Oliver Fabert
Patrick Graf

26. November 2012
Blatt 5

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 4. Dezember, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 17 *(8 Punkte)* Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß die spezielle orthogonale Gruppe SO(3) zum reell-projektiven Raum $\mathbb{R}P^3$ homöomorph ist.

a) Zeigen Sie, daß jeder Endomorphismus $A \in \mathrm{SO}(3)$ den Eigenwert 1 hat, und daß $A\big|_{x^\perp} \in \mathrm{SO}(2)$, wobei x ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist.

b) Konstruieren Sie eine stetige surjektive Abbildung $f\colon D^3 \to \mathrm{SO}(3)$.

   Hinweis: Für $x \in D^3$ sei $f(x)(x) = x$.

c) Zeigen Sie: $f\big|_{\mathring{D}^3}$ ist injektiv und $f\big|_{S^2}$ ist $2:1$.

d) Folgern Sie, daß f einen Homöomorphismus $\mathbb{R}P^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(3)$ induziert.

Aufgabe 18 *(4 Punkte)* Sei $X = S^1 \times S^1$ der 2-Torus und $A_n \subset X$ eine endliche Teilmenge mit genau n Elementen. Berechnen Sie die Homologie des *punktierten Torus* $X - A_n$.

Hinweis: Ausschneidung und Induktion nach n.

Aufgabe 19 *(4 Punkte)*

i) Konstruieren Sie einen Kettenkomplex $K_\bullet$ von freien abelschen Gruppen, sodaß $H_{2k}(K_\bullet) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ und $H_{2k+1}(K_\bullet) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

ii) Zeigen Sie für das folgende kommutative Diagramm von abelschen Gruppen: Wenn alle Abbildungen bis auf eine Isomorphismen sind, so ist auch die verbleibende Abbildung ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C \arrow[r] & D. \arrow[u] \end{tikzcd}$$