Oliver Fabert
Patrick Graf

28. Januar 2013
Blatt 12

Übungen zur Algebraischen Topologie

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 5. Februar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 43 *(4 Punkte)* Seien $f, g\colon K_\bullet \to L_\bullet$ zwei Kettenabbildungen von Kettenkomplexen von abelschen Gruppen, und seien $C_\bullet(f), C_\bullet(g)$ ihre Abbildungskegel, wie in Aufgabe 20. Zeigen Sie: wenn f und g homotop sind, dann sind $C_\bullet(f)$ und $C_\bullet(g)$ homotopieäquivalent.

Aufgabe 44 *(4 Punkte)* Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, und sei C_f der *Abbildungskegel* von f, definiert als der Quotient der disjunkten Vereinigung $CX \,\dot\cup\, Y$ nach der von $(x, 0) \sim f(x)$ erzeugten Äquivalenzrelation. Hierbei ist CX der Kegel über X wie in Aufgabe 22. Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

i) f ist nullhomotop.

ii) $Y \subset C_f$ ist Retrakt von C_f (siehe Aufgabe 9).

Aufgabe 45 *(4 Punkte)* Gegenstand dieser Aufgabe ist die *Hopf-Abbildung* $f\colon S^3 \to S^2$, definiert als

$$S^3 \subset \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2.$$

Die Hopf-Abbildung ist das einfachste Beispiel einer Abbildung, die auf Homologie trivial operiert, obwohl sie nicht nullhomotop ist.

a) Zeigen Sie, daß $f_*\colon \widetilde{H}_k(S^3) \to \widetilde{H}_k(S^2)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Nullabbildung ist.

b) Zeigen Sie, daß der Abbildungskegel von f homöomorph zu $\mathbb{C}P^2$ ist.

c) Folgern Sie, daß f nicht nullhomotop ist.

Hinweis: Benutzen Sie für c) Aufgabe 44 und ein Argument analog zu Aufgabe 37.

Aufgabe 46 *(4 Punkte)* Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, und sei $\pi\colon \mathcal{O}_M \to M$ ihre Orientierungsüberlagerung. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

i) M ist orientierbar.

ii) π hat einen *Schnitt*, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $s\colon M \to \mathcal{O}_M$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.

iii) $\mathcal{O}_M$ ist nicht zusammenhängend.

iv) $\mathcal{O}_M \cong M \times \{1, -1\}$ über M, d.h. so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_M \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \times \{1,-1\} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

kommutiert.