Oliver Fabert
Patrick Graf

22. Januar 2013
Blatt 11

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 29. Januar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Am Donnerstag, den 24. Januar keine Vorlesung!

Aufgabe 39 *(4 Punkte)* Sei $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß f unter jeder der folgenden beiden Bedingungen einen Fixpunkt besitzt.

a) n ist gerade,

b) n ist ungerade und $f^* \neq -\mathrm{id}$ auf $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$.

c) Geben Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ eine fixpunktfreie Abbildung $\mathbb{C}P^{2k-1} \to \mathbb{C}P^{2k-1}$ an.

Hinweis: Benutzen Sie für a) und b) ohne Beweis den *Lefschetzschen Fixpunktsatz*: Sei $f\colon X \to X$ eine Abbildung eines endlichen CW-Komplexes auf sich selber. Wenn die *Lefschetzzahl* von f,

$$L(f) := \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \operatorname{tr}\big(f_*\colon H_k(X,\mathbb{Q}) \to H_k(X,\mathbb{Q})\big),$$

nicht verschwindet, dann hat f einen Fixpunkt. Hierbei bezeichnet tr die Spur einer linearen Abbildung.

Aufgabe 40 *(4 Punkte)* Seien X, Y endliche CW-Komplexe. Wir definieren die *Eulercharakteristik* von X durch

$$\chi(X) := L(\mathrm{id}_X) = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \dim_{\mathbb{Q}} H_k(X,\mathbb{Q}).$$

Zeigen Sie: $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.

Aufgabe 41 *(4 Punkte)* Seien X, Y unendliche Mengen mit der diskreten Topologie. Zeigen Sie, daß die Kreuzproduktabbildung

$$H^*(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(Y,\mathbb{Z}) \to H^*(X \times Y,\mathbb{Z})$$

kein Isomorphismus ist, d.h. die Künneth-Formel gilt nicht ohne Endlichkeitsannahmen.

Aufgabe 42 *(4 Punkte)* Seien $k, \ell > 0$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, daß jede Abbildung $S^{k+\ell} \to S^k \times S^\ell$ die Nullabbildung $H_{k+\ell}(S^{k+\ell}) \to H_{k+\ell}(S^k \times S^\ell)$ induziert.