Lösungen zur linearen Algebra, Blatt 14

Aufgabe 1: Wir wollen aus der Basis (v_1, v_2, v_3) durch das Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis (f_1, f_2, f_3) konstruieren. Der Vektor v_1 hat bereits die Norm 1, also können wir $f_1 = v_1$ setzen. Die weiteren Schritte sind

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ -2/9 \\ 8/9 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} w_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{18} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 4/9 - 1/18 \\ -4/9 - 1/18 \\ -2/9 + 2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Den zugrundeliegenden Körper bezeichnen wir mit K.

a) Wir müssen zeigen, dass $\ker B$ abgeschlossen unter der Addition und der Skalarmultiplikation ist.
Sind $v_1, v_2 \in \ker B$, und ist $k \in K$, so gelten für jedes $w \in W$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} B(v_1 + v_2, w) &= B(v_1, w) + B(v_2, w) = 0 + 0 = 0, \\ B(k \cdot v_1, w) &= k \cdot B(v_1, w) = k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Also sind $v_1 + v_2 \in \ker B$ und $k \cdot v_1 \in \ker B$.

b) Wir definieren $\bar{B}([v],[w]) = B(v,w)$ und müssen prüfen, dass das wohldefiniert ist:
Sind $v', w' \in V$ mit $[v] = [v']$ und $[w] = [w']$, so existieren $x, y \in \ker B$ mit $v' = v + x$ und $w' = w + y$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} B(v', w') &= B(v + x, w + y) = B(v, w + y) + B(x, w + y) \\ &= B(v,w) + B(v,y) + \underbrace{B(x,w)}_{0} + \underbrace{B(x,y)}_{0} = B(v,w) + \underbrace{B(y,v)}_{0} \\ &= B(v,w). \end{aligned}$$

Behauptung. *Die Abbildung $\bar{B}$ ist eine symmetrische Bilinearform.*

Beweis. Zunächst ist $\bar{B}$ symmetrisch, denn

$$\bar{B}([v],[w]) = B(v,w) = B(w,v) = \bar{B}([w],[v]) \quad \text{für } v, w \in V.$$

Dann genügt es, die Linearität von $\bar{B}$ in ersten Argument zu zeigen, und die ist schnell überprüft:

$$\bar{B}(k[v_1] + [v_2], [w]) = B(kv_1 + v_2, w) = k\,B(v_1, w) + B(v_2, w), \quad v_1, v_2, w \in V,\ k \in K.$$

□

c) Wir müssen $\ker \bar{B} = 0$ zeigen. Sei also $v \in V$ ein Vektor mit $\bar{B}([v], x) = 0$ für alle $x \in V/\ker B$. Dann gilt für jedes $w \in V$ die Gleichung $0 = \bar{B}([v],[w]) = B(v,w)$, und damit ist $v \in \ker B$. Das heißt aber gerade $[v] = 0$.

Aufgabe 3: a) Da die Koeffizienten von P reell sind, gilt $\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda})$ für jede komplexe Zahl λ. Ist λ eine Nullstelle, so folgt $0 = \bar{0} = \overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda})$, und somit ist $\bar{\lambda}$ ebenfalls eine Nullstelle von P.

b) Das charakteristische Polynom χ_A ist ein normiertes, reelles Polynom vom Grad drei. Wir zeigen, dass jedes solche Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ eine reelle Nullstelle hat.

Über den komplexen Zahlen zerfällt P in Linearfaktoren, es gibt also komplexe Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3).$$

Sind alle diese Nullstellen reell, so brauchen wir nichts weiter zu zeigen. Nehmen wir also an, eine Nullstelle sei nicht reell, etwa λ_1. Wie wir oben gezeigt haben, ist dann auch $\bar{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ eine Nullstelle, wir können also $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ annehmen. Daraus folgt

$$P(0) = (-\lambda_1)(-\bar{\lambda}_1)(-\lambda_3) = -\left|\lambda_1\right|^2 \lambda_3.$$

Da P ein reelles Polynom ist gilt $P(0) \in \mathbb{R}$. Wegen $\lambda_1 \neq 0$ folgt $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

c) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Wir wollen zeigen, dass das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ eine positive reelle Nullstelle hat.

Es gibt komplexe Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(x - \lambda_3)$. Nach Teil b) können wir $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ annehmen. Es gibt nun die folgenden zwei Möglichkeiten:

- Auch λ_1 und λ_2 sind reell. Dann folgt $1 = \det A = -\chi_A(0) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, und somit muss mindestens einer der drei Faktoren positiv sein.
- Ist $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$, so gilt $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, und wie oben folgt $1 = \det A = -\chi_A(0) = \left|\lambda_1\right|^2 \lambda_3$. Also muss λ_3 positiv sein.

d) Jedes $A \in O(3) \subset M_3(\mathbb{R})$ hat nach Teil b) einen rellen Eigenwert, der erste Teil der Aufgabe wird dann mit der folgenden Behauptung gezeigt:

Behauptung. *Ist λ ein Eigenwert von $A \in O(3)$, so ist $\lambda \in \{-1, 1\}$.*

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Dann gilt $\lambda^2 = 1$ wegen

$$\lambda^2 \left\|v\right\|^2 = \lambda^2 \langle v\,,\, v\rangle = \langle \lambda v\,,\, \lambda v\rangle = \langle Av\,,\, Av\rangle = \langle v\,,\, v\rangle = \left\|v\right\|^2.$$

□

Ist nun $A \in SO(3) = O(3) \cap SL(3)$, so folgt die Aussage aus dieser Behauptung und aus Teil c) der Aufgabe.

