,B} \colon [A, B \wedge Y] \longrightarrow [A \wedge X, B \wedge S^n]$$

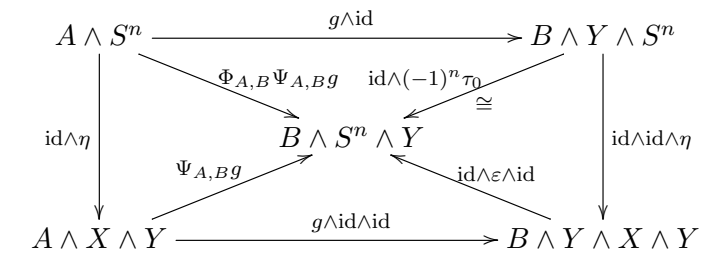
$$\text{mit} \qquad \Phi_{A,B} f \colon A \wedge S^n \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \eta} A \wedge X \wedge Y \xrightarrow{f \wedge \mathrm{id}} A \wedge S^n \quad \text{für} \quad f \colon A \wedge X \to B$$

$$\text{und} \qquad \Psi_{A,B} g \colon A \wedge X \xrightarrow{g \wedge \mathrm{id}} B \wedge Y \wedge X \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \varepsilon} B \wedge S^n \quad \text{für} \quad g \colon A \to B \wedge Y \,.$$

Diese Abbildungen sind immerhin stabil invers zueinander. Dazu betrachten wir für beliebige punktierte Räume A, B die bis auf Homotopie kommutativen Diagramme



und



Es folgt $\Psi_{A,B}\Phi_{A,B} f \sim (f \wedge \mathrm{id}_{S^n}) \circ (\mathrm{id} \wedge \tau_0)$ und $\Phi_{A,B}\Psi_{A,B} g \sim (\mathrm{id} \wedge (-1)^n \tau_0) \circ (g \wedge \mathrm{id}_{S^n})$.

7.5. Lemma. *Es Y ein Spanier-Whitehead-Dual von X vom Grad n, und es sei $\mathbb{E}$ ein Ω-Spektrum. Für alle k existieren natürliche Isomorphismen*

$$\tilde{E}^k(X) \cong \tilde{E}_{n-k}(Y) \qquad \text{und} \qquad \tilde{E}_k(X) \cong \tilde{E}^{n-k}(Y) \; .$$

Beweis. Mit Hilfe der obigen bijektiven Abbildungen $\Phi_{A,B}$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$\tilde{E}^k(X) = \operatorname{colim}_{\ell\to\infty}[S^\ell X, E_{k+\ell}] \xrightarrow{\Phi_{S^\ell, E_{k+\ell}}} [S^{\ell+n}, E_{k+\ell} \wedge Y] = \tilde{E}_{n-k}(Y) \; .$$

Da auch X ein Spanier-Whitehead-Dual von Y vom Grad n ist, folgt die zweite Behauptung. □

Um Spanier-Whitehead-Duale zu konstruieren, benötigen wir noch einen neuen Begriff.

7.6. Definition. Eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ heißt *Umgebungsretrakt,* wenn es eine Umgebung $U \subset X$ von Y und eine Retraktion $p\colon U \to Y$ gibt. Letztere heißt dann auch *Umgebungsretraktion.*

Wir erinnern uns an die Schreibweise $X|x = (X, X \setminus \{x\})$ aus Abschnitt 3.e. Allgemeiner sei $X|A = (X_+, X_+ \setminus A)$ für jede Teilmenge $A \subset X$. Mit $C(X|x) = X/\!\!/(X \setminus \{x\})$ und $C(X|A) = X/\!\!/(X \setminus A)$ bezeichnen wir die zugehörigen Homotopiequotienten. Da wir einen externen Basispunkt gewählt haben, kleben wir also einen unreduzierten Kegel über $X \setminus A$ and X an.

7.7. Satz (Spanier-Whitehead-Dualität). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Umgebungsretrakt. Dann ist $C(\mathbb{R}^n|K)$ ein Spanier-Whitehead-Dual von K_+ vom Grad n.*

Im Beweis des Satzes würden wir gern die Kegel weglassen und stattdessen nur mit Paaren arbeiten. Dabei hilft die folgende Überlegung.

7.8. Proposition. *Es seien (X, A) und (Y, B) Kofaserungen. Dann gibt es eine natürliche Homotopieäquivalenz $\Phi\colon C(X|A) \wedge C(Y|B) \to C(X \times Y|A \times B)$ mit*

$$\Phi\big((x,t) \wedge (y,u)\big) = (x \times y, ut) \; .$$

Beweis. Nach Proposition 3.59 finden wir stetige Funktionen $v\colon X \to I$ und $w\colon Y \to I$ mit $v^{-1}(0) = A$ und $w^{-1}(0) = B$. Als Umkehrabbildung betrachten wir

$$\Psi(x \times y, s) = \left(x, \frac{s + \max(0, w - v)}{v + s + \max(0, w - v)}\right) \wedge \left(y, \frac{s + \max(0, v - w)}{w + s + \max(0, v - w)}\right) .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn

- falls $v = w = 0$ folgt $(x, y) \in A \times B$, also $s = 1$, insbesondere sind beide Nenner positiv,
- im Fall $s = 0$ ist mindestens einer der beiden Kegelparameter im Bild null, das heißt, der Basispunkt wird auf den Basispunkt abgebildet,
- aus $x \in A$ folgt $v = 0$, also $\frac{s+\max(0,w-v)}{v+s+\max(0,w-v)} = 1$, und entsprechendes gilt für $y \in B$.

Die Abbildungen $\Phi \circ \Psi$ und $\Psi \circ \Phi$ lassen die Punkte x und y jeweils unverändert. Wir erhalten Homotopien zur Identität durch Verschieben der jeweiligen Kegelparameter. □

Beweis von Satz 7.7. Wir folgen dem Beweis von Dold und Puppe, siehe [**DP**, Chapter 3] und [**tD2**, Section 7.5]. Die Differenzabbildung $-\colon \mathbb{R}^n|K \wedge K_+ \to \mathbb{R}^n|0$ induziert eine Auswertungsabbildung $\varepsilon_n\colon C(\mathbb{R}^n|K) \wedge K_+ \to S^n$ mit

$$\varepsilon_n((x,t) \wedge k) = (x - k, t) \in C(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow{\sim} S^n \; .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn sie bildet Basispunkt auf Basispunkt ab, und $x - k = 0$ kann nur für $x \in K$ auftreten, und dann gilt $t = 1$.

Es sei $R > 0$ so groß, dass $K \subset B_R(0)$. Setze $D = \overline{B_R(0)}$. Wir wollen die Koauswertungsabbildung η aus dem Diagramm

$$\mathbb{R}^n|D \hookrightarrow \mathbb{R}^n|K \hookleftarrow U|K \xrightarrow{\Delta} U|K \wedge U|K \xrightarrow{p\times\iota} K_+ \wedge U|K$$

ablesen, dabei bezeichne „$\wedge$“ das reduzierte Produkt von Paaren aus Definition 3.68. Da wir U bei Bedarf verkleinern können, dürfen wir $U \subset B$ annehmen. Mit dem Lemma 1.29 von Urysohn finden wir eine stetige Abschneidefunktion $\psi\colon \mathbb{R}^n \to I$ mit $\psi|_K \equiv 1$ und $\operatorname{supp}\psi \subset U$. Außerdem sei $p\colon U \to K$ die Umgebungsretraktion. Die Abbildung $\mathbb{R}^n|K \hookleftarrow U|K$ lässt sich auf Kegeln umkehren durch

$$C(\mathbb{R}^n|K) \ni (x,t) \longmapsto (x, \psi(x)t) \in C(U|K)\ ,$$

denn alle Punkte $x \notin U$ werden auf den Basispunkt abgebildet. Solche Konstruktionen nennt man *Ausschneidung:* Man kann einen Teil eines Paares (hier $\mathbb{R}^n \setminus U$) „ausschneiden“, ohne die Kohomologie zu verändern. Voraussetzung ist, dass sie die Abschlüsse der betroffenen Mengen (hier K und $\mathbb{R}^n\setminus U$) disjunkt sind. Wir konstruieren $\eta_n\colon S^n \to K_+\wedge C(\mathbb{R}^n|K)$ für $(x,t) \in C(\mathbb{R}^n|B) \sim S^n$ also durch

$$\eta_n(x,t) = p(x) \wedge \big(x, \psi(x)\, t\big)\ .$$

Wir überprüfen die Bedingungen aus Definition 7.3. Zu (1a') betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n|D \wedge K_+ & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n|K \wedge K_+ & \hookleftarrow & U|K \wedge K_+ \\
\downarrow{\scriptstyle \tau} & \searrow^{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle \beta} & \swarrow_{\gamma} & \downarrow{\scriptstyle \Delta\wedge\mathrm{id}} \\
K_+ \wedge \mathbb{R}^n|0 & \xleftarrow[p\wedge\mathrm{id}]{} & U_+ \wedge \mathbb{R}^n|0 & \xleftarrow[\mathrm{id}\wedge -]{} & U_+ \wedge \mathbb{R}^n|K \wedge K_+
\end{array}$$

Der äußere Rundweg beschreibt gerade die Verkettung $(\mathrm{id}\wedge\varepsilon)\circ(\eta\wedge\mathrm{id})$. Betrachte die Abbildungen

$$\alpha(x,y) = (y,x)\ , \qquad \beta(x,y) = (y, x-y) \qquad \text{und} \qquad \gamma(x,y) = (x, x-y)\ .$$

Dann kommutieren die zwei unteren Dreiecke strikt, und für die anderen beiden betrachten wir von links nach rechts die Homotopien

$$(x,y,s) \longmapsto (y, x-sy) \qquad \text{und} \qquad (x,y,s) \longmapsto ((1-s)y + sx, x-y)\ .$$

Um daraus Abbildungen $C(\mathbb{R}^n|D) \wedge K_+ \to K_+ \wedge C(\mathbb{R}^n|0)$ zu erhalten, benötigen wir eine zusätzliche Abschneidefunktion. Wir wählen $r > 0$ so klein, dass $B_r(k) \subset U$ für alle $k \in K$. Es sei $\rho\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\rho(0) = 1$ und $\rho(u) = 0$ für $u \geq r$. Mit Hilfe der Homotopien

$$\begin{aligned}
&(x,t) \wedge k \longmapsto k \wedge \big(x - sk, t\big)\ ,\\
&(x,t) \wedge k \longmapsto k \wedge \big(x-k, (1 - s + s\rho(|x-k|))t\big)\ ,\\
&(x,t) \wedge k \longmapsto p\big((1-s)k + sx\big) \wedge \big(x-k, \rho(|x-k|)t\big)\\
\text{und} \qquad &(x,t) \wedge k \longmapsto p(x) \wedge \big(x-k, ((1-s)\rho(|x-k|) + s\psi(x))t\big)
\end{aligned}$$

beweisen wir (1a').

