Oliver Fabert
Patrick Graf

7. Januar 2013
Blatt 9

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 15. Januar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 32 *(4 Punkte)* Sei H eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, daß die Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}(H,-): \quad \{\textit{abelsche Gruppen}\} & \to & \{\textit{abelsche Gruppen}\}, \\ G & \mapsto & \mathrm{Ext}(H,G), \end{array}$$

ein *kovarianter Funktor* ist, d.h.:

i) Jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \to G'$ induziert eine Abbildung $f_*: \mathrm{Ext}(H,G) \to \mathrm{Ext}(H,G')$.

ii) Es gilt $(\mathrm{id}_G)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(H,G)}$.

iii) Für Homomorphismen $G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} G''$ gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Aufgabe 33 *(4 Punkte)* Seien G, H abelsche Gruppen und $n \in \mathbb{Z}$. Sei $m_n: G \to G$ Multiplikation mit n, also $m_n(g) = ng$. Zeigen Sie, daß $(m_n)_*: \mathrm{Ext}(H,G) \to \mathrm{Ext}(H,G)$ auch Multiplikation mit n ist.

Aufgabe 34 *(4 Punkte)* Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Vermittels der kanonischen Projektion $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wird $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein R-Modul.

a) Finden Sie eine Auflösung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch freie R-Moduln.

b) Benutzen Sie diese Auflösung, um zu zeigen, daß $\mathrm{Ext}^n_R(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie verträgt sich das mit der Tatsache, daß $\mathrm{Ext}^n(H,G) = 0$ für $n \geqslant 2$?

Aufgabe 35 *(4 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum, und sei G eine abelsche Gruppe. Sei außerdem $\varphi \in C^1(X,G)$ ein Kozykel, und seien $\gamma_{1,2}: [0,1] \to X$ Wege in X. Dann können wir φ auf γ_i auswerten und erhalten ein Element von G. Zeigen Sie:

a) $\varphi(\gamma_1\gamma_2) = \varphi(\gamma_1) + \varphi(\gamma_2)$, falls $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Hierbei bezeichnet $\gamma_1\gamma_2$ die Hintereinanderausführung von γ_1 und γ_2 wie in der Definition der Fundamentalgruppe.

b) Wenn γ_1 konstant ist, so gilt $\varphi(\gamma_1) = 0$.

c) $\varphi(\gamma_1) = \varphi(\gamma_2)$, falls γ_1 und γ_2 gleiche Anfangs- bzw. Endpunkte haben und homotop sind unter einer Homotopie, die die Anfangs- und Endpunkte festläßt.

d) Sei nun X wegzusammenhängend und $x_0 \in X$. Dann erhalten wir einen injektiven Homomorphismus
$$H^1(X,G) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0), G).$$
Bemerkung: Man kann zeigen, daß diese Abbildung sogar ein Isomorphismus ist. Das folgt aus $H_1(X) = \pi_1(X,x_0)^{\mathrm{ab}}$ und dem universellen Koeffiziententheorem.