Oliver Fabert
Patrick Graf

17. Dezember 2012
Blatt 8

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 8. Januar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 28 *(4 Punkte)* Für natürliche Zahlen $k < n$ betrachten wir die k-Sphäre S^k als Teilraum der n-Sphäre S^n durch

$$S^k = \big\{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \bigm| x_{k+1} = \dots = x_n = 0\big\} \subset S^n.$$

Geben Sie eine CW-Struktur auf S^n an, bezüglich derer S^k ein Unterkomplex ist.

Aufgabe 29 *(4 Punkte)* Seien X, Y endliche CW-Komplexe, d.h. CW-Komplexe mit nur endlich vielen Zellen.

a) Zeigen Sie, daß auch $X \times Y$ mit der Produkttopologie ein endlicher CW-Komplex ist.

b) Zeigen Sie, daß auch die Einhängung SX ein endlicher CW-Komplex ist.

Aufgabe 30 *(4 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum, und seien $A, B \subset X$ Teilräume, sodaß $X = A^\circ \cup B^\circ$ die Vereinigung ihrer Inneren ist. Beschreiben Sie den verbindenden Homomorphismus

$$H_k(X) \to H_{k-1}(A \cap B)$$

aus der Mayer–Vietoris-Sequenz für $X = A \cup B$ so explizit wie möglich.

Aufgabe 31 *(4 Punkte)* Ziel dieser Aufgabe ist es, den *Fundamentalsatz der Algebra* zu beweisen: Jedes nichtkonstante Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

a) Wir betten $\mathbb{C} \subset S^2$ ein, sodaß das Komplement von $\mathbb{C}$ der Nordpol ist. Zeigen Sie, daß f zu einer stetigen Abbildung $\widehat{f}\colon S^2 \to S^2$ fortsetzt.

b) Zeigen Sie, daß der Abbildungsgrad von $\widehat{f}$ positiv ist.

c) Folgern Sie, daß f eine Nullstelle hat.

d) Folgern Sie als Zusatz, daß der Abbildungsgrad von $\widehat{f}$ gleich dem Grad des Polynoms f ist.