12. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 29.01.04 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Invertieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

2 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Auf Blatt 11 wurde gezeigt, dass $V_n = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid \deg f \leq n\}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n+1$ ist und $W_n = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq n\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n+1$.

In ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ können wir die komplexe Zahl i einsetzen und erhalten so eine Zahl $f(i) \in \mathbb{C}$. Wir können aber auch für jedes *reelle* Polynom f die Zahl $f(i) \in \mathbb{C}$ definieren, denn die Inklusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ induziert eine Inklusion $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Beweisen Sie (etwa mit Hilfe von Division mit Rest):

a) Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\{f \in V_n \mid f(i) = 0\}$ ist isomorph zu V_{n-1}.

b) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\{f \in W_n \mid f(i) = 0\}$ ist isomorph zu W_{n-2}.

3 Für jeden Körper K können wir das Polynom $P = X^3 - X^2 + X - 1$ als Element des Polynomrings $K[X]$ betrachten. Zerlegen Sie P sowohl in $\mathbb{C}[X]$ als auch in $F_{17}[X]$ in Linearfaktoren, wobei F_{17} den Körper $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ bezeichne.

4 Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$.

a) Als *Adjunkte* von A bezeichnen wir die Matrix $\tilde{A} = (c_{ij}) \in M_n(K)$ mit $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$, wobei $A_{ji} \in M_{n-1,n-1}(K)$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen von Zeile j und Spalte i entsteht. Beweisen Sie $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E_n$.

b) Sei $A \in GL(n, K)$, $b \in K^n$ und sei $x \in K^n$ die Lösung von $A \cdot x = b$. Beweisen Sie die Cramersche Regel, die besagt, dass sich die k-te Komponente x_k von x auf folgende Weise bestimmen lässt:
Die Matrix A'_k gehe aus A hervor, indem man die k-te Spalte durch den Spaltenvektor b ersetzt. Dann ist $x_k = (\det A)^{-1} \cdot \det A'_k$.