

4. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2003/2004 BEI PROF. DR. S. GOETTE

*Abgabe Donnerstag, den 20.11.03
vor der Vorlesung*

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt*

1 Stellen Sie die folgenden Elemente des Körpers $F_7 = \mathbb{Z}/7$ als $[k]$ dar mit $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$

$$[4] + [5], \quad [4] \cdot [5], \quad [3]^{-1}, \quad [5]/[4]$$

2 Sei $M = \{0, 1, a, b\}$.

- a) Bestimmen Sie eine Verknüpfung $+: M \times M \rightarrow M$, so dass $(M, +, 0)$ eine Gruppe wird, in der $m + m = 0$ für alle $m \in M$ gilt. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
- b) Bestimmen Sie eine Verknüpfung $\cdot: M \times M \rightarrow M$, so dass $(M, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper wird. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
- c) Finden Sie alle Lösungen von $x^2 + x + 1 = 0$ in $F_2 = \mathbb{Z}/2$ und in $F_4 = (M, +, \cdot, 0, 1)$.

3 Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe.

- a) Es sei $g \in G$. Zeigen Sie: Die Abbildung $f_g: G \rightarrow G, h \mapsto ghg^{-1}$ ist ein Gruppenautomorphismus.
- b) Die Abbildung $G \rightarrow \text{Aut } G, g \mapsto f_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- c) Berechnen Sie $f_g(h)$ für $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in G = S(3)$.

4 Für $q \in S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid q\bar{q} = 1\}$ sei $f_q: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ gegeben durch $f_q(w) = q \cdot w \cdot \bar{q}$.

- a) Zeigen Sie: f_q ist ein Schiefkörperautomorphismus und orthogonal, d.h., es gilt $\|f_q(w)\| = \|w\|$ für alle $w \in \mathbb{H}$.
- b) Folgern Sie mit Aufgabe 2b) von Blatt 1, dass $\langle f_q(v), f_q(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ gilt für alle $v, w \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt.
- c) Beweisen Sie: f_q bildet reelle Quaternionen auf reelle ab und imaginäre auf imaginäre.