Zu (1b') betrachten wir zunächst das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n|K \wedge \mathbb{R}^n|D & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n|K \wedge \mathbb{R}^n|K & \hookleftarrow & \mathbb{R}^n|K \wedge U|K \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & \swarrow_{\beta} & & \swarrow_{\gamma} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\wedge\Delta} \\
\mathbb{R}^n|0 \wedge \mathbb{R}^n|K & \xleftarrow[-\wedge\mathrm{id}]{} & \mathbb{R}^n|K \wedge K_+ \wedge \mathbb{R}^n|K & \xleftarrow[\mathrm{id}\wedge p\wedge\iota]{} & \mathbb{R}^n|K \wedge U|K \wedge U|K
\end{array}$$

Der äußere Rundweg beschreibt gerade $(\varepsilon\wedge\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\wedge\eta)$. Betrachte die Abbildungen

$$\alpha(x,y) = (-y,x)\ , \qquad \beta(x,y) = (x-y, x) \qquad \text{und} \qquad \gamma(x,y) = (x-y, y)\ ,$$

dann repräsentiert α gerade die Abbildung $(-1)^n\tau_0$. Für die Dreiecke im Diagramm benutzen wir von links nach rechts die Homotopien

$$\begin{aligned} &(x,y,s) \longmapsto \big(sx-y,x\big)\ , \\ &(x,y,s) \longmapsto \big(x-y,(1-s)x+sy\big) \\ \text{und}\qquad &(x,y,s) \longmapsto \big(x-(1-s)y-sp(y),y\big)\ . \end{aligned}$$

Wie oben können wir zu Abbildungen zwischen reduzierten Produkten von Kegeln übergehen. Dabei benutzen wir Proposition 7.8, um nur Abbildungen $C(\mathbb{R}^n|K\wedge\mathbb{R}^n|D)\to C(\mathbb{R}^n|0\wedge\mathbb{R}^n|K)$ betrachten zu müssen. □

Wir erinnern uns an den Whitney-Einbettungssatz 6.61, den Satz 6.69 von der Röhrenumgebung, die Definition 6.68 des Thom-Raumes eines Vektorbündels und die Definition 6.62 des stabilen Normalenbündels.

7.9. Definition. Es sei $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ eine Einbettung einer m-dimensionalen glatten geschlossenen Mannigfaltigkeit. Das *normale Thom-Spektrum* $\mathbb{M}\nu$ von f ist als Einhängungsspektrum definiert durch

$$M\nu_k = \begin{cases} \mathrm{pt} & \text{falls } k<n, \text{ und} \\ S^{k-n}M\nu & \text{falls } k\geq n. \end{cases} \tag{1}$$

Wenn M einen Rand hat, definieren wir das *relative normale Thom-Spektrum* $\mathbb{M}\bar\nu$ durch

$$M\bar\nu_k = M\nu_k/M(\nu|_{\partial M})_k\ . \tag{2}$$

Der Raum $M\bar\nu_k$ heißt auch *relativer Thom-Raum.* Aus den Vorüberlegungen zu Definition 6.62 folgt, dass $\mathbb{M}\nu$ und $\mathbb{M}\bar\nu$ bis auf stabile Isomorphismen nicht von der Wahl der Einbettung f abhängen.

7.10. Folgerung. *Das relative normale Thom-Spektrum einer glatten kompakten Mannigfaltigkeit M mit Rand ist Spanier-Whitehead-dual zu M. Dabei faktorisiert die Koauswertungsabbildung $\eta_n\colon S^n\to M_+\wedge M\bar\nu_n$ zu einer Einbettung $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ über die Kollaps-Abbildung $S^n\to M\bar\nu$.*

Beweis. Es sei $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ eine Einbettung gemäß Satz 6.61, und es sei $D\nu_{\mathbb{R}^n}M\subset\mathbb{R}^n$ eine Röhrenumgebung gemäß Satz 6.69. Dann ist M Deformationsretrakt von $D\nu_{\mathbb{R}^n}M$, also ist $M\subset\mathbb{R}^n$ insbesondere ein Umgebungsretrakt. Wie im Beweis von Satz 7.7 ist $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$ ein Spanier-Whitehead-Dual von M vom Grad n, und $C(D\nu_{\mathbb{R}^n}M|M)$ ist homotopieäquivalent zum Thom-Raum $M\nu_{\mathbb{R}^n}M=M\nu_n$.

Wenn M einen Rand hat, können wir jede Einbettung $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ zu einer Einbettung

$$\bar f\colon \bar M = M\cup_{\partial M}(\partial M\times[0,\varepsilon])\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

fortsetzen, da ∂M kompakt ist. Dann ist M Retrakt einer Röhrenumgebung $D\bar\nu$ des Normalenbündels $\bar\nu\to\bar M$, und $C(D\bar\nu|M)$ ist homotopieäquivalent zu $M\bar\nu_n$. Die Abbildung η_n aus dem Beweis von Satz 7.7 lässt sich zerlegen als

$$\begin{aligned} \eta_n\colon C(\mathbb{R}^n|D) &\xrightarrow{\ c\ } M\bar\nu_n \xrightarrow{(p\wedge\mathrm{id})\circ\Delta} M_+\wedge M\bar\nu_n \\ (x,t) &\longmapsto \big(x,\psi(x)\,t\big) \longmapsto p(x)\wedge\big(x,\psi(x)\,t\big)\ , \end{aligned}$$

dabei ist $c\colon S^n\to M\bar\nu_n$ die Kollaps-Abbildung. □

7.b. Orientierungen und Thom-Isomorphismen

Wir definieren einen geeigneten Orientierungsbegriff für topologische Mannigfaltigkeiten, und für eine bestimmte Art „Bündel“, und zwar als ganzzahlige Kohomologieklasse. Anschließend verallgemeinern wir diesen Begriff auf allgemeine multiplikative Kohomologiefunktoren. Danach beweisen wir den Thom-Isomorphismus-Satz.

Zur Motivation sei zunächst V ein reeller Vektorraum. Unter einer Orientierung von V versteht man eine Äquivalenzklasse gleich orientierter Basen, dabei heißen zwei Basen gleich orientiert, wenn die zugehörige Basiswechselmatrix positive Determinante hat. Ein Vektorraum mit Orientierung heißt *orientierter Vektorraum.* Der Raum $\mathbb{R}^n$ trage fortan diejenige Orientierung, für die die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ positiv orientiert ist. Ein linearer Isomorphismus $\varphi\colon V \to W$ orientierter Vektorräume heißt *orientiert,* wenn er orientierte Basen auf orientierte Basen abbildet.

Sei jetzt $p\colon V \to X$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r wie in Abschnitt 6.f. Unter einer Orientierung von V verstehen wir eine Orientierung jeder einzelnen Faser, so dass es einen Atlas $\mathcal{A} = \{\, (U_i, \varphi_i) \mid i \in I \,\}$ wie in Definition 6.35 gibt, für die alle $(\varphi_i|_{V_x})^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to V_x$ orientierte Isomorphismen sind, siehe Bemerkung 6.41 (1).

Für eine topologische Definition betrachten wir $g \in GL(r, \mathbb{R})$ als Abbildung $g\colon \mathbb{R}^r|0 \to \mathbb{R}^r|0$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) & \longrightarrow & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & H^r(\mathbb{R}^r|0) & \longrightarrow & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \\
0 \cong \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r) & \longrightarrow & \tilde{H}^{r-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & H^r(\mathbb{R}^r|0) & \longrightarrow & \tilde{H}^r(\mathbb{R}^r) \cong 0
\end{array}$$

für ganzzahlige Kohomologie. Die beiden mittleren Kohomologiegruppen sind jeweils isomorph zu $\mathbb{Z}$, da (D^r, S^{r-1}) ein Deformationsretrakt des Paares $\mathbb{R}^r|0$ ist. Nach Beispiel 3.47 hat die linke Abbildung g den Abbildungsgrad $\deg g = \operatorname{sign} \det g$, somit ist $g^* = \pm\mathrm{id}$, je nachdem, ob g orientierungserhaltend ist oder nicht. Also verhalten sich die zwei Erzeuger von $H^r(\mathbb{R}^r|0) \cong \mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul unter linearen Isomorphismen genau wie Orientierungen. Daher nennen wir einen Erzeuger von $H^r(\mathbb{R}^r|0)$ eine *Orientierung* des $\mathbb{R}^r$.

Um Orientierungen auf V zu erhalten, die stetig von Faser zu Faser variieren, identifizieren wir X mit dem Nullschnitt von V und erinnern uns, dass der Thom-Raum MV zu $C(V|X)$ homotopieäquivalent ist. Wir definieren eine $\mathbb{Z}$-Orientierung von V als eine Klasse $\omega \in H^\bullet(V|X)$, so dass $\iota_x^*\omega \in H^\bullet(V_x|0)$ den $\mathbb{Z}$-Modul $H^\bullet(V_x|0) \cong H^\bullet(\mathbb{R}^n|0) \cong \mathbb{Z}$ für alle $x \in X$ erzeugt; dabei sei $\iota_x\colon V_x \to V$ die Inklusionsabbildung.

Diesen Orientierungsbegriff verallgemeinern wir für beliebige multiplikative Kohomologiefunktoren. Sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum. Wir nennen ein Element $\alpha \in E^\bullet(\mathbb{R}^r|0)$ einen *Erzeuger,* wenn die Abbildung

$$E^\bullet(S^0) \to E^\bullet(\mathbb{R}^r|0) \qquad \text{mit} \qquad \beta \mapsto \alpha \wedge \beta$$

ein Isomorphismus ist. Zwei Erzeuger unterscheiden sich um eine Einheit des Koeffizientenrings $E^\bullet$. Im Falle gewöhnlicher Kohomologie ist α vom Grad r, aber das muss für allgemeine $\mathbb{E}$ nicht so sein.

7.11. Definition. Es sei E ein multiplikativer Kohomologiefunktor und $V \to X$ ein Vektorbündel vom Rang r. Eine *E-Orientierung* oder auch *Thom-Klasse* von V im Grad n ist ein Element $\omega \in E^n(V|X)$, so dass $\iota_x^*\omega$ für alle $x \in X$ den $E^\bullet$-Modul $E^\bullet(V_x|x)$ erzeugt. Wenn es eine E-Orientierung gibt, heißt V ein *E-orientierbares Vektorbündel.*

Für einen Ring R sprechen wir von R-Orientierbarkeit, wenn Orientierungen bezüglich des Eilenberg-Mac Lane-Spektrums $\mathbb{H}R$ gemeint sind. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ sagen mir nur „orientierbar“.

7.12. Bemerkung. Nicht jedes Vektorbündel ist orientierbar. Beispielsweise ist das Möbiusband nicht $\mathbb{Z}$-orientierbar, denn bei einem Umlauf um die Basis S^1 geht jeder Erzeuger in sein Negatives über.

Die obige Vorüberlegung legt nah, eine Überlagerung $X_{V,\mathbb{E}} \to X$ der punktweisen E-Orientierungen von V einzuführen. Als Faser $X_{V,\mathbb{E},x}$ wählen wir die Menge aller Erzeuger von $E^\bullet(V_x|x) \cong E^{\bullet+m}$, und lokale Trivialisierungen von $X_{V,\mathbb{E}}$ konstruieren wir mit Hilfe von lokalen Trivialisierungen von V. Dann liefert jede $E^\bullet$-Orientierung ω von V einen Schnitt $o\colon X \to X_{V,\mathbb{E}}$ mit $o(x) = \iota_x^*\omega$; diese Abbildung ist für allgemeine $\mathbb{E}$ aber werder injektiv noch surjektiv. Für gewöhnliche Kohomologie erhalten wir Bijektivität mit Hilfe des Dimensionsaxioms, vergleiche [**H1**, Theorem 3.26].

