(Korrigierte) Lösungen zur linearen Algebra, Blatt 11

Aufgabe 1: Wir sehen, dass die duale Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zu (v_1, v_2, v_3) gegeben ist durch $\alpha_1 = (-1, 2, -1),\ \alpha_2 = (1/2, -1/2, 1/2),\ \alpha_3 = (-1, 1, 0)$; und die duale Basis (β_1, β_2) zu (w_1, w_2) besteht aus $\beta_1 = (-1, 0),\ \beta_2 = (4, 1)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\beta_1(F(v_1)) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -3, \\
\beta_1(F(v_2)) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = -12, \\
\beta_1(F(v_3)) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\beta_2(F(v_1)) = 17,\ \beta_2(F(v_2)) = 60,\ \beta_2(F(v_3)) = 6.$$

Die Matrix von F bezüglich der Basen (v_1, v_2, v_3) und (w_1, w_2) ist damit

$$\begin{pmatrix} \beta_1(F(v_1)) & \beta_1(F(v_2)) & \beta_1(F(v_3)) \\ \beta_2(F(v_1)) & \beta_2(F(v_2)) & \beta_2(F(v_3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -2 \\ 17 & 60 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Teil berechnen wir die Bilder der Standardbasisvektoren:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1(e_1) \\ \alpha_2(e_1) \\ \alpha_3(e_1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7/2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1(e_2) \\ \alpha_2(e_2) \\ \alpha_3(e_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11/2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1(e_3) \\ \alpha_2(e_3) \\ \alpha_3(e_3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diese Spalten stellen die Bilder $G(e_1)$, $G(e_2)$ und $G(e_3)$ als Koordinaten bezüglich der Basis (w_1, w_2) dar, also gilt

$$\begin{aligned}
G(e_1) &= -4 \cdot w_1 - 7/2 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -39/2 \end{pmatrix}, \\
G(e_2) &= 9 \cdot w_1 + 11/2 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 83/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$G(e_3) = -3 \cdot w_1 - 3/2 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -27/2 \end{pmatrix}.$$

Das zeigt, dass G für die Standardbasen gegeben ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ -39/2 & 83/2 & -27/2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Wir bringen die Matrix, deren Determinante zu berechnen ist, durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf obere Dreiecksgestalt, so dass auf der Diagonale nur noch die Zahlen 1 und 0 übrig bleiben. Das liefert

$$\det\begin{pmatrix}3 & -7 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ -3 & 8 & 2 & 9\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}0 & -7 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 8 & 03 & 9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & -7 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 8 & -3 & 9\end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 2\\ 0 & -7 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 10 & 1 & 5\end{pmatrix} = -7\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3/7 & -2/7\\ 0 & 0 & 23/7 & 13/7\\ 0 & 0 & 37/7 & 55/7\end{pmatrix}$$
$$= -23\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3/7 & -2/7\\ 0 & 0 & 1 & 13/23\\ 0 & 0 & 0 & 112/23\end{pmatrix} = -112.$$

Aufgabe 3: Für jede Permutation $\sigma \in S(n)$ sei $X(\sigma) = \{(i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ die Menge der Fehlstände und $s(\sigma) = (-1)^{\#X(\sigma)}$. Die erste Teilaufgabe folgt aus der zweiten. Wir beweisen die zweite und die dritte Aussage durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Elemente in $X(\sigma)$.

Induktionsanfang: Ist $X(\sigma)$ leer, so ist σ die identische Abbildung und $\operatorname{sign}(\sigma) = 1 = s(\sigma)$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $k \geq 1$, und die Behauptungen seien bewiesen für alle Permutationen mit weniger als k Fehlständen.

Induktionsschluss: Sei $\sigma \in S(n)$ eine Permutation mit k Fehlständen. Dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $\sigma(j) > \sigma(j+1)$, denn andernfalls ist σ die identische Abbildung. Die Transposition $\tau_{j,j+1}$ erfüllt $\#X(\sigma \cdot \tau_{j,j+1}) = \#X(\sigma) - 1$. Also ist $k-1$ die Anzahl der Fehlstände von $\sigma \cdot \tau_{j,j+1}$, und nach Induktionsvoraussetzung hat diese Permutation eine Darstellung $\mathrm{id} \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_l$ als Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente. Damit ist $\sigma = \mathrm{id} \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_l \cdot \tau_{j,j+1}$ ebenfalls ein solches Produkt. Weiterhin folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} s(\sigma) = (-1)^k &= s(\sigma\tau_{j,j+1}) \cdot (-1) = \operatorname{sign}(\sigma\tau_{j,j+1}) \cdot \operatorname{sign}(\tau_{j,j+1}) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma\tau_{j,j+1}\tau_{j,j+1}) = \operatorname{sign}(\sigma), \end{aligned}$$

denn das Signum einer Transposition ist -1, und sign ist mit dem Produkt verträglich.

Aufgabe 4: Wir beweisen die Formel für die Determinante der Vandermonde-Matrix durch eine vollständige Induktion über n.

Für $n = 0$ ist sie offensichtlich richtig. Wegen der Scherungsinvarianz der Determinante dürfen wir die folgende Umformung an der Matrix V vornehmen, ohne die Determinante zu ändern: Für jedes $j \in n, n-1, \ldots, 1$ wird das x_0-fache der Spalte j von der Spalte $j+1$ abgezogen, beginnend mit $j = n$. Wir erhalten eine Blockmatrix

$$\begin{pmatrix}1 & x_0 - x_0 & x_0^2 - x_0x_0 & & x_0^{n-1} - x_0x_0^{n-2} & x_0^n - x_0x_0^{n-1}\\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0x_1 & & x_1^{n-1} - x_0x_1^{n-2} & x_1^n - x_0x_1^{n-1}\\ & & & \ddots & & \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0x_n & & x_n^{n-1} - x_0x_n^{n-2} & x_n^n - x_0x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \hline 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & & (x_1 - x_0)x_1^{n-2} & (x_1 - x_0)x_1^{n-1}\\ \vdots & & & \ddots & & \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & & (x_n - x_0)x_n^{n-2} & (x_n - x_0)x_n^{n-1}\end{array}\right),$$

und die Determinante dieser Matrix ist nach der Vorlesung die Determinante des unteren rechten Blocks. Da die Determinante in jeder Zeile linear ist, erhalten wir

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k - x_0) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & & x_1^{n-1} \\ & & \ddots & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hier ist nun eine Vandermonde-Matrix mit n Spalten, auf die wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Also gilt

$$\det V = \prod_{k=1}^{n}(x_k - x_0) \cdot \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i) = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i),$$

womit die erste Teilaufgabe gelöst ist.

Im zweiten Teil betrachten wir für jedes $j \in \{0, \dots, n\}$ die Funktion $p_j \colon K \to K,\ x \mapsto x^k$. Um die lineare Unabhängigkeit der p_j zu beweisen, setzen wir voraus, dass $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \cdot p_j = 0$$

erfüllen. Gemäß der Aufgabenstellung können wir in K paarweise verschiedene Elemente $x_0, \dots, x_n$ wählen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_j \cdot p_j(x_0) \\ \vdots \\ \lambda_j \cdot p_j(x_n) \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei V die Vandermonde-Matrix aus der ersten Teilaufgabe ist. Da die x_j paarweise verschieden sind, ist $\det V \neq 0$, das Gleichungssystem hat also nur die Lösung $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$.