11. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I
im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 22.01.04 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Eine Basis (v_1, v_2, v_3) des $\mathbb{R}^3$, eine Basis (w_1, w_2) des $\mathbb{R}^2$ und zwei Matrizen $A, B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die bzgl. der Standardbasen durch A beschrieben wird. Bestimmen Sie die Matrix von F bzgl. der Basen (v_1, v_2, v_3) und (w_1, w_2).

b) Die Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ habe bzgl. der Basen (v_1, v_2, v_3) und (w_1, w_2) die Matrix B. Welche Matrix hat G bzgl. der Standardbasen?

2 Berechnen Sie die Determinante der rationalen Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i, j \leq n$ mit $i \neq j$ ist die Transposition $\tau_{i,j} \in S(n)$ die Permutation mit

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j \text{ für } k = i, \\ i \text{ für } k = j, \\ k \text{ sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

a) Jede Permutation $\sigma \in S(n)$ lässt sich für ein geeignetes l als Produkt $\sigma = \mathrm{id} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_l$ schreiben, wobei jedes der σ_i eine Transposition ist.

b) Zu jedem $\sigma \in S(n)$ lässt sich eine Produktdarstellung wie in a) finden, bei der jedes σ_i eine Transposition τ_{k_i, k_i+1} benachbarter Elemente ist.

c) Für das Signum von $\sigma \in S(n)$ gilt $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{\#\{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \mid i<j, \sigma(i) > \sigma(j)\}}$.

BITTE WENDEN!

4 a) Sei K ein Körper und seien $x_0, \ldots, x_n \in K$. Als Vandermonde-Matrix bezeichnen wir die Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K)\,.$$

Zeigen Sie $\det V = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$.

Hinweis: Sie können die Matrix durch Zeilen- oder Spaltenumformungen so verändern, dass sich ihre Determinante mit Hilfe der Determinante einer kleineren Vandermonde-Matrix berechnen lässt. Das führt also auf einen Beweis durch vollständige Induktion über n.

b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und K ein Körper mit mehr als n Elementen. Beweisen Sie, dass die $n + 1$ Funktionen $K \to K$, $x \mapsto x^k$ für $k = 0, \ldots, n$ linear unabhängig sind.