10. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 15.01.04 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Gegeben seien k Vektoren $x_1, \dots, x_k \in K^n$. Um eine Basis des Unterraums $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ zu finden, schreiben Sie die Vektoren als Spalten in eine Matrix. Diese bringen Sie durch Zeilenumformungen auf (nicht notwendig strenge) Zeilenstufenform wie in Definition 2.25 mit den „Stufen“ $1 \le j_1 < \cdots < j_r \le k$.

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ eine Basis von $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ bilden.
2. Finden Sie eine Basis des von den Vektoren $v_{ij} = e_i - e_j \in K^n$ aufgespannten Unterraums, wobei $1 \le i < j \le n$.

2 Welche Dimension hat der Unterraum $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle \subset \mathbb{R}^4$, der von den unten angegebenen Vektoren aufgespannt wird? Wählen Sie Elemente in $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, die eine Basis von U bilden.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3 Sei $K = F_2$ der Körper mit zwei Elementen, und sei $V = K^2$. Konstruieren Sie eine Abbildung $\omega\colon V^2 \to K$, die bilinear ist und antisymmetrisch, aber nicht alternierend.

4 Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\omega\colon (K^2)^2 \longrightarrow K \qquad \text{mit} \quad \omega\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = k \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

für $k \in K$ eine Determinantenfunktion ist, und dass jede Determinantenfunktion auf K^2 von dieser Form ist (ohne zu verwenden, dass der Raum aller Determinantenfunktionen eindimensional ist).