Aufgabe 4:

Behauptung. *Ist $q \in S^3 \subset \mathbb{H}$ mit $f_q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, so ist $q \in \{-1, 1\}$.*

Beweis. Sei $q = (a, x) \in \mathbb{H}$. Der von x erzeugte Untervektorraum besteht nur aus Fixpunkten von f_q, und ist $y \in \mathbb{R}^3$ senkrecht zu x, so berechnen wir $f_q(y)$ mit der Grassmann-Identität:

$$\begin{aligned} q \cdot (0, y) \cdot \bar{q} &= (a, x) \cdot (0, y) \cdot (a, -x) = (a, x) \cdot (0, ay - y \times x) \\ &= (0, a^2 y - a(y \times x) + ax \times y - x \times (y \times x)) \\ &= (0, (a^2 - \langle x\,,\, x\rangle) \cdot y + 2a \cdot x \times y). \end{aligned}$$

Also ist für $\langle y\,,\, x\rangle = 0$

$$f_q(y) = (a^2 - \langle x\,,\, x\rangle) \cdot y + 2a \cdot x \times y. \qquad (1)$$

Gilt nun $f_q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, so folgt daraus $y = (a^2 - \langle x\,,\, x\rangle) \cdot y + 2a \cdot x \times y$.

Angenommen, es ist $x \neq 0$. Dann sind y und $x \times y$ linear unabhängig, aus der Gleichung folgt $a = 0$, und die Gleichung wird zu $y = -\left\|x\right\|^2 y$. Das steht im Widerspruch zu $y \neq 0$, $x \neq 0$.

Wir sehen also $x = 0$. Dann wird die Gleichung zu $y = a^2 y$, und es ist $a = \pm 1$. □

Für die erste Teilaufgabe nehmen wir nun $f_q = f_w$ an. Dann folgt $f_{\bar{q}w} = f_{\bar{q}} \circ f_w = f_{\bar{q}} \circ f_q = f_{\bar{q}q} = f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, nach der soeben bewiesenen Aussage gilt also $\bar{q}w = \pm 1$ oder $q = \pm w$.

Behauptung. *Ist $A \in SO(3)$, so gibt es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\psi \in \mathbb{R}$, so dass A bezüglich dieser Basis durch die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Umgekehrt ist jeder Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$, der bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis durch eine solche Matrix beschrieben wird, ein Element von $SO(3)$.

Beweis. Jede solche Matrix definiert ein Element von $SO(3)$ (nachprüfen!).

Sei umgekehrt $A \in SO(3)$. In Aufgabe 3 wurde gezeigt, dass A einen Eigenvektor v_1 mit Eigenwert 1 hat. Das orthogonale Komplement $\langle v_1\rangle^\perp$ ist invariant unter A, denn für jedes $w \in \langle v_1\rangle^\perp$ gilt

$$\langle A(w)\,,\, v_1\rangle = \langle A(w)\,,\, A(v_1)\rangle = \langle w\,,\, v_1\rangle = 0.$$

Wir können annehmen, dass $\|v_1\| = 1$ gilt, und wir ergänzen v_1 zu einer Orthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$. Bezüglich dieser Basis hat A eine Darstellung als Blockmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right),$$

und die Matrix $Q \in M_2(\mathbb{R})$ erfüllt $\langle Qv\,,\, Qw\rangle = \langle v\,,\, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Daraus folgt, dass die Spalten von Q eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden, es gibt daher ein $\psi \in \mathbb{R}$ mit

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad Q = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det Q = \det A = 1$ kommt nur die erste Möglichkeit in Betracht. □

Hat eine lineare Abbildung bezüglich einer Orthonormalbasis eine Matrix wie in der Behauptung, so ist diese Abbildung eine Drehung um den Winkel ψ, und die Drehachse wird vom ersten Basisvektor aufgespannt. Damit ist die zweite Teilaufgabe gelöst.

Für den dritten Teil erinnern wir daran, dass auf Blatt 6 für $q = (\cos\varphi, \sin\varphi \cdot x) \in S^3 \subset \mathbb{H}$ bereits $f_q \in O(3)$ gezeigt wurde. Man kann sogar mit Hilfe der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen genau berechnen, wie f_q auf dem orthogonalen Komplement von x operiert: Die Gleichung (1) in der ersten Behauptung oben zeigt für $\langle y\,,\, x\rangle = 0$

$$f_q(y) = (\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2) \cdot y + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \cdot x \times y = \cos(2\varphi) \cdot y + \sin(2\varphi) \cdot x \times y.$$

Ist y normiert, so ist $(x, y, x \times y)$ daher eine Orthonormalbasis, in der f_q durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ 0 & \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Mit der Behauptung oben löst das die Aufgabe.