Im folgenden Satz nutzen wir aus, dass $p\colon V \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. In der relativen Situation $V \to (X, Y)$ betrachten wir wie in Definition 7.9 den relativen Thom-Raum

$$M\bar{V} = MV/M(p^{-1}(Y)) \ .$$

7.13. Satz (Thom-Isomorphismen). *Es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum. Es sei $p\colon V \to X$ ein Vektorbündel vom Rang r, und X sei ein endlicher CW-Komplex oder eine kompakte Mannigfaltigkeit. Es sei $\omega \in \tilde{E}^n(MV) \cong E^n(V|X)$ eine E-Orientierung. Für jeden Unterkomplex beziehungsweise jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ gibt es Isomorphismen*

$$\vartheta_{k+n}\colon \tilde{E}_{k+n}(M\bar{V}) \xrightarrow{\frown\omega} E_k(V, V|_Y) \xrightarrow{p_*} \tilde{E}_k(X/Y) \tag{1}$$

$$\text{und} \qquad \vartheta^k\colon \tilde{E}^k(X/Y) \xrightarrow{p^*} E^k(V, V|_Y) \xrightarrow{\smile\omega} \tilde{E}^{n+k}(M\bar{V}) \ . \tag{2}$$

Wenn $\mathbb{E}$ graduiert kommutativ ist, gilt für alle $\beta \in E^\ell(X)$, dass

$$\vartheta_{k-\ell+n}(a \frown p^*\beta) = (-1)^{\ell n}\vartheta_{k+n}(a) \frown \beta \qquad \text{und} \qquad \vartheta^{k+\ell}(\alpha \smile \beta) = (-1)^{\ell n}\vartheta^k(\alpha) \smile p^*\beta \ . \tag{3}$$

Die Voraussetzungen an X können weiter abgeschwächt werden; das erfordert allerdings zusätzliche Argumente. Wenn $\mathbb{E}$ graduiert kommutativ ist, erhalten wir $E^\bullet(X)$-Modulisomorphismen, indem an Stelle von ϑ Thom-Isomorphismen Θ definieren durch

$$\begin{aligned} \Theta_{k+n} &= (-1)^{kn}\vartheta_{k+n}\colon \tilde{E}_{k+n}(M\bar{V}) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}_k(X/Y) \\ \text{und} \qquad \Theta^k &= (-1)^{kn}\vartheta^k\colon \tilde{E}^k(X/Y) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}^{k+n}(M\bar{V}) \ . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $Y = \emptyset$. Wenn das Bündel $V \cong \mathbb{R}^r \times X$ trivial ist, dann ist der Thom-Raum homotopieäquivalent zu $S^r X_+$. Es bezeichne $\Delta\colon MV = DV/SV \to MV \wedge DV_+$ die relative Diagonalabbildung. Die zusammengesetzte Abbildung

$$MV = DV/SV \xrightarrow{\Delta} (DV/SV) \wedge DV_+ \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge p_+} (DV/SV) \wedge X_+$$

ist gerade die r-fache Einhängung der Diagonalabbildung $\Delta_{X_+}\colon X_+ \to X_+ \wedge X_+ = (X \times X)_+$. Es sei $\omega = \sigma^r\omega_0$ mit $\omega_0 \in E^{n-r}(X)$. Zusammen mit der Definition des Cap-Produktes und der Natürlichkeit des Schräg-Produktes liefert Proposition 6.83 (3) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E}_{k+n}(S^r X_+) & \xrightarrow{\Delta_*} & \tilde{E}_{k+n}(S^r X_+ \wedge DV_+) & \xrightarrow{/\omega} & E_k(DV) \\ & & \cong\big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}\wedge p_+)_*} & & \cong\big\downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \cong\big\uparrow{\scriptstyle \sigma^r} & & \tilde{E}_{k+n}(S^r X_+ \wedge X_+) & \xrightarrow{/\sigma^r\omega_0} & E_k(X) \\ & & \cong\big\uparrow{\scriptstyle \sigma^r} & & \| \\ \tilde{E}_{k+n-r}(X_+) & \xrightarrow{\Delta_{X_+*}} & \tilde{E}_{k+n-r}(X_+ \wedge X_+) & \xrightarrow{/\omega_0} & \tilde{E}_k(X) \ . \end{array}$$

Insbesondere ist ϑ_{k+n} genau dann ein Isomorphismus, wenn das Cap-Produkt mit ω_0 in der unteren Zeile ein Automorphismus von $E_\bullet(X)$ ist. Genauso ist ϑ^k genau dann ein Isomorphismus, wenn das Cup-Produkt mit ω_0 ein Automorphismus von $E^\bullet(X)$ ist.

Fixiere $x_0 \in X$ und $\iota\colon \{x_0\} \to X$. Da

$$\iota^*\omega = (\iota^*\sigma^r\omega_0) \in E^n(V_{x_0}|0) \cong \tilde{E}^n(S^r)$$

nach Voraussetzung ein Erzeuger vom Grad n ist, und σ^r mit ι^* vertauscht, ist

$$\iota_+^*\omega_0 \in \tilde{E}^{n-r}(\{x_0, *\}) \cong \tilde{E}^{n-r}(S^0)$$

eine Einheit. Daher ist das (Cap- oder Cup-) Produkt mit ω_0 genau dann ein Automorphismus, wenn das Produkt mit $\omega_0 \wedge (\iota_+^*\omega_0)^{-1}$ ein Isomorphismus ist. Wir dürfen ab jetzt daher $n = r$ und $\iota_+^*\omega_0 = 1$ annehmen. Es folgt $\omega_0 = 1 + \alpha \in E^0(X)$ mit $\alpha \in \ker \iota_+^* = \tilde{E}^0(X)$ und $\omega = s^r(1+\alpha)$.

Wir nehmen zunächst an, dass X ein zusammenhängender, m-dimensionaler CW-Komplex ist. Nach Proposition 6.89 gilt $\alpha^{m+1} = 0$, daher ist $(1+\alpha)$ invertierbar mit

$$(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha \pm \cdots + (-\alpha)^m \,,$$

und die Abbildungen (1), (2) sind Isomorphismen. Wenn X eine zusammenziehbare Teilmenge einer kompakten Mannigfaltigkeit ist, ist das Argument sogar noch einfacher. Wenn X nicht zusammenhängend ist, betrachten wir jede Zusammenhangskomponente einzeln und erhalten das gleiche Ergebnis.

Falls $V \to X$ nicht trivial und X ein CW-Komplex ist, können wir die CW-Struktur durch Unterteilen verfeinern und X als Vereinigung endlich vieler CW-Komplexe $X_1, \ldots, X_N$ schreiben, auf denen V trivial ist. Falls X eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, überdecken wir M dann durch N zusammenziehbare offene Teilmengen. Wir schließen durch Induktion über N; den Fall $N = 1$ haben wir bereits behandelt. Seien also ϑ_{k+n} und ϑ^k Isomorphismen für alle $U \subset X$, die als $(N-1)$-fache Vereinigung $U = X_1 \cup \cdots \cup X_{n-1}$ von Teilmengen X_i wie im ersten Schritt geschrieben werden können. Dann trifft das auch auf $W = U \cap X_n$ zu. Wir schreiben V_U und V_W für die Einschränkungen von V und betrachten ein kommutatives Diagramm aus Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & E_{k+n}(V_W|W) & \longrightarrow & E_{k+n}(V_U|U) \oplus E_{k+n}(V_{X_n}|X_n) & \longrightarrow & E_{k+n}(V|X) & \xrightarrow{\partial} & E_{k+n-1}(V_W|W) & \longrightarrow \\
& \vartheta_{k+n}\downarrow\cong & & \vartheta_{k+n}\downarrow\cong & & \vartheta_{k+n}\downarrow & & \vartheta_{k+n}\downarrow\cong & \\
\longrightarrow & E_k(W) & \longrightarrow & E_k(U) \oplus E_k(X_n) & \longrightarrow & E_k(X) & \xrightarrow{\partial} & E_{k-1}(W) & \longrightarrow \,.
\end{array}$$

Aus dem Fünfer-Lemma folgt die Behauptung.

Für $Y \neq \emptyset$ folgt die Behauptung mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & \tilde{E}_{k+n}\big(M(V|_Y)\big) & \longrightarrow & \tilde{E}_{k+n}(MV) & \longrightarrow & \tilde{E}_{k+n}(M\bar{V}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{E}_{k+n-1}\big(M(V|_Y)\big) & \longrightarrow \\
& \vartheta_{k+n}\downarrow\cong & & \vartheta_{k+n}\downarrow\cong & & \vartheta_{k+n}\downarrow & & \vartheta_{k+n}\downarrow\cong & \\
\longrightarrow & E_k(Y) & \longrightarrow & E_k(X) & \longrightarrow & E_k(X,Y) & \xrightarrow{\partial} & E_{k-1}(Y) & \longrightarrow \,.
\end{array}$$

Genauso beweist man (2). Schließlich folgt (3) aus der Konstruktion der Thom-Isomorphismen, da man jeweils $p^*\beta$ und ω vertauschen muss. □

Üblicherweise nennt man eine glatte Mannigfaltigkeit E-orientiert, wenn ihr Tangentialbündel eine E-Orientierung trägt. Wir haben bisher aber nur mit dem Normalenbündel gearbeitet. Sei $M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung mit Normalenbündel $\nu M \to M$. Dann zerfällt $\mathbb{R}^n$ für alle $x \in M$ als direkte Summe in $\nu_x M$ und $T_x M$. Für die Whitney-Summe gilt daher

$$\nu M \oplus TM \cong \underline{\mathbb{R}}^n \to M \,.$$

Das reicht, um mit Hilfe des Thom-Isomorphismus normale und tangentiale Orientierungen zu vergleichen. Denn das triviale Bündel lässt sich immer orientieren, indem man einen Erzeuger von $E^\bullet$ mit der Abbildung $q\colon C(\underline{\mathbb{R}}^n|X) \to C(\mathbb{R}^n|0)$ zurückzieht. Wenn nichts anderes gesagt wird, wählen wir dazu die *Standardorientierung* $\omega_{\underline{\mathbb{R}}^n} = q^*(s^n\varepsilon)$.

7.14. Folgerung. *Es sei X wie in Satz 7.13, es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum, und es seien $p\colon V \to X$, $q\colon W \to X$ reelle Vektorbündel. Wir bezeichnen die Projektion von $U = V \oplus W$ auf die Summanden mit $\bar{p}\colon U \to W$ und $\bar{q}\colon U \to V$. Wenn zwei der drei Bündel V, W und $U = V \oplus W$ E-Orientierungen ω_V, ω_W beziehungsweise ω_U tragen, dann lässt sich die dritte Orientierung eindeutig so festlegen, dass*

$$\omega_U = \bar{q}^*\omega_V \smile \bar{p}^*\omega_W \in E^\bullet(MU) \,.$$

Beweis. Das faserweise Produkt $DV \times_X DW$ is homöomorph zu DU. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} DU & \xrightarrow{\bar{q}} & DV \\ {\scriptstyle\bar{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ DW & \xrightarrow{q} & X \,. \end{array}$$

Es gilt $DU \cong p^*DW = q^*DV$ und $SU \cong q^*SV \cup p^*SW$. Es folgt, dass $DU_x/SU_x \cong DV_x/SV_x \wedge DW_x/SW_x$ für alle $x \in X$. Der Thom-Raum $MU = DU/SU$ ist zu den relativen Thom-Räumen von $p^*W \to (DV, SV)$ und von $q^*V \to (DW, SW)$ homöomorph. Wir ziehen eine gegebene Orientierung $\omega_W \in \tilde{E}^m(MW)$ längs $\bar{p}\colon DU/q^*SV \to MV$ zurück und betrachten den relativen Thom-Isomorphismus

$$\vartheta^k = \bar{q}^*(\,\cdot\,) \smile (p^*\omega_W)\colon \tilde{E}^k(MV) \longrightarrow \tilde{E}^{k+m}(MU) \,.$$

Gegeben ω_V erhalten wir ein eindeutiges ω_U wie in der Proposition und umgekehrt. Indem wir auf die Fasern an der Stelle $x \in X$ einschränken, sehen wir, dass mit zweiten auch die dritte Klasse eine Orientierung ist. □

7.15. Bemerkung. Wir wollen noch kurz begründen, dass ein orientiertes reelles Vektorbündel vom Rang r im Sinne von Bemerkung 6.41 (1), nach Wahl einer Metrik also ein $SO(r)$-Vektorbündel, stets eine eindeutige zugehörige $\mathbb{Z}$-Orientierung besitzt. Dazu gehen wir ähnlich vor wie im Beweis von Satz 7.13, dabei benutzen wir mehrfach das Dimensionsaxiom. Insbesondere übertragen sich die folgenden Argumente nicht ohne weiteres auf andere Kohomologiefunktoren wie beispielsweise K-Theorie.

