Tomasz Szemberg
Patrick Graf

13. Oktober 2010
Blatt 0

Übungen zur „Algebra“

Die folgenden Aufgaben sind am 21./22. Oktober in den Übungsgruppen zu besprechen, keine Abgabe!

Aufgabe 1 Sei X eine Menge und 2^X die Menge aller Teilmengen von X. Wir definieren die folgende Operation:

$$2^X \times 2^X \ni (A, B) \mapsto A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in 2^X.$$

Zeigen Sie, daß folgende Eigenschaften gelten:

a) $A \div B = B \div A$;

b) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$;

c) $A \div \varnothing = A$;

d) für jede Teilmenge $A \in 2^X$ gibt es eine Teilmenge $B \in 2^X$ mit $A \div B = \varnothing$;

e) $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$;

f) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

g) $A \div B = (A \cap (X \setminus B)) \cup (B \cap (X \setminus A))$.

Aufgabe 2 Sei $\varphi(n)$ die Euler-Funktion (die Anzahl der Zahlen k in der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit $ggT(k, n) = 1$). Seien $p_1, \ldots, p_r$ die paarweise verschiedenen Primfaktoren von n. Zeigen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Aufgabe 3 Seien A, B reelle Matrizen der Dimension $n \times n$. Wir setzen

$$[A, B] := AB - BA.$$

Zeigen Sie die Identität

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Aufgabe 4 Seien A, B reelle Matrizen der Dimension $n \times n$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA).$$