

Probe-Hauptklausur zur „Algebra und Zahlentheorie“

Aufgabe 1 (10 Punkte) Zerlegen Sie das Polynom

$$X^4 + 2X^2 + 4$$

in Linearfaktoren in $\mathbb{C}[X]$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, daß das Polynom

$$f(X) = X^p + X + 1$$

eine Nullstelle in \mathbb{F}_p hat.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie ein primitives Element der Erweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[2]{3}, \sqrt[3]{2}).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ und $K = \mathbb{Q}$. Berechnen Sie

$$N_{L/K}(1 + \sqrt[3]{2}) \text{ und } \text{Sp}_{L/K}(1 - \sqrt[3]{2}).$$

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es gilt allgemein für Kreisteilungspolynome

$$X^n - 1 = \prod_{d|n, d>0} \Phi_d.$$

Bestimmen Sie für $n = 10$ alle auftretenden Faktoren.

Aufgabe 6 (10 Punkte) Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 15 abelsch ist.