Im ersten Schritt sei also $V \to X$ trivial, so dass $MV \cong S^r X_+$. Es folgt $\tilde{H}^r(MV) \cong \tilde{H}^r(S^r) \times H^0(X)$. Auf jeder Zusammenhangskomponente X_0 legt die gegebene Orientierung einen Erzeuger von $\tilde{H}^r(S^r)$ fest, und wir erhalten als Thom-Klasse das äußere Produkt mit $1 \in H^0(X_0)$. Der einzige weitere Erzeuger von $\tilde{H}^r(S^r X_{0+})$ entspricht der entgegengesetzten Orientierung, mithin haben wir Existenz und Eindeutigkeit.

Im zweiten Schritt sei Existenz und Eindeutigkeit der Thom-Klasse über Vereinigungen von bis zu n trivialisierenden Teilmengen bereits gezeigt. Wir betrachten die Einschränkung von V auf $U = U_0 \cup \cdots \cup U_n$ und erhalten eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}^{r-1}\big(MV|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}\big) &\xrightarrow{\delta} \tilde{H}^r\big(MV|_{U_0\cup\cdots\cup U_n}\big) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}^r\big(MV|_{U_0\cup\cdots\cup U_{n-1}}\big) \oplus \tilde{H}^r\big(MV|_{U_n}\big) \xrightarrow{-} \tilde{H}^r\big(MV|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}\big) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung existieren Thom-Klassen für $V|_{U_0\cup\cdots\cup U_{n-1}}$ und $V|_{U_n}$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage stimmen Sie auf $V_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}$ überein, somit existiert eine Thom-Klasse

für $V|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt Satz 7.13 bereits für $V|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}$, insbesondere gilt $0 = \tilde{H}^{r-1}\big(MV|_{(U_0\cup\cdots\cup U_{n-1})\cap U_n}\big)$, und wir erhalten auch Eindeutigkeit.

7.16. Beispiel. Sphären, Tori, komplex und quaternionisch projektive Räume sind stets $\mathbb{Z}$-orientierbar.

Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^m$ ist nach Beispiel 5.21 genau dann orientierbar, wenn m ungerade ist.

7.c. Poincaré-Dualität

Aus Spanier-Whitehead-Dualität leiten wir mit Hilfe des Thom-Isomorphismus Poincaré-Dualität ab. Wir diskutieren einige Schlussfolgerungen. Insbesondere betrachten wir die Schnittform.

Es sei jetzt M eine glatte kompakte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und $f\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine Einbettung. Zu einer E-Orientierung des Tangentialbündels vom Grad r, gibt es gemäß Folgerung 7.14 eine E-Orientierung $\omega_\nu \in E^{n-r}(M\nu)$ des Normalenbündels $p\colon \nu \twoheadrightarrow M$, wenn wir die triviale Orientierung vom Grad n auf dem trivialen Bündel $TM \oplus \nu$ festlegen. In vielen Fällen $r = m$ wird gelten, das muss aber nicht zwangsläufig so sein. Wir erinnern uns an die Koauswertung $\eta\colon S^n \to M_+ \wedge M\bar{\nu}$ zur Spanier-Whitehead-Dualität. Mit Hilfe des Hurewicz-Homomorphismus ordnen wir η eine E-Homologieklasse zu, die wir wieder mit $[\eta]$ bezeichnen:

$$[\eta] = \eta_*[\sigma^n 1] \in \tilde{E}_n(M_+ \wedge M\bar{\nu}) \ .$$

7.17. Proposition und Definition. *Es sei M eine glatte, kompakte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand mit einer tangentialen E-Orientierung vom Grad ℓ. Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung und $\omega_\nu \in E^{n-\ell}(M\nu)$ die zugehörige normale Orientierung. Mit Spanier-Whitehead-Dualität erhalten wir eine Fundamentalklasse $[M] \in E_\ell(M, \partial M)$, dargestellt durch $[M] = \Theta_n([\eta]/1)$, unabhängig von der Wahl von f.*

Beweis. Man beachte, dass zur Konstruktion von $[M]$ an Stelle der vollen Koauswertungsabbildung η nur die Kollaps-Abbildung $q\colon S^n \twoheadrightarrow M\bar{\nu}$ gebraucht wird, da die Klasse $1 \in E^0(M_+)$ längs der Projektion $M_+ \to S^0$ zurückgezogen wird.

Es reicht, der Abbildung f die Einbettung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ hinterherzuschalten, da verschiedene Einbettungen nach Verlängerung in einen hinreichend großen Euklidischen Raum isotop werden. Wir erhalten als Kollaps-Abbildung jetzt

$$q'\colon S^{n+k} \xrightarrow{q\wedge \mathrm{id}_{S^k}} M\bar{\nu} \wedge S^k \cong M\overline{(\nu \oplus \underline{\mathbb{R}}^k)} \ .$$

Da $M\bar{\nu}$ nach Vereinbarung Grad n hat, folgt $[q'] = (-1)^{kn}\sigma^k[q]$. An die normale Thom-Klasse ω_ν wird wie in Folgerung 7.14 von rechts die triviale Orientierungsklasse des $\mathbb{R}^k$ multipliziert, was die neue Thom-Klasse $(-1)^{k(n-\ell)}\sigma^k\omega_\nu \in E^{n+k-\ell}(S^kM\nu)$ liefert. Es folgt

$$\begin{aligned}\Theta_{n+k}([q']) &= (-1)^{(n+k-\ell)\ell}\, p_*\big((-1)^{kn}\sigma^k[q] \frown (-1)^{k(n-\ell)}\sigma^k\omega_\nu\big)\\ &= (-1)^{(n-\ell)\ell} p_*([q] \frown \omega_\nu) = \Theta_n([q]) = [M] \ .\end{aligned}$$ □

7.18. Satz (Poincaré-Dualität). *Es sei M eine glatte, kompakte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand mit einer tangentialen E-Orientierung vom Grad ℓ, und es sei $[M] \in E_\ell(M, \partial M)$ die zugehörige Fundamentalklasse. Dann gibt es einen $E^\bullet(M)$-Modulisomorphismus*

$$\wp = [M] \frown \cdot : E^\bullet(M) \xrightarrow{\cong} E_{\ell-\bullet}(M, \partial M) \ .$$

Wir nennen $\wp$ eine *Poincaré-Dualität* vom Grad ℓ. In den meisten Fällen wird $\ell = m$ sein, und wir brauchen den Grad nicht zu erwähnen.

BEWEIS. Wir betrachten eine Einbettung $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ wie oben mit zugehöriger Koauswertungsabbildung $\eta\colon S^n \to M_+ \wedge M\bar{\nu}$ und Fundamentalklasse $[M]$. Für $\alpha \in E^k(M)$ schreiben wir

$$[M] \frown \alpha = \Theta_\ell([\eta]/1) \frown \alpha = \Theta_{\ell-k}([\eta]/\alpha) \ .$$

Dabei ist $[\eta]/\cdot$ gerade der Isomorphismus Φ_{S^0,E_k} aus Bemerkung 7.4 und Lemma 7.5 zur Spanier-Whitehead-Dualität, denn wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xrightarrow{\eta} & M_+ \wedge M\bar{\nu} & \xrightarrow{\alpha\wedge\mathrm{id}} & E_k \wedge M\bar{\nu} \\ \downarrow{\scriptstyle 1\wedge\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle 1\wedge\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle 1\wedge\mathrm{id}} \uparrow{\scriptstyle \mu_{0,k}\wedge\mathrm{id}} \\ E_0 \wedge S^n & \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\eta} & E_0 \wedge M_+ \wedge M\bar{\nu} & \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge\alpha\wedge\mathrm{id}} & E_0 \wedge E_k \wedge M\bar{\nu} \ . \end{array}$$

Verkettung mit Θ_n liefert den gesuchten Isomorphismus $\wp$. Wegen der Konstruktion von Θ in (7.1) ist $\wp$ ein $E^\bullet(M)$-Modulisomorphismus. □

Streng genommen ist die obige Aussage bereits ein Spezialfall der Poincaré-Lefschetz-Dualität falls $\partial M \neq \emptyset$, diese behandelt den Fall $\partial M = A \cup B$, wobei A und B Untermannigfaltigkeiten mit gemeinsamem Rand $\partial A = \partial B = A \cap B$ seien. Dann gilt

$$[M] \frown \cdot : E^\bullet(M, A) \xrightarrow{\cong} E_{\ell-\bullet}(M, B) \ .$$

Wir wollen noch einen weiteren wichtigen Spezialfall diskutieren, nämlich $A = \partial M$ und $B = \emptyset$. Für das folgende betten wir ihn in ein kommutatives Diagramm langer exakter Sequenzen ein.

