Oliver Fabert
Patrick Graf

12. November 2012
Blatt 3

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 20. November, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 9 *(4 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum. Ein Teilraum $A \subset X$ heißt *Retrakt* von X, falls es eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ gibt mit $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Zeigen Sie: Wenn A ein Retrakt von X ist, dann sind die von der Inklusion induzierten Abbildungen $H_k(A) \to H_k(X)$ injektiv.

Aufgabe 10 *(4 Punkte)* Seien $K_\bullet, L_\bullet$ zwei Kettenkomplexe von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:

i) Die Menge $\mathrm{Hom}(K_\bullet, L_\bullet)$ der Kettenabbildungen $K_\bullet \to L_\bullet$ ist auf natürliche Weise eine abelsche Gruppe.

ii) Die nullhomotopen Abbildungen in $\mathrm{Hom}(K_\bullet, L_\bullet)$ bilden eine Untergruppe.

iii) Die Relation „f ist homotop zu g“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}(K_\bullet, L_\bullet)$.

Aufgabe 11 *(4 Punkte)* Existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0$$

von abelschen Gruppen?

Aufgabe 12 *(4 Punkte)* Sei $A \to B \to C \to D \to E$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

i) $C = 0$,

ii) $A \to B$ ist surjektiv und $D \to E$ ist injektiv.