

Probe-Midterm-Klausur zur „Algebra und Zahlentheorie“

Aufgabe 1 (10 Punkte) Seien $f(X) = X^2$ und $g(X) = (2 - X)^2$. Finden Sie Polynome $u, v \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$uf + vg = 1.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte) Bestimmen Sie die Ideale

i) $(X^2 - 1) + (X^2 + X - 2)$,

ii) $(X^2 - 1) \cap (X^2 + X - 2)$.

indem Sie ein erzeugendes Element angeben.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen in \mathbb{Z} :

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \text{mod } 3 \\ x \equiv 1 & \text{mod } 5 \\ x \equiv 1 & \text{mod } 7 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{F}_p[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie, daß die Polynome

$$f_0 = f, f_1 = f(X + 1), \dots, f_{p-1} = f(X + p - 1)$$

entweder paarweise verschieden, oder alle gleich sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ über \mathbb{Q} .

Aufgabe 6 (10 Punkte) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L des Polynoms

$$X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$$

sowie den Erweiterungsgrad $[L : \mathbb{Q}]$.