7.19. SATZ. *Es sei M eine glatte, kompakte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand mit einer tangentialen E-Orientierung vom Grad ℓ, und es sei $[M] \in E_\ell(M, \partial M)$ die zugehörige Fundamentalklasse. Dann existiert eine Orientierung auf ∂M mit zugehöriger Fundamentalklasse $[\partial M] = \partial[M] \in E_{\ell-1}(\partial M)$, so dass das folgende Diagramm bis auf das Vorzeichen kommutiert:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & E^{k-1}(\partial M) & \xrightarrow{\delta} & E^k(M, \partial M) & \longrightarrow & E^k(M) & \longrightarrow & E^k(\partial M) & \longrightarrow \cdots \\ & \cong\downarrow{\scriptstyle [\partial M]\frown} & & \cong\downarrow{\scriptstyle [M]\frown} & & \cong\downarrow{\scriptstyle [M]\frown} & & \cong\downarrow{\scriptstyle [\partial M]\frown} & \\ \cdots \longrightarrow & E_{\ell-k}(\partial M) & \longrightarrow & E_{\ell-k}(M) & \longrightarrow & E_{\ell-k}(M, \partial M) & \xrightarrow{\partial} & E_{\ell-k-1}(\partial M) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

BEWEIS. Dual zum Auschnitt

$$\partial M_+ \longrightarrow M_+ \longrightarrow M/\partial M \longrightarrow S\partial M_+$$

des Paares $(M_+, \partial M_+)$ ist die Kofasersequenz

$$SM\nu|_{\partial M} \longleftarrow M\bar{\nu} \longleftarrow M\nu \longleftarrow M\nu|_{\partial M} \ .$$

Dies zeigt man entweder allgemein wie in [**Sw**, Lemma 14.31] oder geometrisch wie im Beweis von Satz 7.7. Für den geometrischen Beweis können wir benutzen, dass $SM\nu|_{\partial M}$ gerade der Thom-Raum des Normalenbündels von $\partial M \subset S^n$ ist. Die obige Sequenz ist wiederum eine Sequenz von Thom-Räumen zum Normalenbündel von $M \subset S^n$ über der Kofasersequenz

$$S\partial M_+ \longleftarrow M/\partial M \longleftarrow M_+ \longleftarrow \partial M_+ \ .$$

Das mittlere Quadrat im obigen Diagramm kommutiert wegen der Natürlichkeit des Schräg-Produktes. Für die beiden äußeren Quadrate benutzen wir zusätzlich die Konstruktion der Verbindungshomomorphismen für die (Ko-) Homologiesequenzen von Paaren in Proposition 5.34 und

Satz 6.29. Für das rechte Quadrat betrachten wir dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E}^k(M) & \longrightarrow & \tilde{E}_{n-k}(M\bar{\nu}) & \xrightarrow{\Theta_\nu} & \tilde{E}_{\ell-k}(M/\partial M) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota^*} & & \downarrow{\scriptstyle D\iota_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ \tilde{E}^k(\partial M) & \longrightarrow & \tilde{E}_{n-k}(M\nu_{\partial M}) & \xrightarrow{\Theta_\nu} & \tilde{E}_{\ell-k}(S\partial M_+) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \overset{\partial}{\searrow} & \\ \underset{\cong}{\overset{\sigma}{\longleftarrow}} & & \tilde{E}_{\ell-1-k}(\partial M_+) \end{array} . \qquad \square$$

In den folgenen Überlegungen dürfen wir $\mathbb{Z}$ durch einen beliebigen Hauptidealring R ersetzen. Es sei A ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Aus den Übungen 5.90–5.92 schließen wir, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow 0$$

gibt, in der $A/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} A$ ein freier Modul ist. Mit dem universellen Koeffiziententheorem 6.16 erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$H^k(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^k(M) \xrightarrow[\cong]{\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle} \hom_{\mathbb{Z}}\big(H_k(M),\mathbb{Z}\big) \xrightarrow[\cong]{\wp^*} \hom_{\mathbb{Z}}\big(H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M),\mathbb{Z}\big) \tag{7.2}$$

$$[\alpha] \longmapsto \langle\,\cdot\,,\alpha\rangle \longmapsto \langle [M] \frown \cdot\,,\alpha\rangle = \langle [M],\,\cdot \smile \alpha\rangle\ .$$

Im mittleren Schritt haben wir ausgenutzt, dass jeder Homomorphismus nach $\mathbb{Z}$ auf dem Torsionsuntermodul verschwindet. Dabei heißt „natürlich“ hier allerdings nur, dass die Isomorphismen verträglich sind mit Abbildungen $f\colon M \to N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension vom Abbildungsgrad 1, das heißt, mit $f_*[M] = [N]$.

7.20. Folgerung. *[aus Satz 7.18] Es sei M eine glatte, geschlossene, orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Wenn eine Klasse $\alpha \in H^k(M) \setminus \{0\}$* primitiv *ist in dem Sinne, dass es keine Klasse γ und kein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$ mit $\alpha = n\gamma$ gibt, dann existiert eine Klasse $\beta \in H^{m-k}(M)$, so dass $\alpha \smile \beta$ ein Erzeuger von $H^m(M) \cong \mathbb{Z}$ ist.*

Beweis. Als erstes überlegt man sich, dass Torsionsklassen nie primitiv sind, denn aus $n\alpha = 0$ folgt $(n+1)\alpha = \alpha$. Wenn α primitiv ist, dann kann man α zu einer Basis von $H^k(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(M)$ ergänzen. Aufgrund der obigen Isomorphismen gibt es ein Element β in der dazu dualen Basis von $H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M)$, so dass $\langle [M], \beta \smile \alpha\rangle = 1$. Aufgrund von Poincaré-Dualität ist $\beta \smile \alpha = \pm\alpha \smile \beta$ dann ein Erzeuger des $\mathbb{Z}$-Moduls $H^m(M)$. $\square$

7.21. Bemerkung. Es sei $\Bbbk$ ein Körper. Wir erinnern uns an die Definition der Betti-Zahlen und der Eulerzahl aus Definition 5.30, betrachten hier allerdings *unreduzierte* Betti-Zahlen $b_k(M;\Bbbk) = \dim H_k(M;\Bbbk)$.

(1) Nach dem universellen Koeffiziententheorem 6.16 gilt

$$b_k(M;\Bbbk) = \dim H_k(M;\Bbbk) = \dim H^k(M;\Bbbk)\ .$$

Wenn M orientiert ist, ist wegen Folgerung 7.20 die Paarung $H^k(M;\Bbbk) \times H^{m-k}(M;\Bbbk) \to \Bbbk$ mit $(\alpha,\beta) \mapsto \langle [M], \alpha \smile \beta\rangle$ nicht ausgeartet. Folglich gilt

$$b_k(M;\Bbbk) = b_{m-k}(M;\Bbbk)\ .$$

(2) Wenn M außerdem zusammenhängend ist, gilt $\tilde{H}_k(M;\Bbbk) = 0$ für alle $k \le 0$ nach Proposition 5.45. Wegen Bemerkung 5.5 (3) folgt $H_k(M) \cong 0$ für $k < 0$ und $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} &b_k(M;\Bbbk) = 0 \qquad \text{für alle } k < 0 \text{ und alle } k > m, \text{ und} \\ &b_0(M;\Bbbk) = b_m(M;\Bbbk) = 1\ . \end{aligned}$$

Wir dürfen $\langle [M], \cdot \smile \cdot \rangle$ auf $H^k(M) \times H^{m-k}(M)$ betrachten. Wegen Proposition **??** (**??**) gilt

$$\langle [M], \beta \smile \alpha \rangle = (-1)^{k(m-k)} \langle [M], \alpha \smile \beta \rangle$$

für $\alpha \in H^k(M;R)$ und $\beta \in H^{m-k}(M;R)$. Das Produkt verschwindet, wenn einer der beiden Faktoren ein Torsionselement ist. Auch dieses Produkt lässt sich für geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten definieren, die nicht glatt sein müssen.

7.22. Definition. Es sei M eine orientierte, geschlossene, glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit, und R ein Hauptidealring oder ein Körper, dann heißt

$$\langle [M], \cdot \smile \cdot \rangle \colon H^k(M)/\operatorname{Tor}_R H^k(M) \times H^{m-k}(M)/\operatorname{Tor}_R H^{m-k}(M) \to R$$

das *Schnittprodukt* auf $H^\bullet(M;R)/\operatorname{Tor}_R H^\bullet(M;R)$.

Es sei $m = \dim M = 2n$ gerade, dann ist die *Schnittform* Q_R von M gerade die Einschränkung des Schnittproduktes auf $H^n(M;R)/\operatorname{Tor}_R H^n(M;R)$. Wenn $4|m$ gilt, seien $b_n^\pm(M) = b_n^\pm(M;\mathbb{R})$ die maximalen Dimensionen von Unterräumen von $H^n(M;\mathbb{R})$, auf denen $Q_\mathbb{R}$ positiv beziehungsweise negativ definit ist. Dann heißt $\sigma(M) = b_n^+(M) - b_n^-(M)$ die *Signatur* von M.

Man beachte, dass $Q_\mathbb{R}$ nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz durch $\sigma(M)$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist.

7.23. Bemerkung. Es sei M eine orientierbare, geschlossene, glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m.

(1) Wenn m ungerade ist, verschwindet die Eulerzahl, denn

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k b_k(M;\Bbbk) = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} \left((-1)^k + (-1)^{m-k}\right) b_k(M;\Bbbk) = 0 \,.$$

In Bemerkung **??** sehen wir, dass M dafür noch nicht einmal orientierbar sein muss.

(2) Wenn $m = 2n$ und n gerade ist, haben $\chi(M)$, $\sigma(M)$ und $b_n(M;\mathbb{R})$ die gleiche Parität, denn

$$\chi(M) - b_n(M;\mathbb{R}) = 2\sum_{k=0}^{n-1} b_k(M;\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad b_n(M;\mathbb{R}) - \sigma(M) = 2b_n^-(M) \,.$$

(3) Wenn $m = 2n$ und n ungerade ist, ist $b_n(M;\mathbb{R})$ gerade, denn nur auf gerade-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen gibt es nicht-ausgeartete antisymmetrische Bilinearformen.

Die *zusammenhängende Summe* $M = M_1 \# M_2$ zweier m-dimensionaler glatter Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 wird konstruiert, indem man aus jeder Mannigfaltigkeit eine zu $D^m \subset \mathbb{R}^m$ diffeomorphe Teilmenge wählt, ihr Inneres B^m entfernt, und beide Mannigfaltigkeiten entlang der entstandenen Ränder S^{m-1} mit einer Isometrie verklebt. Das Resultat ist wieder eine glatte Mannigfaltigkeit. Wenn M_1 und M_2 zusammenhängend sind, hängt das Resultat bis auf Diffeomorphie nicht von der Wahl der Teilmenge D^m ab, jedoch unter Umständen davon, welche der beiden Homotopieklasse von Isometrien $S^{m-1} \to S^{m-1}$ man wählt. Deshalb fixiert man Orientierungen von M_1 und M_2 und verklebt so, dass M eine Orientierung trägt, die sich zu der gegebenen Orientierung auf $M_i \setminus D^m$ einschränkt.

7.24. Folgerung (aus Satz 7.19). *Die Signatur ist invariant unter orientierten Bordismen. Insbesondere verschwindet die Signatur für nullbordante Mannigfaltigkeiten und ist additiv unter zusammenhängenden Summen.*

BEWEIS. Es sei $m = \dim M = 2n$, und n sei gerade. Außerdem sei $M = \partial W$, und W sei so orientiert, dass M die Randorientierung trägt. Wir arbeiten der Einfachheit halber über $\mathbb{Q}$ und betrachten einen Ausschnitt

$$\begin{array}{ccccc} H^n(W;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\iota^*} & H^n(M;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(W,M;\mathbb{Q}) \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ H^{n+1}(W,M;\mathbb{Q})^* & \xrightarrow{\delta^*} & H^n(M;\mathbb{Q})^* & \xrightarrow{(\iota^*)^*} & H^n(W;\mathbb{Q})^* \end{array}$$

aus dem Diagramm aus Satz 7.19, wobei die senkrechten Pfeile jeweils Einsetzen in die Schnittform bezeichnen. Es folgt, dass die Schnittform einen Isomorphismus

$$\operatorname{im}(\iota^*) \xrightarrow{\cong} \big(H^n(M;\mathbb{Q})/\operatorname{im}(\iota^*)\big)^*$$

induziert. Wir können eine Basis von $\operatorname{im}(\iota^*)$ so zu einer Basis von $H^*(M;\mathbb{Q})$ ergänzen, dass die Schnittform durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei $A\colon \operatorname{im}(\iota^*) \to H^n(M;\mathbb{Q})$ ein Isomorphismus auf sein Bild ist. Hieraus folgt $\operatorname{sign}(M) = 0$ für alle orientiert nullbordanten glatten Mannigfaltigkeiten.

