7. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 11.12.03 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Ist $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ eine Matrix, so wird deren *transponierte Matrix* $A^t \in M_{n,m}(K)$ definiert durch

$$A^t = (k_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \quad \text{mit } k_{ij} = a_{ji}.$$

Zeigen Sie: Für alle $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$ gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

2 Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?

a) $\{(x, y) \mid x \leq y\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

b) $\{(x, y) \mid \text{ es existieren } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n = y^m\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

c) $\{(A, B) \mid B = QAQ^{-1} \text{ für ein } Q \in GL(n, K)\} \subset M_n(K) \times M_n(K)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist und K ein beliebiger Körper;

d) $\{(p, q) \mid |p - q| < 1\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3 Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung $F_A : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$, die beschrieben wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Q}).$$

Versuchen Sie dazu, jeweils möglichst wenige Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Q}^3$ bzw. $w_1, \dots, w_l \in \mathbb{Q}^4$ zu finden, so dass gilt

$$\ker F = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}\} \quad \text{und}$$
$$\operatorname{im} F = \{b_1 w_1 + \cdots + b_l w_l \mid b_1, \dots, b_l \in \mathbb{Q}\}.$$

4 Wir wissen bereits aus der Vorlesung, dass $F_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein Körper ist. Welche Untervektorräume hat der F_3-Vektorraum $F_3^2 = F_3 \oplus F_3$?