14. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 12.02.04 vor der Vorlesung

Diese Aufgaben sind **Bonusaufgaben** *und gehen nicht in die Mindestpunktzahl für die Scheinvergabe ein.*

1 Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren mit den Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ in der vorgegebenen Reihenfolge durch für

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2 Sei B eine symmetrische Bilinearform auf V. Die Teilmenge $\ker B \subset V$ wird definiert durch $\ker B = \{v \in V \mid B(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$. Zeigen Sie:

a) $\ker B$ ist ein Untervektorraum,

b) B induziert eine symmetrische Bilinearform $\bar{B}$ auf $V/\ker B$ durch $\bar{B}([v],[w]) = B(v,w)$,

c) die Bilinearform $\bar{B}$ ist nicht ausgeartet.

3 Beweisen Sie:

a) Wenn $P(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt mit $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, dann gilt auch $P(\bar{\lambda}) = 0$.

b) Für jede Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ hat das charakteristische Polynom χ_A eine reelle Nullstelle.

c) Sei $A \in SL(3,\mathbb{R}) = \{G \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det G = 1\}$, dann hat A einen positiven reellen Eigenwert.

d) Sei $A \in O(3)$, d.h. für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle$, dann hat A einen Eigenwert ± 1. Ist $A \in SO(3) = O(3) \cap SL(3,\mathbb{R})$, so ist 1 ein Eigenwert von A.

4 Auf Blatt 4 und Blatt 6 wurde für jedes $q \in S^3 = Sp(1) \subset \mathbb{H}$ eine Drehung $f_q \in SO(3)$ definiert. Zeigen Sie:

a) $f_q = f_w \;\Leftrightarrow\; q = \pm w$.

b) Jedes $A \in SO(3)$ ist eine Drehung um einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 (verwenden Sie Aufgabe 3).

c) Jedes $A \in SO(3)$ ist von der Gestalt $A = f_q$, $q \in Sp(1)$.

Fazit: Es gilt $SO(3) = Sp(1)/\pm 1$.