1. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 30.10.03 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Finden Sie reelle Zahlen a, b, c, so dass

$$a \cdot (2, -3, 1) + b \cdot (1, 2, -2) + c \cdot (2, 5, -3) = (3, 7, 5)\,.$$

2 Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt

a) Parallelogramm-Identität:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2 \;;$$

b) Polarisationsformel:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4 \cdot \langle x, y\rangle\,.$$

3 **Definition:**
Ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass

(1) $(0, \ldots, 0) \in U$;

(2) $x + y \in U$ für alle $x, y \in U$;

(3) $a \cdot x \in U$ für alle $x \in U$ und alle $a \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum $U \in \mathbb{R}^n$ (mit "+", "·" und $0_U = (0, \ldots, 0)$ wie $(1) - (3)$) ein Vektorraum ist. Überprüfen Sie dazu, dass alle Vektorraumaxiome erfüllt sind.

4 Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ fest vorgegebene Vektoren. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{a \cdot u + b \cdot v \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

b) $S^2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\|^2 = 1\}$

c) $v^\perp = \{x \mid \langle v, x\rangle = 0\}$