8. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 18.12.03 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

1 Sei V der Vektorraum der endlichen Folgen in $\mathbb{R}$ aus Aufgabe 3, Blatt 6. Auf der Menge $W = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid w_i \in \mathbb{R}\}$ aller reellen Folgen definieren wir eine Vektorraumstruktur durch

$$\begin{aligned} (w_i)_{i\in\mathbb{N}} + (w_i')_{i\in\mathbb{N}} &= (w_i + w_i')_{i\in\mathbb{N}} && \text{für } (w_i)_{i\in\mathbb{N}},\ (w_i')_{i\in\mathbb{N}} \in W, \\ k \cdot (w_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (k \cdot w_i)_{i\in\mathbb{N}} && \text{für } k \in \mathbb{R} \text{ und } (w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) Die Folgen $e_j = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$ bilden eine Basis von V (δ_{ij} ist das Kroneckersymbol).

b) Jedes $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W$ definiert eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$ durch $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} w_i v_i$.

c) Die in b) gegebene Abbildung $W \to V^*$ ist ein Isomorphismus.

2 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Beweisen Sie, dass die folgende Abbildung $\varphi : V \to V^*$ linear und injektiv ist: $\varphi(x) = \alpha$ mit $\alpha(v) = \langle x, v\rangle$.

3 Sei V der Vektorraum der endlichen reellen Folgen wie in Aufgabe 1. Für zwei Elemente $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(v_i')_{i\in\mathbb{N}}$ von V setzen wir

$$\langle (v_i)_{i\in\mathbb{N}}, (v_i')_{i\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} v_i v_i'.$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein Skalarprodukt auf V definiert wird. Ist die Abbildung $\varphi : V \to V^*$ aus Aufgabe 2 in diesem Beispiel surjektiv?

4 a) Überprüfen Sie, dass die folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standard-Skalarprodukts bilden:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. In Aufgabe 4 auf Blatt 5 wurde die Drehung R_x um x um den Winkel $\pi/2 = 90°$ eingeführt. Welche Matrix hat R_x bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3) aus Teil a)?