Lösungen zur linearen Algebra, zweite Klausur

Aufgabe 1: a) Die Summe aus der zweiten Zeile und dem doppelten der ersten Zeile ergibt die dritte Zeile. Also ist der Rang der Matrix nicht maximal, die Matrix ist nicht invertierbar, und ihre Determinante ist 0.

b) Wir bringen die Matrix durch Zeilenumformungen auf strenge Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 2 & -2 & -3 & -1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 2 & -2 & -3 & -1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & -2 & -1 & -1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & 5/2\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}0 & 1 & 1/2 & 0\\ 1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 2 & -2 & -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}-10 & 11 & 3 & -5\\ 3 & -2 & -1 & 1\\ -10 & 10 & 3 & -5\\ 4 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Die untere rechte Matrix ist das Inverse der vorgegebenen. Die folgenden Zeilenumformungen haben die Determinante verändert:

- eine Vertauschung im ersten Schritt,
- Multiplikation einer Zeile mit $1/2$ im 4. Schritt,
- Multiplikation einer Zeile mit 2 im letzten Schritt.

Die Determinante der ursprünglich gegebenen Matrix ist daher $(-1) \cdot 2 \cdot 1/2 = -1$.

Aufgabe 2: a) Das orthogonale Komplement von $\langle v\rangle$ ist dreidimensional, also genügt es, drei linear unabhängige Vektoren in diesem Komplement zu finden. Offenbar sind

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

in diesem Komplement enthalten und linear unabhängig.

b) Die drei angegebenen Vektoren sind nicht linear unabhängig, denn zieht man das zweifache des zweiten vom dreifachen des ersten ab, so erhält man den dritten. Der erzeugte Unterraum ist also höchstens zweidimensional. Offenbar sind aber die beiden ersten linear unabhängig, denn die erste Komponente des zweiten verschwindet. Damit ist bewiesen, dass die ersten beiden der angegebenen Vektoren eine Basis des Unterraums bilden.

Aufgabe 3: Das Gleichungssystem, dass wir lösen müssen, ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Durch eine Zeilenvertauschung stellen wir die dritte Zeile nach oben, dann lösen wir das Gleichungssystem weiter nach dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ -2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ -7/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ -7/2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung zeigt, dass es zu beliebigen μ_2, μ_3 genau eine Lösung des Systems gibt, und für jede Lösung gilt $\mu_1 = \mu_2 - 1/2 \cdot \mu_3 + 3/2$. Die Schnittmenge der beiden Hyperebenen ist daher

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mu_2 - 1/2 \cdot \mu_3 + 3/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Behauptung. *Es gibt genau dann eine lineare Abbildung $G\colon W \to V$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_V$, wenn F injektiv ist.*

Beweis. Gibt es eine solche Abbildung G, und es ist $F(v_1) = F(v_2)$, so folgt

$$v_1 = \mathrm{id}_V(v_1) = G(F(v_1)) = G(F(v_2)) = \mathrm{id}_V(v_2) = v_2.$$

Also ist $v_1 = v_2$, und F ist injektiv.

Sei nun F injektiv. Wir wählen eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V. Dann sind die Vektoren $w_1 = F(v_1), \dots, w_n = F(v_n)$ linear unabhängig, und wir können sie zu einer Basis $(w_1, \dots, w_m)$ von W ergänzen. Wir definieren die Abbildung $G \in \mathrm{Hom}(W, V)$ durch

$$w_i \longmapsto \begin{cases} v_i & \text{falls } i \leq n, \\ 0 & \text{falls } i > n. \end{cases}$$

Dann erfüllt G die Gleichung $G \circ F = \mathrm{id}_V$. $\square$

Behauptung. *Es gibt genau dann eine lineare Abbildung $G\colon W \to V$ mit $F \circ G = \mathrm{id}_W$, wenn F surjektiv ist.*

Beweis. Gibt es ein solches G, so gilt $v = F(G(v))$ für jedes $v \in V$, also ist F surjektiv.

