5. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I
im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 27.11.03 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Sei

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$.

b) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ ist ein Körperautomorphismus.

2 Bilden Sie alle möglichen Produkte $A \cdot B$ von reellen Matrizen mit

$$A, B \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

3 Welche der folgenden Abbildungen F, G, H zwischen K-Vektorräumen sind linear?

a) $K = \mathbb{C}, F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit $F\left(\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w \\ \bar{z} \end{pmatrix}$;

b) $K = F_3 = \mathbb{Z}/3$, $G : F_3^2 \to F_3$ mit $G\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = [2] \cdot b - a$;

c) $K = \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ y - 2 \\ 2 \cdot x \end{pmatrix}$;

4 Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| = 1$ bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

Wir betrachten $R_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $R_x(y) = x \times y + \langle x, y \rangle \cdot x$.

a) Beweisen Sie die Linearität von R_x und geben Sie die zugehörige Matrix an.

b) Wie wirkt R_x auf Vielfache von x und auf Vektoren senkrecht zu x?

c) Was ist die geometrische Bedeutung von R_x?