

13. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2003/2004 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Donnerstag, den 05.02.04
vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

- 1** Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume in \mathbb{C}^3 zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -7 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Einer der Eigenwerte ist 1.

- 2** Wir erinnern daran, dass die Spur $\text{tr}(C)$ einer quadratischen Matrix C die Summe ihrer Diagonaleinträge ist. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und es seien Matrizen $A \in M_{m,n}(K)$ und $B \in M_{n,m}(K)$ gegeben. Zeigen Sie:

- a) Es gilt $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- b) Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: M_{m,n}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\langle S, T \rangle = \text{tr}(ST^t)$ definiert ein Skalarprodukt auf $M_{m,n}(\mathbb{R})$ im Sinne von Definition 0.14 der Vorlesung.

- 3** Ein Endomorphismus F eines n -dimensionalen K -Vektorraums V heißt *zyklisch mit Erzeuger* $v \in V$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $F^0(v) = v$, $F^1(v) = F(v)$, $F^2(v) = F(F(v))$, \dots , $F^N(v)$ ein Erzeugendensystem von V bilden.

- a) Zeigen Sie, dass bereits $F^0(v), \dots, F^{n-1}(v)$ den Raum V erzeugen und sogar eine Basis bilden.
- b) Welche Gestalt hat die Matrix A von F bezüglich dieser Basis? Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_F = \chi_A$.
- c) Wie hängt die Matrix A von der Wahl des Erzeugers $v \in V$ ab?

Die Gestalt der obigen Matrix A heißt auch *zyklische Normalform*.

- 4** Seien $a > b > 0$, $d > c > 0$ und $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$. Finden Sie eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ mit } f'' = A \cdot f \text{ und } f_i(0) = x_i, f'_i(0) = y_i \text{ für } i = 1, 2.$$

Anleitung: Diagonalisieren Sie A , und verfahren Sie weiter wie in Beispiel 3.45 der Vorlesung. Verwenden Sie die Funktionen c_λ und s_λ aus Beispiel 3.38(3).