

Lösungen zur linearen Algebra, Blatt 7

Aufgabe 1:

Behauptung. Für beliebige Matrizen $A \in M_{m,n}(K)$ und $B \in M_{n,p}(K)$ gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Beweis. Für eine Matrix C mit Einträgen aus dem Körper K bezeichnen wir mit C_{ij} den Eintrag in Zeile i und Spalte j . Dann gilt nach Definition der transponierten Matrix und nach Definition des Produkts von Matrizen für alle $j \in \{1, \dots, p\}$ und alle $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} ((A \cdot B)^t)_{ji} &= (A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (A^t)_{ki} (B^t)_{jk} = \sum_{k=1}^n (B^t)_{jk} (A^t)_{ki} = (B^t \cdot A^t)_{ji}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2:

Behauptung. Die Menge $R = \{(x, y) \mid x \leq y\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist keine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Relation R ist nicht symmetrisch denn es gilt $(2, 3) \in R$ und $(3, 2) \notin R$. □

Behauptung. Durch $R = \{(x, y) \mid \text{es existieren } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^m = y^n\}$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert.

Beweis. Wir überprüfen die Axiome, denen eine Äquivalenzrelation genügen muss:

- Die Relation R ist *reflexiv*, denn für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x^1 = x^1$, also xRx .
- Sie ist *symmetrisch*: Aus $(x, y) \in R$ folgt, dass es $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^m = y^n$. Also gilt auch $y^n = x^m$, d.h. $(y, x) \in R$.
- Die *Transitivität* folgt aus der folgenden Beobachtung: Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ mit $x^k = y^l$ und $y^m = z^n$. Dann gilt

$$x^{km} = (x^k)^m = (y^l)^m = y^{lm} = (y^m)^l = (z^n)^l = z^{nl},$$

also gilt xRz .

□

Behauptung. Sei $R = \{(A, B) \mid B = Q \cdot A \cdot Q^{-1} \text{ für ein } Q \in GL(n, K)\} \subset M_n(K) \times M_n(K)$. Dann ist R eine Äquivalenzrelation.

Beweis. • Die *Reflexivität* der Relation R folgt aus $A = E_n \cdot A \cdot E_n = E_n \cdot A \cdot E_n^{-1}$, wobei die E_n die n -reihige Einheitsmatrix bezeichnet.

- Aus $B = Q \cdot A \cdot Q^{-1}$ folgt $A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q = Q^{-1} \cdot B \cdot (Q^{-1})^{-1}$, und das beweist die *Symmetrie* von R .
- Gelten ARB und BRC für Matrizen A, B, C , so existieren $P, Q \in GL(n, K)$ mit $B = Q \cdot A \cdot Q^{-1}$ und $C = P \cdot B \cdot P^{-1}$. Daraus folgt

$$C = P \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot (Q \cdot A \cdot Q^{-1}) \cdot P^{-1} = (P \cdot Q) \cdot A \cdot (P \cdot Q)^{-1} = T \cdot A \cdot T^{-1},$$

mit der Matrix $T = P \cdot Q \in GL(n, K)$. Also gilt ARC , und die Relation ist *transitiv*.

□

Behauptung. Die Relation $R = \{(p, q) \mid |p - q| < 1\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist keine Äquivalenzrelation.

Beweis. Wir sehen leicht, dass die Transitivitätsbedingung nicht erfüllt ist: Es gilt $0R\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}R1$, doch $0R1$ ist falsch. $\square$

Aufgabe 3: Seien $k = 1, l = 2$ und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Behauptung. Für die Abbildung $F_A : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, die durch die Matrix A gegeben ist, gilt

$$\begin{aligned} \ker F_A &= \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}\} \quad \text{und} \\ \operatorname{im} F_A &= \{b_1 w_1 + \dots + b_l w_l \mid b_1, \dots, b_l \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned} \quad (\star)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Gleichung. Dazu berechnen wir

$$F_A(v_1) = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das beweist $v_1 \in \ker F_A$, und damit folgt auch $a_1 v_1 \in \ker F_A$ für alle $a_1 \in \mathbb{Q}$, denn der Kern einer linearen Abbildung ist ein Untervektorraum. Wir wissen damit, dass der von v_1 erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{Q}^3$ im Kern von F_A enthalten ist.

Wir wollen beweisen, dass auch umgekehrt jedes Element des Kerns von F_A in dem von v_1 erzeugten Unterraum liegt. Sei $v \in \ker F$ und

$$v = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

für rationale Zahlen p, q, r . Dann muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \cdot p + 2 \cdot q + 4 \cdot r \\ 0 \cdot p + 1 \cdot q + 2 \cdot r \\ 0 \cdot p + 3 \cdot q + 6 \cdot r \\ 1 \cdot p + 3 \cdot q + 6 \cdot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + 2q + 4r \\ q + 2r \\ 3q + 6r \\ p + 3q + 6r \end{pmatrix}.$$

Die zweite Zeile dieser Gleichung besagt $q = (-2)r$, und der Vergleich der dritten mit der vierten Zeile liefert $p = 0$. Damit ist gezeigt, dass gilt $v = (-r)v_1$.

