Lösungen zur linearen Algebra, Blatt 13

Aufgabe 1: Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\chi_A(X) = \det(X \cdot E_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X-4 & 5 & -3 \\ 2 & X+2 & 2 \\ 7 & -5 & X+6 \end{pmatrix} = X^3 + 4\,X^2 + X - 6\ .$$

Die Nullstellen dieses Polynoms kann man erraten oder berechnen (da der Grad ≤ 4 ist), es gilt

$$\chi_A(X) = (X+3)(X+2)(X-1)\ .$$

Also sind die Eigenwerte gerade -3, -2 und 1. Insbesondere erhalten wir drei verschiedene Eigenwerte, und da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, müssen die Eigenräume alle eindimensional sein. Es genügt daher, zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor zu finden. Dazu suchen wir Lösungen der linearen Gleichungssyteme

$$A\,x + 3\,x = 0\ , \qquad A\,y + 2\,y = 0 \quad \text{und} \quad A\,z - z = 0,$$

also z.B.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(4+3)x_1 & - & 5x_2 & + & 3\,x_3 & = & 0\ , \\
-2x_1 & + & (-2+3)x_2 & - & 2x_3 & = & 0\ , \\
-7x_1 & + & 5x_2 & + & (-6+3)x_3 & = & 0\ , \\
\\
x_1 & - & \frac{5}{7}\,x_2 & + & \frac{3}{7}x_3 & = & 0\ , \\
 & - & \frac{3}{7}\,x_2 & - & \frac{8}{7} & = & 0\ , \\
 & & & & 0 & = & 0\ , \\
\\
x_1 & & & + & \frac{7}{3}x_3 & = & 0\ , \\
 & & x_2 & + & \frac{8}{3}\,x_3 & = & 0\ .
\end{array}$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert -3 wäre demnach der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$. In der Tat gilt

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -7 & 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -24 \\ 9 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}\ .$$

Analog zeigen wir, dass $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -2 ist, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Aufgabe 2: a) Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,m}}$. Nach der Definition des Produkts gilt

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij} \Big) = \operatorname{tr}(B \cdot A).$$

b) Wir haben soeben gesehen, dass $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ symmetrisch ist. Wir zeigen als nächstes die Linearität der Abbildung im ersten Argument. Die Spurabbildung $\operatorname{tr}\colon M_m(\mathbb{R}) \to R$ ist offenbar linear, und da das Produkt von Matrizen selber bilinear ist, folgt

$$\begin{aligned}
\langle A_1 + A_2\,,\, B \rangle &= \operatorname{tr}((A_1 + A_2)B^t) = \operatorname{tr}(A_1 B^t + A_2 B^t) = \operatorname{tr}(A_1 B^t) + \operatorname{tr}(A_2 B^t) \\
&= \langle A_1\,,\, B \rangle + \langle A_2\,,\, B \rangle, \\
\langle \lambda\, A_1\,,\, B \rangle &= \operatorname{tr}(\lambda\, A_1 B^t) = \lambda \cdot \operatorname{tr}(A_1 B^t) = \lambda \cdot \langle A_1\,,\, B \rangle.
\end{aligned}$$

für alle Matrizen $A_1, A_2, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der bereits gezeigten Symmetrie folgt Bilinearität im zweiten Argument. Als letztes bleibt noch zu zeigen, dass die Bilinearform positiv definit ist. Die obige Rechnung zeigt

$$\langle A\,,\,A\rangle = \mathrm{tr} AA^t = \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

Also ist $\langle A\,,\,A\rangle \geq 0$, wobei Gleichheit genau für $A = 0$ gilt.

Aufgabe 3: a) Wir beweisen zuerst eine Hilfsaussage.

Behauptung. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Ist $F^m(v)$ enthalten in dem von $F^0(v), \ldots, F^{m-1}(v)$ erzeugten Unterraum, so ist auch $F^{m+1}(v)$ in diesem Unterraum enthalten.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1} \in K$ mit $F^m(v) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j F^j(v)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} F^{m+1}(v) &= F(F^m(v)) = F(\lambda_0 F^0(v) + \cdots + \lambda_{m-1} F^{m-1}(v)) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j F(F^j(v)) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j F^{j+1}(v) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_{j-1} F^j(v) + \lambda_{m-1} F^m(v) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_{j-1} F^j(v) + \lambda_{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j F^j(v). \end{aligned}$$

□

Die Behauptung zeigt nun folgendes: Ist m maximal, so dass $F^0(v), \ldots, F^{m-1}(v)$ linear unabhängig sind, so ist der von allen $F^i(v)$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ erzeugte Unterraum m-dimensional. Nach Voraussetzung muss damit $m = n$ gelten.

b) Die Matrix von F bezüglich dieser Basis ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 & \mu_0 \\ 1 & 0 & & & 0 & \mu_1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \mu_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & \mu_{n-2} \\ & & & 0 & 1 & \mu_{n-1} \end{pmatrix},$$

wobei $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ irgendwelche Elemente des Körpers K sind. Um das charakteristische Polynom auszurechnen, entwickeln wir die Determinante von $\lambda X - A$ nach der letzten Spalte. Das liefert

$$\chi_A(X) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} (-\mu_{j-1}) \cdot \det C_j + (X - \mu_{n-1}) \cdot \det C_n.$$