Sei M_0 zu M_1 orientiert bordant, dann ist $M_1 \sqcup (-M_0)$ nullbordant, wobei $-M_0$ die Mannigfaltigkeit M_0 mit der entgegengesetzten Orientierung bezeichne. Da die Signatur unter disjunkter Vereinigung offensichtlich additiv ist, folgt

$$\operatorname{sign}(M_1) = \operatorname{sign}\big(M_1 \sqcup (-M_0)\big) + \operatorname{sign}(M_0) = \operatorname{sign}(M_0)\ .$$

Außerdem ist $M_1 \# M_2$ zu $M_1 \sqcup M_2$ orientiert bordant, so dass $\operatorname{sign}(M_1 \# M_2) = \operatorname{sign}(M_1) + \operatorname{sign}(M_2)$. □

7.25. BEISPIEL. Es sei $\mathbb{C}P^2$ die komplex projektive Ebene mit einer festen Orientierung, so dass $\mathbb{C}P^2$ Signatur 1 hat. Mit $\overline{\mathbb{C}P}^2$ bezeichnen wir die entgegengesetzt orientierte projektive Ebene. Es gibt keinen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus zwischen ihnen, da $\overline{\mathbb{C}P}^2$ Signatur -1 hat.

Wir betrachten $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ und $M' = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$. Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz 6.3 überprüft man, dass

$$H^k(M) \cong H^k(M') \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 4, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{falls } k = 2, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dennoch sind M und M' nicht diffeomorph, denn M hat eine definite und M' eine indefinite Schnittform (Übung).

Es gibt auch ein Analogon zu (7.2) für Torsions-Elemente. Dazu sei A ein $\mathbb{Z}$-Modul und $\alpha \in \operatorname{Ext}(A,\mathbb{Z})$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ und stellen M mit Satz **??** als endlichen CW-Komplex dar. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^k(M;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^k(M;\mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+1}(M;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^{k+1}(M;\mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^{k+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

von Kokettenkomplexen. Es sei jetzt $\beta \in C^{k+1}(M;\mathbb{Z})$ geschlossen mit $[\beta] \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M;\mathbb{Z})$, und es sei $n > 0$ minimal mit $n[\beta] = 0$. Dann existiert $\gamma \in C^k(M;\mathbb{Z})$ mit $\delta\gamma = n\beta$, und wir betrachten

das Bild $\bar\beta$ von $\frac{\gamma}{n}$ in $C^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Es gilt $\delta\bar\beta = 0 \in C^{k+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Somit repräsentiert $[\bar\beta] \in H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein Urbild von $[\beta]$ unter δ in der Kohomologie-Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^k(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H^{k+1}(M;\mathbb{Q})}_{\cong \hom_{\mathbb{Z}}(H_{k+1}(M),\mathbb{Q})} \longrightarrow \cdots .$$

Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ divisibel sind, gilt nach Proposition **??** und dem universellen Koeffiziententheorem 6.16, dass

$$H^k(M;\mathbb{Q}) \cong \hom_{\mathbb{Z}}(H_k(M),\mathbb{Q}) \qquad \text{und} \qquad H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \hom_{\mathbb{Z}}(H_k(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

Nun ist $\bar\beta$ nur bis auf ein Element von $\hom_{\mathbb{Z}}(H_k(M),\mathbb{Q})$ bestimmt, aber diese Abbildungen verschwinden auf $\operatorname{Tor}_Z H_k(M)$. Zusammen mit Poincaré-Dualität 7.18 erhalten wir ein wohldefiniertes Produkt

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad \text{mit} \qquad (\alpha,\beta) = \langle [M] \frown \alpha, \bar\beta\rangle . \tag{7.3}$$

7.26. Definition. Es sei M eine glatte, geschlossene, orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt das obige Produkt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \times \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ das *Verschlingungsprodukt* auf $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^\bullet(M)$. Falls $\dim M = 2n-1$ ungerade ist, ist die *Verschlingungsform* q von M die Einschränkung des Verschlingungsproduktes auf $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^n(M)$.

7.27. Proposition. *Es sei M eine glatte, geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit. Das Verschlingungsprodukt ist nicht ausgeartet, das heißt, zu jedem $\alpha \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M) \setminus \{0\}$ existiert ein $\beta \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M)$ mit $(\alpha,\beta) \neq 0$. Seien p, $q > 0$ minimal mit $p\alpha = q\beta = 0$, dann gilt $(\alpha,\beta) \in \big(\frac{1}{\operatorname{ggT}(p,q)}\mathbb{Z}\big)/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Für $\alpha \in H^{k+1}(M)$ und $\beta \in H^{m-k}(M)$ gilt*

$$(\beta,\alpha) = -(-1)^{km}(\alpha,\beta) .$$

Insbesondere ist die Verschlingungsform symmetrisch, wenn $m \equiv 3 \bmod 4$, und antisymmetrisch, wenn $m \equiv 1 \bmod 4$. Anstelle des „unnatürlichen“ Isomorphismus zwischen $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{m-k}(M) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$ und $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H^{k+1}(M)$ liefert das Verschlingungsprodukt eine nicht ausgeartete Paarung, ähnlich wie es das Schnittprodukt für die freien Anteile tut.

Beweis. Als erstes überlegt man sich, dass es eine wohldefinierte Abbildung

$$H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\operatorname{im} H^k(M;\mathbb{Q}) \cong \hom_{\mathbb{Z}}\big(H_k(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) \,/\, \operatorname{im}\hom_{\mathbb{Z}}\big(H_k(M),\mathbb{Q}\big) \longrightarrow \hom_{\mathbb{Z}}\big(\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$$

gibt, da $\mathbb{Q}$-wertige Abbildungen auf Torsionselementen verschwinden. Dann überprüft man, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist. Da $0 \neq \bar\alpha \in H^k(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\operatorname{im} H^k(M;\mathbb{Q})$, existiert also ein $b \in \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_k(M)$ mit $\langle b,\bar\alpha\rangle \neq 0$, und wir wählen $\beta = \wp^{-1}b$.

Es seien $\alpha \in C^{k+1}(M;\mathbb{Z})$, $\beta \in C^{m-k}(M;\mathbb{Z})$ und p, q wie oben gegeben. Wir betrachten $\bar\alpha \in C^k(M;\mathbb{Q})$ und $\bar\beta \in C^{m-k-1}(M;\mathbb{Z})$, so dass $p\bar\alpha$ und $q\bar\beta$ ganzzahlig sind mit $\delta(p\bar\alpha) = p\alpha$ und $\delta(q\bar\beta) = q\beta$. Dann gilt

$$0 = \langle [M], \delta(\bar\alpha \smile \bar\beta)\rangle = \langle [M], \alpha \smile \bar\beta\rangle + (-1)^k\langle [M], \bar\alpha \smile \beta\rangle = (\alpha,\beta) + (-1)^{k(m-k-1)}(\beta,\alpha) ,$$

außerdem ist $(-1)^{k(k+1)} = 1$.

Um die letzte Behauptung zu zeigen, schreiben wir $\operatorname{ggT}(p,q) = ap + bq$ mit a, $b \in \mathbb{Z}$ und berechnen

$$\operatorname{ggT}(p,q)\cdot(\alpha,\beta) = a(p\alpha,\beta) + b(\alpha,q\beta) = 0 . \qquad \square$$

7.28. Bemerkung. Wir können außerdem den Satz 5.47 von Hurewicz benutzen, um die erste nichtverschwindende reduzierte Homologiegruppe zu bestimmen. Sei etwa M eine geschlossene, orientierbare, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Dann gilt $H_1(M) \cong \pi_1(M)^{\mathrm{ab}} \cong H^2(M)$, und $H^1(M) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) \cong H_2(M)$ sind isomorph zum freien Anteil $H_1(M)/\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}} H_1(M)$. Also werden alle (Ko-) Homologiegruppen bis auf Isomorphie von $\pi_1(M)$ festgelegt. Ein gutes Beispiel ist $\mathbb{R}P^3$ mit $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}/2$, siehe Übung **??** und Beispiel 5.21.

Literatur

[Ad] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[At] M. F. Atiyah, K-Theory, W. A. Benjamin, New York, 1967.

[BR] D. Barnes, C. Roitzheim, Foundations of Stable Homotopy Theory, Cambridge University Press, 2020, vi+423S.

[tD1] T. tom Dieck, Topologie, de Gruyter Lehrbuch, de Gruyter, Berlin, 1991, x+401S.

[tD2] ———, Algebraic Topology, EMS textbooks in Mathematics, EMS, Zürich, 2008, xii+567S.

[D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topologogy, Springer, Berlin, 1972, xi+377S.

[DP] A. Dold, D. Puppe, Duality, Trace and Transfer, Proc. Stekhlov Inst. Math. 154, 1984, 85–103.

[En] R. Engelking, General Topology, PWN, Warsawa, 1977, 626S.

[ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.

[F] P. Freyd, Abelian Categories, Harper & Row, New York, 1964, xi+164S.

[H1] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544S., `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[H2] A. Hatcher, Vector bundles and K-theory, preprint, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`

[Ho] M. Hovey, Model Categories, Math. Surv. and Monogr. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1999, xii+209S.

[J] K. Jänich, Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980, ix+215S.

[M] P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago IL, 1999, x+243S., `http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`

[Mi] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA. 1965, ix+65S.

[Que] B. v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1973, ix+195S.

[Qui] D. G. Quillen, Homotopical Algebra, Lect. Notes Math. 43, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1967, 160S.

[R] Y. B. Rudyak: On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xii+587S.

[S] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Corrected reprint, Springer, Berlin, 1981, xvi+528S.

[SS] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Second edition, Springer, New York - Heidelberg, 1978, xi+244S.

[St] N. Strickland, The category of CGWH spaces, preprint, 2009, `neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/homotopy/cgwh.pdf`

[Sw] R. W. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.

Stichwortverzeichnis

Abbildung
  abgeschlossene, 50
  adjungierte, 37
  Alexander-Whitney, 219
  charakteristische, *41*, 44, 157
  Diagonal-, 244
    relative, 246
  eigentliche, *24*, 177
  Exponential-, 53, 60, 61, 63
  Höldersche, 7, 44
  homotope, *53*
  induzierte
    Homologie, *194*
    Kohomologie, *237*
    Unterraum, 18
  injektive, 18, 31
  Inklusions-, 37
  Ketten-, *194*
  klassifizierende, *258*
  Koketten-, *237*
  konstante, 6
  Lipschitz-, 1, 44
  natürliche, *89*
  Null-, 95, 153
  Prinzipalbündel-, *252*
  Projektions-, 72, 73
  punktierte, *54*, 87
  Rand-, *siehe* Homomorphismus, Verbindungs-
  Sequenz-, *94*
  Stabilisierungs-, *204*
  stetige, *6*, 7, 22, 35, 45, 48
  Struktur-, *204*
  surjektive, 31, 50
  Transpositions-, 243, 278
  transversale, 269
  Vektorbundel-, *253*
  Verklebe-, *41*, 157
  von Paaren, *54*
  von Spektren, *204*
  zelluläre, *159*, 195
Abbildungsgrad, *109*, 126, 189
Abelisierung, 68, 83, 85, 211
abgeschlossen, 4, *5*, 8, 9, 13, 22, 23, 34
  folgen-, 13
Abschluss, *5*, 43
Adjunktion, *141*, 142–148, 151–153, 285
Äquivalenz
  Homotopie-
    schwache, *160*
  schwache, *166*
  von Kategorien, *77*, 78
Äquivalenzrelation, 31, 50, 84
  erzeugte, 32, 50
Algebra, 245
  Kohomologie-, 245
Analysis, 3, 23
Approximation
  CW-, *161*
  zelluläre, **159**
Assoziativität, 6
Augmentierung, 200
Ausschöpfung
  kompakte, 39
Ausschneidung, 288
  Homotopie, 103
Axiom
  Abzählbarkeits-, *siehe* Eigenschaft, Abzählbarkeits-, 147
  Auswahl-, 25–27, 31, 151
  Dimensions-, 185, 232
  Eilenberg-Steenrod, 185
    Kohomologie, 231
  Funktor, *58*
  Kategorie, *6*
    abgeschlossene monoidale, *151*
    kartesisch abgeschlossene, *151*
    Modell-, *166*
    monoidale, *150*
  Summen-, 185, 232
  Trennungs-, *siehe* Eigenschaft, Trennungs-

