Oliver Fabert
Patrick Graf

29. Oktober 2012
Blatt 1

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 6. November, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 1 *(4 Punkte)* Sei X der Simplizialkomplex, den man aus einem 2-Simplex durch Identifizieren der drei Eckpunkte erhält. Berechnen Sie die simplizialen Homologiegruppen von X.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß Simplizialkomplexe, die durch Verkleben von endlich vielen Simplizes entstehen, kompakt sind.

b) Zeigen Sie, daß ein Simplizialkomplex, der aus endlich vielen 2-Simplizes durch paarweises Identifizieren von Kanten entsteht, lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)* Betrachten Sie die folgende Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$ mit der induzierten Topologie:

$$X = \big\{(x, y) \bigm| (x-1)^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x, y) \bigm| (x+1)^2 + y^2 = 1\big\}.$$

X ist die Vereinigung von zwei Kreisen, die sich tangential schneiden. Wir versehen X mit der offensichtlichen Struktur eines Simplizialkomplexes. Berechnen Sie $\pi_1(X, 0)$ und $H_1^\Delta(X)$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall gilt:

$$H_1^\Delta(X) \cong \pi_1(X, 0)\big/[\pi_1(X, 0), \pi_1(X, 0)],$$

wobei $[\pi_1(X, 0), \pi_1(X, 0)]$ die Kommutatoruntergruppe bezeichnet.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)* Sei

$$X = (S^1 \times \mathbb{N}) \,/ \sim,$$

wobei $(1, n) \sim (1, m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten X mit der Quotiententopologie. Sei außerdem

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten Y mit der induzierten Topologie. Zeigen Sie, daß X und Y nicht homöomorph sind.
Hinweis: Betrachten Sie $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, y)$ für geeignete Punkte und offene Umgebungen $x \in U \subset X$ und $y \in V \subset Y$.