6. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I
im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 04.12.03 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Finden Sie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2 Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $p \in \operatorname{End} V$ heißt *Projektion*, wenn $p \circ p = p$ gilt. Zeigen Sie, dass für jede Projektion p gilt

a) $\mathrm{id}_V - p$ ist auch eine Projektion,

b) $V = \ker p \oplus \operatorname{im} p$.

Wie sieht die Zerlegung aus b) für die Projektion $\mathrm{id}_V - p$ aus?

3 Sei K ein Körper und sei

$$V = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in K \text{ und es existiert } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a_i = 0 \text{ für alle } i \geq n\}$$

die Menge der endlichen K-wertigen Folgen.

a) Zeigen Sie, dass V mit

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad k \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

einen K-Vektorraum bildet.

b) Finden Sie Isomorphismen $F : V \oplus K \to V$ und $G : V \oplus V \to V$.

4 Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| = 1$. Wir betrachten $q = (\cos\varphi, \sin\varphi \cdot x) \in \mathbb{H}$.

a) Zeigen Sie $q\overline{q} = 1$. (Sie können die Formel $\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$ verwenden.)

b) Sei $f_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung aus Aufgabe 4 von Blatt 4, d.h.

$$f_q(y) = q \cdot (0, y) \cdot \overline{q} \in \operatorname{im} \mathbb{H} = \mathbb{R}^3.$$

Wie wirkt f_q auf Vielfache von x, und wie auf Vektoren senkrecht zu x?

c) Versuchen Sie, f_q geometrisch zu beschreiben.