

5. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2003/2004 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Donnerstag, den 27.11.03
vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Sei

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Unterkörper von \mathbb{R} .
- Die Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ ist ein Körperautomorphismus.

2 Bilden Sie alle möglichen Produkte $A \cdot B$ von reellen Matrizen mit

$$A, B \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

3 Welche der folgenden Abbildungen F, G, H zwischen K -Vektorräumen sind linear?

- $K = \mathbb{C}, F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $F \left(\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} w \\ \bar{z} \end{pmatrix}$;
- $K = F_3 = \mathbb{Z}/3, G : F_3^2 \rightarrow F_3$ mit $G \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = [2] \cdot b - a$;
- $K = \mathbb{R}, H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $H \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x - y \\ y - 2 \\ 2 \cdot x \end{pmatrix}$;

4 Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| = 1$ bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

Wir betrachten $R_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $R_x(y) = x \times y + \langle x, y \rangle \cdot x$.

- Beweisen Sie die Linearität von R_x und geben Sie die zugehörige Matrix an.
- Wie wirkt R_x auf Vielfache von x und auf Vektoren senkrecht zu x ?
- Was ist die geometrische Bedeutung von R_x ?