Oliver Fabert
Patrick Graf

30. November 2012
Blatt 6

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 11. Dezember, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 20 *(4 Punkte)* Sei $f : K_\bullet \to L_\bullet$ eine Kettenabbildung von Kettenkomplexen von abelschen Gruppen. Der *Abbildungskegel von* f ist ein neuer Kettenkomplex $C_\bullet(f)$ und wird wie folgt definiert. Wir setzen

$$C_n(f) = K_{n-1} \oplus L_n$$

und definieren das Differential $C_n(f) \to C_{n-1}(f)$ in Blockmatrixschreibweise durch

$$\begin{pmatrix} -d^K_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d^L_n \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, daß $C_\bullet(f)$ ein Kettenkomplex ist.

b) Sei $K[-1]_\bullet$ der *geshiftete* Komplex mit $K[-1]_n = K_{n-1}$ und $d_n^{K[-1]} = -d^K_{n-1}$. Sei außerdem $L_\bullet \to C_\bullet(f)$ die Inklusion des zweiten Summanden und $C_\bullet(f) \to K[-1]_\bullet$ die Projektion auf den ersten Summanden. Zeigen Sie, daß die Abbildungen

$$K_\bullet \xrightarrow{f} L_\bullet \to C_\bullet(f) \to K[-1]_\bullet$$

Kettenabbildungen sind. Dieses Diagramm nennt man ein *ausgezeichnetes Dreieck*.

Aufgabe 21 *(4 Punkte)* Wir betrachten die n-Sphäre S^n, $n > 0$, als bestehend aus zwei n-Simplizes Δ^n_1 und Δ^n_2, die längs ihres Randes vermittels der Identität $\partial\Delta^n_1 \to \partial\Delta^n_2$ zusammengeklebt sind. Die Differenz $\Delta^n_1 - \Delta^n_2$ ist dann ein singulärer n-Zykel. Zeigen Sie, daß die Klasse von $\Delta^n_1 - \Delta^n_2$ in $H^n(S^n)$ ein Erzeuger von $H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 22 *(4 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren den *Kegel* $CX = (X \times [0,1])/\sim$, wobei $(x,1) \sim (x',1)$ für alle $x, x' \in X$. Wir definieren die *Einhängung* $SX = (X \times [0,1])/\sim$, wobei $(x,1) \sim (x',1)$ und $(x,0) \sim (x',0)$ für alle $x, x' \in X$.

i) Zeigen Sie, daß $\widetilde{H}_n(X) \cong \widetilde{H}_{n+1}(SX)$ für alle $n \geqslant 0$.

   Hinweis: Betten Sie $X \subset CX$ ein.

ii) Geben Sie explizit eine Abbildung $C_n(X) \to C_{n+1}(SX)$ an, die den Isomorphismus aus i) induziert.

Aufgabe 23 *(4 Punkte)* Beweisen Sie das Fünferlemma.