9. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

im WS 2003/2004 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 08.01.04 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Vier der acht Aufgaben auf diesem Blatt sind Zusatzaufgaben.

1 Bestimmen Sie alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}$ und alle $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} [1] & [2] & [0] \\ [2] & [1] & [3] \\ [3] & [2] & [1] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4] \\ [2] \\ [3] \end{pmatrix}.$$

2 Wir definieren die Ebenen $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ mit Hilfe eines Gleichungssystems.

3 Seien V und W K-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$. Beweisen Sie:

a) Gilt $n \geq m$, so gibt es eine surjektive lineare Abbildung $F : V \to W$.

b) Ist $n \leq m$, so existiert eine injektive lineare Abbildung $F : V \to W$.

4 Zeigen Sie, dass es keine Unterräume im $\mathbb{R}^3$ außer denen gibt, die in Beispiel 1.59 der Vorlesung aufgezählt wurden.

5 Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum.

a) Zeigen Sie $(V/U)^* \cong \left\{ \alpha \in V^* \mid \alpha|_U = 0 \right\}$.

b) Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade $\{\lambda \cdot (3,1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Finden Sie eine Basis von $(\mathbb{R}^3/U)^*$.

6 Beweisen Sie, dass eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ genau dann invertierbar ist, wenn gilt $ad - bc \neq 0$. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

7 Sei $V = K^n$ mit einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$, und sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die dazu duale Basis von V^*. Sei $(\varepsilon_1, \_, \varepsilon_n)$ die zur Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ duale Basis von V^*. Wir definieren einen Isomorphismus $\Phi : V^* \to V$ durch $\Phi(\alpha_i) = v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

a) Bestimmen Sie die Matrix B von Φ bezüglich $(e_1, \dots, e_n)$ und $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ aus der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$, wobei A definiert ist durch $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

b) Unter welcher Bedingung an A ist B die Einheitsmatrix?

8 a) Beweisen Sie: Ein Vektorraum V ist genau dann nicht endlich erzeugt, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein n-Tupel linear unabhängiger Vektoren gibt.

b) Der Raum der polynomialen Funktionen

$$\left\{ x \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0;\ a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R} \right\} \subset \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$$

ist nicht endlich erzeugt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $1, x, x^2, \dots, x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ linear unabhängig sind.