Bahn, *72*, 78
Ball, 4, 12
  Einheits-, 40
  ε-, *3*
Basis, *12*, 20, 50
  abzählbare, 12, 31, 39, 40, 110
  Faserbündel, *100*

Umgebungs-, *13*, 76
Basispunkt, *54*, 57, 59, 66, 71
nicht entarteter, *112*
Baum
maximaler, 80
Bedingung
Mittag-Leffler-, 236
beschränkt, 22, 23
Bifunktor, 178
Bings Haus, 55
Bordismus
$\mathbb{B}$-, *269*
gerahmter, *123*, 124–130, 187
Null-, *269*
Borromäische Ringe, 85
Bouquet, *114*
Bündel
assoziiertes, *253*
Ball-, 271
duales, *260*
Faser-, *100*
Hauptfaser-, *siehe* Bündel, Prinzipal-
Normalen-, 123
relatives, 271
stabiles, *267*
Prinzipal-, *252*
universelles, *258*
Sphären-, 271
Tangential-, 254
triviales, 101
Vektor-, *253*
orientierbares, *290*
orientiertes, *290*
stabil triviales, 261
triviales, 254
Whitney-Produkt, *260*
Whitney-Summe, *260*
zurückgezogenes, 252

Charakteristik
Euler-, *201*
Körper, 201

Decktransformation, *74*, 75–78
Diagramm, *142*
kommutatives, 30, 58
Dimension, *39*, 110
Divisionsalgebra, 2
Dreiecksungleichung, 3
dual, 30, 32
Dualisieren, 237
Dualität
Eckmann-Hilton-, 111, 166, 173
Lefschetz-, **294**
Poincaré, 275
Poincaré-, **294**
Spanier-Whitehead-, *286*, **287**
starke, *285*

Eigenschaft
Abzählbarkeits-, *12*, 22, 30–32, 42, 46, 47
charakteristische
Produkt, 19, 28
Quotient, 31, 93, 149
Summe, 30
Unterraum, 18, 55, 149
Homotopieausdehnungs-, *111*
Homotopieliftung-, *97*, 111
Trennungs-, *8*, 30–32, 45, 46
universelle, 20, 276
interner hom-Funktor, 38, 152
Kolimes, 34, 119, 144
Koprodukt, 65, 86, 115
Limes, 144
Produkt, 19, 86
Pullback, 144
Pushout, 33, 69, 86, 144
Stone-Čech-Kompaktifizierung, 27
Tensorprodukt, 38, 152
universelle Überlagerung, 77
eigentlich, *24*, 128
Einbettung, *18*, 47
Einhängung
reduzierte, *116*
Einheit
Adjunktion, *141*, 152, 285
Einheitswürfel, 88
Element
universelles, 276
Erzeuger
Kategorie, 184
Exponentialgesetz, **38**, 142, 154
abstraktes, **153**

Faser, *97*, 114, 184
Homotopie-, *173*
typische, *100*
Faserung, 166
azyklische, 166
Hopf-, 52, 101, 107, 108
quaternionische, 102, 108
Hurewicz-, *97*, 174
Pfad-, *173*
Serre-, *97*
triviale, 166
fein, *7*, 29, 31
Filter, *15*
Bild, *16*
freier, *15*
Ultra-, *25*
Umgebungs-, 15
Fixpunkt, 1, 62
Fläche, 83
nicht orientierbare, 83
orientierbare, 83
Flasche

Kleinsche, 83
Folge, 9, 15, 22, 44, 52
Form
Schnitt-, *297*
Fundamentalgruppe, *56*, 66–71, 75–78, 84, 88
des Komplements, 69, 70
Funktion
Morse-, 132
stetige, 8, 9
Funktor, 28, *58*, 77, 84, 86, 185, 231
adjungierter, *141*, 142–148, 151–153
Bi-, 178
darstellbarer, 248, *275*
derivierter
links-, 217
rechts-, 217, 235
total, 217
Diagonal-, 142
essentiell surjektiver, *77*
exakter
links-, 217, 234
rechts-, 217
graduierter, 194
interner hom-, 151–155
kontravarianter, 78
kostetiger, *145*
kovarianter, *58*
stetiger, *145*
treuer, 184
vergesslicher, 142, 153
volltreuer, *77*

Galois-Theorie, 78
Geist, 235
Gerüst, *41*, 157
Gerade
lange, 39
Geschlecht, 83
Grad
Spanier-Whitehead-Dualität, *286*
Grenzwert, 8, 9, 13, 15, 23, 44
Filter, *16*
grob, *7*, 13, 17, 19, 31
Gruppe, 7, 56, 72, 84, 86
abelsche, 84, 85
Decktransformations-, 74–78
freie, 70, 86
Galois-, 78
perfekte, 212
Präsentation, 80
Struktur-, *253*
topologische, *251*
unendliche Dieder-, 65
Unter-, 65, 66, 75, 78

Häufungspunkt, *15*
Filter, *16*
Hom, *6*
hom
kursiv, 151
Homöomorphismus, *6*, 49, 54, 69, 72, 77
Homologie
ganzzahlige, 212
K-, 264
Kettenkomplex, *193*
reduzierte
allgemeine, *184*
gewöhnliche, *185*
relative, 187
singuläre, 200
unreduzierte
allgemeine, 186
zelluläre
reduzierte, *195*
unreduzierte, 200
zu einem Spektrum, *205*
Homologieklasse, *193*
Homomorphismus
Gruppen-, 72, 84
Hurewicz-, 211
J-, 133
Verbindungs-, 95, 98, 185, 199
homotop
ketten-, *197*
links-, *167*
rechts-, *168*
Homotopie, *53*, 55, 60
Ketten-, *197*
kompakt getragen, *269*
Links-, *167*
punktierte, 87
Rechts-, *168*
relative, *54*, 55, 56, 71, 84
Homotopieäquivalenz, *54*, 55, 59, 84, 160
Homotopiegruppe, *88*
eines Spektrums, *205*
stabile, *120*, 186
Homotopieinvarianz, 185, 231
Homotopieklasse, 54, 55
freie, *53*, 92
Huhn
topologisches, 164

Identität, 6, 44
in Kategorie, 6, 54
Inklusion, 17, 29
Inneres, *5*
Intervall, 34
Inverses, 54
Homotopie-, *54*
Inzidenzzahlen, 195
Isomorphismus, 54, 57, 59
Hurewicz-, 211
Prinzipalbündel-, *252*
Stabilisierungs-, 202

Thom-, **291**
Vektorbündel-, *253*

Karte
Faserbündel, *100*
Kategorie, *6*, 20, 27, 33, 54, 58, 65, 69, 77, 84, 86, 115
abelsche, 184
abgeschlossene, 151
bivollständige, *143*
derivierte, 198
Grothendieck-, 183, 184
Homotopie-, 54, 168, 185
stabile, 120
kartesisch abgeschlossene, *151*, 153
kovollständige, *143*
Modell-, *166*, 167–170
monoidale, *150*
abgeschlossene, *151*
streng, 151
punktierte, 153, 183
Spanier-Whitehead-, 120
symmetrisch monoidale, 151
vollständige, *143*
Kegel
reduzierter, *116*
Kern, 94, 184
Kette, *193*
Klasse, 6
charakteristische, 260, 277
Chern, 277
Connor-Floyd, 277
Chern-, 284
echte, 6
Fundamental-, 275
primitive, 296
Stiefel-Whitney-, 284
Thom-, *290*
Knoten, 70
Kobordismus
gerahmter, 130
Koeffizienten, 185, 232
universelle
Homologie, **216**, 223
Kohomologie, **238**, 296
Koeinheit
Adjunktion, *141*, 152, 285
Körper, 7
Schief-, 52
Kofaser, 114, 184
Homotopie-, *siehe* Quotient, Homotopie
Kofaserung, *111*, 157, 166
azyklische, 166
Hurewicz-, *111*
triviale, 166
Kohomologie
darstellbare, *248*
Kokettenkomplex, *237*
multiplikative, *278*
reduzierte, *232*
allgemeine, *231*
gewöhnliche, *232*
relative, 232
unreduzierte, 232
zelluläre, 237
Kokern, 184
Kokette, *237*
Kolimes, 33, 119, *143*, 144–146
endlicher, *143*
Homotopie-, 191
kommutativ
graduiert, 244, 280
Kommutator, 83
kompakt, *22*, 23, 32, 43, 48, 61, 66, 67, 86
abzählbar, *22*, 23
folgen-, *22*, 23
lokal, 24, 36, 38, 55
quasi-, *22*, 32
kompakt erzeugt, 177–178
Kompaktifizierung, *24*
Alexandroff-, 24, 27, 271
Ein-Punkt-, *siehe* Alexandroff-
Stone-Čech-, 27
Komplex
CW-, *41*, 42–44, 79–83, 147
endlicher, 43
punktierter, *157*
Ketten-, *193*
augmentierter, 200
Unter, 198
zellulärer, *195*
Koketten-, *237*
zellulärer, 237
singulärer, 200
Unter-, 43
Konvergenz, 39, 44
Filter, *16*
gleichmäßige, 38, 51
lokal, 38
kompakte, 38, 51
punktweise, 20, 36, 48
Koprodukt, *30*, 33, 49, 65, 86, 115, 145, 151
Korand
Kettenkomplex, *237*
Kozykel, *237*
gerahmter, 130
Kragen, 123
Kreis, 68–70
polnischer, 164, 249
kürzen, 64

Länge
Cup-, *281*
Lemma
Fünfer-, **96**

Homotopie-, **256**
Schlangen-, **198**
Urysohn, **9**
Vierer-, **96**
Yoneda
fett, 276
Zorn, *siehe* Axiom, Auswahl-
Lift, 60–63, 71–77, 97
Limes, *142*, 144–146
abgeleiteter, *234*
endlicher, *142*
Lokalisierung, 168

Mannigfaltigkeit, *39*, 52, 79, 83, 147
differenzierbare, 254
geschlossene, 266
glatte
$\mathbb{B}$-, *268*
Grassmann-, 260
komplexe, 255
mit Rand, *110*
Maximum, 22
Menge, 6, 7, 33
Potenz-, 3, 4
punktierte, 89
Metrik
französische Eisenbahn-, 44
Halb-, *47*
p-adische, 44
Riemannsche, 255
metrisierbar, *5*, 11, 21, 40, 42
Modellstruktur, *166*
Cole-, 167
gemischte, *siehe* Modellstruktur, Cole-
Hurewicz-, *siehe* Modellstruktur, Strøm-
naive, *siehe* Modellstruktur, Strøm-
Quillen-, 167
Serre-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
stabile, 250
Standard-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
Strøm-, 167
Morphismus, *6*, 54, 58, 86
invertierbarer, *siehe* Isomorphismus
Null-, 153