Sei F surjektiv. Wir wählen eine Basis $(v_1, \dots, v_k)$ von $\ker F$, und ergänzen sie zu einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V. Dann ist $(F(v_{k+1}), \dots, F(v_n))$ eine Basis von W:

- Die Vektoren sind linear unabhängig, denn aus $0 = \lambda_{k+1} F(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n F(v_n)$ folgt $0 = F(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n)$, d.h. $u = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \ker F$. Dann muss u eine Linearkombination der $v_1, \dots, v_k$ sein, und aus $u - \lambda_{k+1} v_{k+1} - \dots - \lambda_n v_n = 0$ folgt $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.
- Sie bilden ein Erzeugendensystem, denn zu jedem $w \in W$ gibt es ein $v \in V$ mit $F(v) = w$. Da v eine Linearkombination $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ ist, und da $F(v_i) = 0$ gilt für $i \leq k$, folgt aus der Linearität von F
$$w = F(v) = \lambda_{k+1} F(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n F(v_n).$$

Wir können nun eine lineare Abbildung $G\colon W \to V$ definieren durch $G(F(v_i)) = v_i$ für $i > k$. Dann hat G die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Aufgabe 5: Durch Division mit Rest findet man $Q = 2X^2 - X + 1$ und $R = 2X^2 - 2X - 3$.

Aufgabe 6: Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren v_1, v_2, v_3 und stellen sie als Linearkombinationen von w_1, w_2 dar:

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 5 & 1+4\sqrt{2} & 1-4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 8 + 1 - 4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} = -w_2$$

$$F(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 5 & 1+4\sqrt{2} & 1-4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 + 2 \\ 5 + \sqrt{2} + 8 - \sqrt{2} + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix} = w_1 + w_2$$

$$F(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 5 & 1+4\sqrt{2} & 1-4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 \\ -5\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} = w_2.$$

Die gesuchte Matrix ist daher $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7: a) Wir zeigen zuerst, dass $\iota_v \omega$ eine wohldefinierte Abbildung ist. Wir wählen Elemente $w_1, \dots, w_{n-1}, w_1', \dots, w_{n-1}' \in V$ mit $[w_i] = [w_i'] \in V/\langle v \rangle$ für jedes i. Dann gibt es Vektoren $v_i \in \langle v \rangle$ mit $w_i' = w_i + v_i$. Jedes dieser v_i ist also ein skalares Vielfaches von v, und aus der Scherungsinvarianz von ω folgt

$$\omega(v, w_1', \dots, w_{n-1}') = \omega(v, w_1 + v_1, \dots, w_{n-1} + v_{n-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{n-1}).$$

Jetzt müssen wir noch prüfen, dass $\iota_v \omega$ eine Determinantenfunktion ist. Wir zeigen die Homogenität in jedem Argument und die Scherungsinvarianz.

- Sei k ein Skalar, seien $w_1, \dots, w_{n-1} \in V$ und $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann folgt aus der Homogenität von ω

$$
\begin{aligned}
&\iota_v\omega([w_1], \dots, [w_{j-1}], k \cdot [w_j], [w_{j+1}], \dots, [w_{n-1}]) \\
&\qquad = \omega(v, w_1, \dots, w_{j-1}, k \cdot w_j, w_{j+1}, \dots, w_{n-1}) = k \cdot \omega(v, w_1, \dots, w_{n-1}) \\
&\qquad = k \cdot \iota_v\omega([w_1], \dots, [w_{n-1}]).
\end{aligned}
$$

- Ist k ein Skalar und $i \neq j$, so folgt aus der Scherungsinvarianz von ω

$$
\begin{aligned}
&\iota_v\omega([w_1], \dots, \underbrace{[w_i] + k \cdot [w_j]}_{i}, \dots, [w_{n-1}]) \\
&\qquad = \omega(v, w_1, \dots, \underbrace{w_i + k \cdot w_j}_{i}, \dots, w_{n-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{n-1}) \\
&\qquad = \iota_v\omega([w_1], \dots, [w_{n-1}]).
\end{aligned}
$$

b) Unmittelbar aus der Definition der Vektorraumstruktur auf der Menge der Determinantenfunktionen folgt

$$\iota_v(\omega_1 + \omega_2) = \iota_v(\omega_1) + \iota_v(\omega_2), \qquad \iota_v(k \cdot \omega_1) = k \cdot \iota_v(\omega_1)$$

für Determinantenfunktionen ω_1, ω_2 auf V und skalares k. Also ist ι_v linear.

