13. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 05.02.04 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume in $\mathbb{C}^3$ zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -7 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Einer der Eigenwerte ist 1.

2 Wir erinnern daran, dass die Spur $\operatorname{tr}(C)$ einer quadratischen Matrix C die Summe ihrer Diagonaleinträge ist. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und es seien Matrizen $A \in M_{m,n}(K)$ und $B \in M_{n,m}(K)$ gegeben. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon M_{m,n}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ mit $\langle S, T \rangle = \operatorname{tr}(ST^t)$ definiert ein Skalarprodukt auf $M_{m,n}(\mathbb{R})$ im Sinne von Definition 0.14 der Vorlesung.

3 Ein Endomorphismus F eines n-dimensionalen K-Vektorraums V heißt *zyklisch mit Erzeuger* $v \in V$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $F^0(v) = v$, $F^1(v) = F(v)$, $F^2(v) = F(F(v))$, $\dots$, $F^N(v)$ ein Erzeugendensystem von V bilden.

a) Zeigen Sie, dass bereits $F^0(v), \dots, F^{n-1}(v)$ den Raum V erzeugen und sogar eine Basis bilden.

b) Welche Gestalt hat die Matrix A von F bezüglich dieser Basis? Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_F = \chi_A$.

c) Wie hängt die Matrix A von der Wahl des Erzeugers $v \in V$ ab?

Die Gestalt der obigen Matrix A heißt auch *zyklische Normalform.*

4 Seien $a > b > 0$, $d > c > 0$ und $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$. Finden Sie eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } f'' = A \cdot f \text{ und } f_i(0) = x_i,\ f_i'(0) = y_i \text{ für } i = 1, 2.$$

Anleitung: Diagonalisieren Sie A, und verfahren Sie weiter wie in Beispiel 3.45 der Vorlesung. Verwenden Sie die Funktionen c_λ und s_λ aus Beispiel 3.38(3).