Netz, 15
Norm, 52
normal, *8*, 21, 22, 40, 42, 48, 50
Normalteiler, 65, 74–76
erzeugter, 66, 80, 82
Nullbordismus
gerahmter, 124

Objekt, *6*, 58
darstellendes, *276*
duales
stark, *285*
Einheits-, *150*
fibrantes, *167*
initiales, 27, 89, 144, 151, 167
kofibrantes, *167*
Null-, 89, 153
Quotienten-, 184
konormales, 184
reflexives, 285
terminales, 27, 89, 144, 151, 167
Unter-, 184
normales, 184
offen, 4, *5*, 34
Operation, *siehe* Wirkung
Ordnung, 14
lexikographische, 39
Wohl-, 14
Orientierung, *290*
relative, 275
Standard-, 293

Paar, *54*, 192
CW-, *157*
punktiertes, 92
Paarung
Kronecker-, 130, 238
parakompakt, 256
Partition
der Eins, *256*
Periodizitat
Bott-, 134
Polynom, 45, 85
Präsentation, 80, 83
Problem
Isomorphie-, 80
Wort-, 80
Produkt, 65, 86, 100, 145, 149, 151
äußeres, 242, 274, 278
amalgamiertes, 68
Cap-, *244*, 280
relatives, 246
Cup-, 130, *244*, 280
relatives, 246
direktes, 49, 84
freies, *65*
in einer Kategorie, 20
inneres, *244*, 280
relatives, 246
Kreuz-
Kohomologie, 244
Kronecker-, 238
reduziertes, *115*, 150
Schnitt-, *297*
Schräg-, 242, 275
Slant-, 242, 275
Smash-, *siehe* Produkt, reduziertes
Kohomologie, 242, 274
Tensor-, *150*
topologisches, 18, 26, 49–51, 84

Verschlingungs-, *299*
Wedge-, *siehe* Bouquet
Whitney-, *260*
Projektion
stereographische, 39, 69
Pullback, 144
Punkt
innerer, 111
Rand-, 111
Pushout, 33, 69, 86, 114, 116, 144, 150

Quaternionen, 131
Quotient, 147
Homotopie-, *116*
Kettenkomplex, 198
nach Äquivalenzrelation, 31, 32
nach Gruppenwirkung, 53, *72*, 74–78
punktierter Räume, 87, 115

Rand, *5*
geometrischer, 88, 104, *110*
Kettenkomplex, *193*
Randoperator
zellulärer, 194–199
Rang
lokaler, *260*
Vektorbündel, *253*
Raum
Eilenberg-Mac Lane-, *206*
einpunktiger, 54
Hausdorff-, *8*, 9, 22, 39, 43, 44, 46, 48, 74, 86, 110
schwach, *147*, 176–178
klassifizierender, *258*
kompakt erzeugter, *147*
kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-, *147*, 177–178
metrischer, *3*, 8, 12, 23, 38, 44, 45, 147
Moore-, *213*
Pfad-, 168
projektiver
komplex, 101, 196
quaternionisch, 102, 196
reell, 196
punktierter, *54*, 87, 114
gut, *112*
Schleifen-, *92*
simplizialer, 258
Thom-, *271*
relativer, 289
topologischer, *5*, 7
Tychonoff-, *8*
Vektor-, 7, 49, 52
dualer, 49
normierter, 1, 3, 44, 52
orientierter, 290
reduzieren, *siehe* kürzen
regulär, *8*, 40
vollständig, *8*

Retrakt, *55*, 62, 112
Abbildung, 136
Deformations-, *55*, 68–70, 160
starker, *55*
Umgebungs-, 112, 157
Morphismus, 136
Umgebungs-, *287*
Retraktion, *siehe* Retrakt
Ring
Kohomologie-, 245
Ringe
Borromäische, 69

Satz
Alexandroff-Kompaktifizierung, **24**
Approximation
CW-, **162**
zelluläre, **159**
Ausschneidungs-
Homotopie, **103**, 114
stabile Homotopiegruppen, 121
Barratt-Puppe-Sequenz, **171**
Blakers-Massey, **103**, 114
Borsuk-Ulam, **63**, 85
Bott-Periodizität, **263**
Brouwer, **110**
Brouwer-Hopf, **107**
Brownscher Darstellungs-, 206, 248
Dualität
Lefschetz-, **294**
Poincaré-, **294**
Spanier-Whitehead-, **287**
Eilenberg-Zilber, 219
Ein-Punkt-Kompaktifizierung, *siehe* Alexandroff-Kompaktifizierung
Eulerscher Polyeder-, 201
Exponentialgesetz, **38**, 154
abstraktes, **153**
Fixpunkt-
Banach, 1
Brouwer, 1, **62**, **108**
Freudenthal, **118**, 120, 189
Fundamental-
Modellkategorien, 169
Fundamental- der Algebra, 85
Gabriel-Popescu, 183
Hadamard-Cartan, 207
Heine-Borel, 22, 23
Hilbert Basis-, 45
Homomorphie-, 184
Homotopiesequenz
Paar, **95**
Serre-Faserung, **98**
stabile, **121**
Hurewicz, **211**
Igel, **109**
Invarianz der Dimension, **110**

Künneth-Formel
algebraische, **220**
kohomologische, **241**
topologische, **218**
Kervaire-Milnor, 2
Klassifikations-
Prinzipalbündel, 259
Vektorbündel, 260
Lebesgue, 66, 67
Lebesgue-Zahl, 23
Liftungs-, **71**, 74, 99
Homotopie-, **60**, 71
Mayer-Vietoris, **187**, 232
Metrisations-
Urysohn, 13, 40
Milnor, 166
Pontryagin
$\pi_1^s(S^0)$, 131
Pontryagin-Thom, **271**
gerahmter Bordismus, **125**, 128
Quillen, 169
Röhrenumgebung, 271
Seifert-van Kampen, **66**, 68, 69
Serre, 133
Stone-Čech-Kompaktifizierung, **27**
Thom-Isomorphismus, **291**
Tietze, **10**, 42
Transversalitats-, 269
Tychonoff, **26**, 28
universelle Koeffizienten
Homologie, **216**, 223
Kohomologie, **238**, 296
vom Igel, 2
Whitehead, **160**, 212
Whitney-Einbettungs-, 267
Zwischenwert-, 35, 62
Schleife, *56*, 71
Schleifenraum, *92*
unendlicher, 251
Schneeflockenkurve, 7
Schnitt, 100
Seite
freie, 93
Sequenz, *94*
Barratt-Puppe-, 171
Bockstein-, 228
exakte, *94*, 135, 184
Homotopie-, *175*
kurze, *94*
lange, 185, 231
Faser-, 175
Homologie-, 185
Bockstein-, 228
Mayer-Vietoris-, **187**
Homotopie-
Faserungen, **98**
Kofaserung, 117
Paar, **95**
stabile, **121**, 186
koexakte
Homotopie-, *172*
Kofaser-, 171, 248
Kohomologie-, 231
Mayer-Vietoris-, 232
Mayer-Vietoris-, **187**, 232
Milnor-, **235**
Puppe-, 248
Sechs-Term-, 264
Signatur, 297
Skelett, *41*, 157
Spektrum, 120, *204*
Eilenberg-Mac Lane-, *206*
Existenz und Eindeutigkeit, **207**
Einhängungs-, *204*
Moore-, *213*
Ω-, *204*
Sphären-, 206
Suspensions-, *204*
Thom-
normales, *289*
Sphäre, 2, 39, 83, 189, 233
stetig, 3, 4, *6*, 29
an einem Punkt, 3, *6*, 16
Struktur
lineare
stabile , *268*
normale, *269*
stabile, *268*
Subbasis, *12*, 18, 36
Summe
direkte, 49, 184
topologische, *29*
Whitney-, 260
zusammenhängende, 297
Suspension
reduzierte, *siehe* Einhängung, reduzierte

Teilfolge, 15
Teilmenge
offene, 39
Teleskop
Abbildungs-, 191
Topologie, *4*
Box-, 20, 26
CW-, 42, 43
diskrete, *5*, 12, 31, 34, 40, 45, 60, 61, 63
Final-, *31*, 50
Identifizierungs-, *siehe* Quotienten-
induzierte, *siehe* Initial-
Initial-, *31*, 50
Klumpen-, *5*, 12, 20, 31, 45, 73
koendliche, 45, 46
koinduzierte, *siehe* Final-
Kolimes-, 34, 44

kompakt erzeugte, *147*
kompakt-offene, *36*, 38, 51, 55, 92, 154
metrische, *4*, 47, 51
Ordnungs-, 14, 46
p-adische, 51
Produkt-, *18*, 31, 36, 47, 51, 53, 149
Quotienten-, *31*, 33, 50, 52, 72, 74, 87, 115, 147
Relativ-, *siehe* Unterraum-
schwache, *34*, 44
Spur-, *siehe* Unterraum-
Summen-, *29*, 31, 147
Unterraum-, *17*, 20, 31, 32, 39, 43, 47, 48, 50, 55, 85, 149
Verklebungs-, 32, 50
Zariski-, 45, 46
zur Basis, *13*, 20
zur Subbasis, *13*, 18, 36
Torsion, 298
Torus, 83
Clifford-, 70
Totalraum, *100*
Träger, 256
Transformation
natürliche, *89*, 185
natürliche, 28
Transposition, 243, 278
transversal, 269
Trivialisierung, 123
lokale, *100*

Überdeckung
offene, *22*, 23, 66
Teil-, 22
überlagert
gleichmäßig, *60*, 72, 73, 75
Überlagerung, *60*, 61, 63, 70–78, 86, 99, 100
n-zusammenhängende, 162
normale, *74*, 75–78
universelle, *60*, 70, 75–78, 86
Umgebung, 4, *5*, 39, 73
kompakte, 24
zusammenhängende, 35
weg-, 35
Umgebungsbasis, 31
Umlaufzahl, 53
Unterkategorie
volle, 146
Untermannigfaltigkeit, 39
$\mathbb{B}$-, *269*
eigentliche, 269
gerahmte, *123*
Unterraum, 20, 22, 149
unzusammenhängend
total, *35*, 51

Verbund, 136, 257
Vereinigung
disjunkte, 29, 30, 49, 147
Vererbung, 20, 32, 50, 74
Verkettung, *6*, 54, *56*

Weg, 34, 55, 56, 72
Wirkung
Gruppen-, *72*, 74–78
eigentlich diskontinuierliche, *73*, 74–75
freie, *73*, 74–75
stetige, *251*
Wort, 64
gekürztes, 64
reduziertes, 64, 65

Zahl
Betti-, *200*, 296
dyadische, 10
Euler-, *201*, 296
Zelle, *41*, 43, 157
abgeschlossene, *41*, 157
zusammenhängend, *34*, 50, 70–78, 86
einfach, *59*, 69, 70, 84
semilokal, *75*, 78
lokal, *35*
n-, *102*, 160
weg-, *34*, 50, 57, 59, 66–72, 80, 82, 84
lokal, *35*, 71–78
Zusammenhangskomponente, *35*, 78
Weg-, *35*, 51, 55, 71, 77, 88
zusammenziehbar, *54*, 55, 59, 60, 68, 69, 91, 186
lokal, *78*, 86
Zykel, *193*
$\mathbb{B}$-, *272*
gerahmter, *127*
Zylinder, 167
Abbildungs-, *112*
relativer, 160
reduzierter, *116*, 173