Da der Raum der Determinantenfunktionen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum die Dimension 1 hat, genügt es zu zeigen, dass ι_v injektiv ist.

Sei $\iota_v\omega = 0$. Wir ergänzen v zu einer Basis $(v, w_1, \dots, w_{n-1})$ von V. Dann gilt

$$0 = \iota_v\omega([w_1], \dots, [w_{n-1}]) = \omega(v, w_1, \dots, w_{n-1}),$$

d.h. ω verschwindet auf einer Basis, und damit muss $\omega = 0$ sein, denn jede Determinantenfunktion ist durch den Wert auf einer beliebigen Basis bestimmt.

Aufgabe 8: Ein scharfer Blick auf die Folge offenbart, dass die lineare Abbildung L durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ihr charakteristisches Polynom ist $X(X-1) - 1 = X^2 - X - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Die Eigenwerte sind $(1-\sqrt{5})/2$ und $(1+\sqrt{5})/2$ mit dazugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Da L zwei verschiedene Eigenwerte hat, sind die Eigenräume die von jedem dieser Vektoren erzeugten Unterräume. Wir sehen so

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} v_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} v_2 \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n v_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n} \\ \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9:

Behauptung. *Für jeden Eigenwert λ von A gilt $B(E_\lambda) \subset E_\lambda$.*

Beweis. Ist $v \in E_\lambda$, so gilt $A(v) = \lambda \cdot v$. Daraus folgt

$$A(B(v)) = B(A(v)) = B(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot B(v),$$

also $B(v) \in E_\lambda$. $\square$

Behauptung. *Es gibt eine Basis, bezüglich welcher sowohl A als auch B durch eine Matrix in Diagonalgestalt dargestellt wird*

Beweis. Wir bezeichnen mit E_λ^A die Eigenräume der Matrix A und mit E_μ^B diejenigen der Matrix B. Nach Voraussetzung sind A und B diagonalisierbar, d.h. es gilt

$$\bigoplus_\lambda E_\lambda^A = K^n = \bigoplus_\mu E_\mu^B.$$

Wir zeigen nun

$$K^n = \bigoplus_{\lambda,\mu} E_\lambda^A \cap E_\mu^B,$$

denn daraus folgt, dass K^n eine Basis hat, die aus gemeinsamen Eigenvektoren von A und B besteht.

Jedes $x \in K^n$ hat eine eindeutige Zerlegung $x = \sum_\mu x_\mu$ mit $x_\mu \in E_\mu^B$. Wir können nun jedes der x_μ wieder auf genau eine Weise in Eigenvektoren von A zerlegen, also $x_\mu = \sum_\lambda x_{\lambda,\mu}$ mit $x_{\lambda,\mu} \in E_\lambda^A$. Damit haben wir

$$x = \sum_\mu x_\mu = \sum_{\lambda,\mu} x_{\lambda,\mu},$$

wobei jedes $x_{\lambda,\mu}$ ein Element des Eigenraums E_λ^A ist. Wir müssen $x_{\lambda,\mu} \in E_\mu^B$ zeigen.

Nach Definition von x_μ gilt

$$\sum_\lambda B(x_{\lambda,\mu}) = B(x_\mu) = \mu \cdot x_\mu = \sum_\lambda \mu \cdot x_{\lambda,\mu}$$

Nach Teil a) der Aufgabe gilt aber $Bx_{\lambda,\mu} \in E_\lambda^A$, d.h. jede dieser beiden Summen stellt eine Zerlegung des Vektors $B(x_\mu)$ in Eigenvektoren der Matrix A zu verschiedenen Eigenwerten dar. Da eine solche Zerlegung eindeutig ist, muss $B(x_{\lambda,\mu}) = \mu \cdot x_{\lambda,\mu}$ gelten, also ist $x_{\lambda,\mu} \in E_\mu^B$. $\square$