Oliver Fabert
Patrick Graf

19. November 2012
Blatt 4

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 27. November, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 13 *(4 Punkte)* Sei (X, A) ein Paar (bestehend aus einem topologischen Raum X und einem Teilraum $A \subset X$).

a) Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

   i) $H_1(X, A) = 0$,

   ii) $H_1(A) \to H_1(X)$ ist surjektiv, und jede Wegzusammenhangskomponente von X enthält höchstens eine Wegzusammenhangskomponente von A.

b) Sei nun $X = S^2$ und A eine endliche Teilmenge von X. Berechnen Sie die relativen Homologiegruppen $H_k(X, A)$.

Aufgabe 14 *(4 Punkte)* Seien $K_\bullet, L_\bullet, M_\bullet$ Kettenkomplexe von abelschen Gruppen. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hot}(K_\bullet, L_\bullet)$ die Gruppe der Kettenabbildungen $K_\bullet \to L_\bullet$ modulo Homotopie. Nach Aufgabe 10 handelt es sich dabei tatsächlich um eine Gruppe. Zeigen Sie, daß die Kompositionsabbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hot}(K_\bullet, L_\bullet) \times \mathrm{Hot}(L_\bullet, M_\bullet) & \to & \mathrm{Hot}(K_\bullet, M_\bullet), \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f, \end{array}$$

wohldefiniert ist.

Aufgabe 15 *(4 Punkte)* Sei $X = [0, 1]$ das Einheitsintervall und $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 0\right\} \subset X$. Zeigen Sie, daß $H_1(X, A) \ncong \widetilde{H}_1(X/A)$.

Hinweis: Vgl. Aufgabe 4.

Aufgabe 16 *(4 Punkte)* Sei $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren, d.h. $f(A) \subset B$. Wir sagen, daß f eine *Homotopieäquivalenz von Paaren* ist, falls es eine Abbildung $g : (Y, B) \to (X, A)$ gibt, sodaß $f \circ g$ und $g \circ f$ homotop zur jeweiligen Identität sind *durch eine Familie von Abbildungen von Paaren*.

Zeigen Sie, daß die Inklusion $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n - \{0\})$ keine Homotopieäquivalenz von Paaren ist, obwohl $D^n = D^n$ und $S^{n-1} \hookrightarrow D^n - \{0\}$ Homotopieäquivalenzen sind.

Hinweis: Zeigen Sie, daß eine Homotopieäquivalenz von Paaren Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen induziert. Zeigen Sie außerdem, daß eine Homotopieäquivalenz $(X, A) \to (Y, B)$ auch eine Homotopieäquivalenz $(X, \overline{A}) \to (Y, \overline{B})$ ist.