Wenden wir uns der zweiten Gleichung in $(\star)$ zu. Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standard-Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 unter F_A . Also gilt $w_1 = F_A(e_1)$ und $w_2 = F_A(e_2)$.

Aus der Linearität der Abbildung F_A erhalten wir damit sofort

$$\{a_1 w_1 + a_2 w_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\} \subset \operatorname{im} F_A,$$

denn für alle rationales Zahlen a_1, a_2 gilt

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 = a_1 F_A(e_1) + a_2 F_A(e_2) = F_A(a_1 e_1 + a_2 e_2) \in \operatorname{im} F_A.$$

Um zu sehen, dass auch gilt

$$\{a_1 w_1 + a_2 w_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\} \supset \operatorname{im} F_A,$$

nehmen wir an, dass w ein beliebiges Element aus dem Bild von F_A ist. Dann existiert $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in \mathbb{Q}^3$ mit $F_A(v) = w$. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} w &= a_1 F_A(e_1) + a_2 F_A(e_2) + a_3 F_A(e_3) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + 2a_3 w_2 \\ &= a_1 w_1 + (a_2 + 2a_3) w_2, \end{aligned}$$

denn es gilt $F_A(e_3) = 2w_2$. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Behauptung. Die Zahlen $k = 1$ und $l = 2$ sind minimal unter allen nichtnegativen ganzen Zahlen, für die sich Vektoren $v_1, \dots, v_l$ und $w_1, \dots, w_k$ finden lassen mit der Eigenschaft $(\star)$.

Beweis. Wäre k nicht minimal, so müsste $\ker F_A = \{0\}$ gelten. Wir haben aber oben $\ker F_A \neq \{0\}$ gesehen.

Nehmen wir nun an, l sei nicht minimal. Die Möglichkeit $l = 0$ wird auf die gleiche Weise ausgeschlossen wie $k = 0$. Es gibt also einen Vektor

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}$$

mit $\text{im } F_A = \{a_1 u \mid a_1 \in \mathbb{Q}\}$. Wegen $w_1 \in \text{im } F$ muss gelten $u_1 = u_4 \neq 0$, und wegen $w_2 \in \text{im } F_A$ muss es ein $a_1 \in \mathbb{Q}$ geben mit $a_1 u_1 = 2$ und $a_1 u_4 = 3$. Es folgt $2 = a_1 u_1 = a_1 u_4 = 3$, das ist ein Widerspruch. $\square$

Aufgabe 4: Mit e_1 und e_2 bezeichnen wir die Standard-Einheitsvektoren in F_3^2 . Wir definieren die folgenden Teilmengen von F_3^2 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[0]\}, & U_2 &= F_3^2, \\ U_3 &= \{a e_1 \mid a \in F_3\}, & U_4 &= \{a e_2 \mid a \in F_3\}, \\ U_5 &= \{a(e_1 + e_2) \mid a \in F_3\}, & U_6 &= \{a(e_1 + [2]e_2) \mid a \in F_3\}. \end{aligned}$$

Behauptung. Die Mengen $U_1, \dots, U_6$ sind Untervektorräume des F_3^2 , und es gibt keine weiteren Untervektorräume.

Beweis. Jeder Vektorraum hat sich selbst als Untervektorraum und ebenso den Unterraum, der nur aus der 0 besteht. Die anderen Teilmengen $U_3, \dots, U_6$ sind jeweils von der Form $V = \{a \cdot v \mid a \in F_3\}$ für einen Erzeuger v . Sie sind damit Unterräume, denn es gilt für alle $a_1, a_2, b \in F_3$

$$b \cdot (a_1 \cdot v) = (b \cdot a_1) \cdot v \in V, \quad a_1 \cdot v + a_2 \cdot v = (a_1 + a_2) \cdot v \in V.$$

Wir müssen zeigen, dass es keine weiteren Unterräume gibt.

Es gilt $U_3 \cup U_4 \cup U_5 \cup U_6 = F_3^2$ (prüfen!). Setzen wir $U \neq U_1$ voraus. Sei $u \in U \setminus \{0\}$. Dann können wir ein $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ wählen mit $u \in U_i$. Daraus folgt $U_i \subset U$, denn der Erzeuger von U_i ist entweder u oder $-u = [2] \cdot u \in U_i$.

Falls nun gilt $U_i \neq U$, dann gibt es ein Element $v \in U \setminus U_i$.

Zwischenbehauptung: Die Abbildung $F_3^2 \rightarrow U$, $(a, b) \mapsto a \cdot u + b \cdot v$ ist injektiv.

Wenn das stimmt, so hat U mindestens 9 Elemente, also gilt $U = F_3^2 = U_2$, und die Behauptung ist bewiesen.

Begründung der Zwischenbehauptung: Gilt sie nicht, so ist $a \cdot u + b \cdot v = 0$ für ein Paar $(a, b) \neq (0, 0)$. Falls $b = 0$, so ist $a \neq 0$ und somit $u = 0$, im Widerspruch zur Wahl von u . Falls $b \neq 0$ gilt, folgt $v = -(b^{-1}a) \cdot u \in U_i$, Widerspruch zur Wahl von v . $\square$