Jedes C_j ist eine Blockmatrix

$$C_j = \left(\begin{array}{c|c} P_{j-1} & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-j} \end{array}\right),$$

und die Matrizen $P_k \in M_k(\mathbb{R})$ bzw. $Q_k \in M_k(\mathbb{R})$ sind untere und obere Dreiecksmatrizen von der Form

$$P_k = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & & & \\ -1 & X & 0 & & & \\ 0 & -1 & X & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & X & 0 \\ & & & & -1 & X \end{pmatrix}, \quad Q_k = \begin{pmatrix} -1 & X & 0 & & & \\ 0 & -1 & X & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & X \\ & & & & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge, also gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j}(-\mu_{j-1}) \cdot \det P_{j-1} \cdot \det Q_{n-j} + (X - \mu_{n-1}) \cdot \det P_{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j-1} \mu_{j-1} X^{j-1} (-1)^{n-j} + X^n - \mu_{n-1} X^{n-1} \\ &= -\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j X^j + X^n.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind.

c) Das charakteristische Polynom hängt nicht von der Wahl einer Basis ab, die zyklische Normalform der Abbildung F ist also ebenfalls unabhängig von der Wahl eines Erzeugers v.

Aufgabe 4: Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$\chi_A(X) = X^2 + (a+d)X + ad - bc.$$

Die Nullstellen von χ_A sind (man beachte das Vorzeichen)

$$-\lambda_{\mp} = -\frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}.$$

Es gilt $\lambda_+ > \lambda_- > 0$, denn die Matrix A ist so gewählt, dass der Ausdruck in der Wurzel positiv ist. Da A zwei verschiedene Eigenwerte hat, wissen wir, dass es eine invertierbare Matrix T gibt mit

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda_- & 0 \\ 0 & -\lambda_+ \end{pmatrix}.$$

Ist nun f eine Lösung der Gleichung $f'' = Af$, so gilt für $g = Tf$ die Gleichung

$$g'' = Tf'' = TAf = TAT^{-1}(Tf) = TAT^{-1}g.$$

Ebenso erhält man aus jeder Lösung g der Gleichung $g'' = TAT^{-1}g$ eine Lösung $f = T^{-1}g$ der Gleichung $f'' = Af$.

Da TAT^{-1} eine Diagonalmatrix ist, lässt sich die neue Gleichung viel leichter lösen als die ursprüngliche. Die Zahlen λ_- und λ_+ sind positiv, und aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede Lösung g der neuen Gleichung eine Linearkombination $g = \alpha_- c_- + \beta_- s_- + \alpha_+ c_+ + \beta_+ s_+$ ist, wobei

$$c_-(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda_-}t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; s_-(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_-}t)}{\sqrt{\lambda_-}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_+(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda_+}t) \end{pmatrix}, \; s_+(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{\lambda_+}t)}{\sqrt{\lambda_+}} \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten für die Lösung der Aufgabe ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} \alpha_- \\ \alpha_+ \end{pmatrix} = g(0) = Tf(0) = T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_- \\ \beta_+ \end{pmatrix} = g'(0) = Tf'(0) = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Um die Lösung zu berechnen, müssen wir also die Matrix T bestimmen. Man überprüft, dass die Eigenräume von A aufgespannt werden von

$$v_- = \begin{pmatrix} b \\ a - \lambda_- \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_+ = \begin{pmatrix} b \\ a - \lambda_+ \end{pmatrix}.$$

Die Matrix T^{-1} hat v_- und v_+ als Spalten, und durch Invertieren dieser Matrix erhalten wir

$$T = \frac{1}{b(\lambda_+ - \lambda_-)} \begin{pmatrix} -a+\lambda_+ & b \\ a-\lambda_- & -b \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend erhalten wir also als Lösung für das angegebene Problem die Funktion

$$\begin{aligned} f(t) = {} & \frac{((-a+\lambda_+)x_1 + bx_2)\cos\big(\sqrt{\lambda_-}t\big) + ((-a+\lambda_+)y_1 + by_2)\sin\big(\sqrt{\lambda_-}t\big)/\sqrt{\lambda_-}}{b(\lambda_+ - \lambda_-)} \begin{pmatrix} b \\ a-\lambda_- \end{pmatrix} \\ & + \frac{((a-\lambda_-)x_1 - bx_2)\cos\big(\sqrt{\lambda_+}t\big) + ((a-\lambda_-)y_1 - by_2)\sin\big(\sqrt{\lambda_+}t\big)/\sqrt{\lambda_+}}{b(\lambda_+ - \lambda_-)} \begin{pmatrix} b \\ a-\lambda_+ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In der Vorlesung wurde die Gleichung $f'' = Af$ eingeführt als Bewegungsgleichung für das folgende mechanische System: Zwei Massepunkte sind untereinander durch eine Feder verbunden, und jeder ist durch eine weitere Feder mit einer von zwei gegenüberliegenden Wänden verbunden. Wir sehen hier, dass sich die Bewegung der Punkte aus zwei Schwingungen zusammensetzt, von denen eine schneller ist als die andere (da $\lambda_+ > \lambda_-$). Außerdem gilt

$$\begin{aligned} a - \lambda_- &= \frac{a-d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc} > 0 \\ a - \lambda_+ &= \frac{a-d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc} < 0, \end{aligned}$$

d.h. von den Eigenvektoren der Matrix A hat v_- zwei positive Komponenten und v_+ eine positive und eine negative. Von den beiden Schwingungen ist also die langsamere eine, bei der beide die Punkte ‚in Phase' schwingen, bei der schnelleren schwingen sie entgegensetzt.