Oliver Fabert
Patrick Graf

14. Januar 2013
Blatt 10

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 22. Januar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Für Bachelor-, Master- und neue Lehramtsstudierende: Online-Anmeldung zur Klausur bis 27. Januar unter `http://www.verwaltung.uni-freiburg.de/qis`

Aufgabe 36 *(4 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum, der als Vereinigung $A \cup B$ von zwei offenen zusammenziehbaren Teilmengen geschrieben werden kann, und sei R ein Ring. Zeigen Sie, daß das cup-Produkt $\alpha \cup \beta$ von je zwei homogenen Kohomologieklassen $\alpha, \beta \in H^*(X, R)$ von positivem Grad verschwindet. Dies gilt insbesondere für Einhängungen $X = SY$.

Hinweis: Lange exakte Kohomologiesequenz eines Raumpaares.

Aufgabe 37 *(4 Punkte)* Seien $n > m$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, daß jede Abbildung $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$ die Nullabbildung $H^1(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2) \to H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2)$ induziert.

Aufgabe 38 *(8 Punkte)* Ziel dieser Aufgabe ist es, den *Satz von Borsuk–Ulam* zu beweisen: Für jede stetige Abbildung $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

a) Konstruieren Sie aus einem Gegenbeispiel zum Satz von Borsuk–Ulam eine Abbildung $g\colon S^n \to S^{n-1}$ mit $g(x) = -g(-x)$ für alle $x \in S^n$. Insbesondere induziert g eine Abbildung h wie in folgendem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "2:1"'] & S^{n-1} \arrow[d, "2:1"] \\ \mathbb{R}P^n \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}P^{n-1} \end{tikzcd}$$

b) Zeigen Sie, daß die induzierte Abbildung $h_*\colon \pi_1(\mathbb{R}P^n) \to \pi_1(\mathbb{R}P^{n-1})$ nichttrivial (d.h. nicht die Nullabbildung) ist.

c) Folgern Sie, daß die induzierte Abbildung $h_*\colon H_1(\mathbb{R}P^n) \to H_1(\mathbb{R}P^{n-1})$ nichttrivial ist.

d) Folgern Sie, daß die induzierte Abbildung $h^*\colon H^1(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}/2) \to H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2)$ nichttrivial ist. Dies ist ein Widerspruch zur vorigen Aufgabe. Damit ist der Satz von Borsuk–Ulam bewiesen.

e) Folgern Sie: Zu jedem Zeitpunkt gibt es auf der Erdoberfläche einen Punkt, an dem die gleiche Temperatur und der gleiche Luftdruck herrschen wie am antipodal gegenüberliegenden Punkt.