Tomasz Szemberg
Patrick Graf

19. Oktober 2010
Blatt 1

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am 28./29. Oktober in den Übungsgruppen abzugeben und zu besprechen.

Aufgabe 5 *(5 Punkte)* Sei $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, daß $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{im}(\varphi)$ Untergruppen von G bzw. G' sind.

Aufgabe 6 *(5 Punkte)* Es sei G eine Gruppe, in der jedes Element zu sich selbst invers ist, d.h. $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, daß G abelsch ist.

Aufgabe 7 *(5 Punkte)* Sei X eine Menge, $Y \subset X$ eine Teilmenge, G eine Gruppe und G^X die Gruppe der G-wertigen Abbildungen auf X. Sei

$$N := \left\{ f \in G^X \,:\, f(y) = e \;\text{ für alle }\; y \in Y \right\}.$$

Zeigen Sie, daß N ein Normalteiler in G^X ist und daß $G^X/N \cong G^Y$ gilt.

Aufgabe 8 *(5 Punkte)* Sei m eine positive ganze Zahl und sei $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ die Untergruppe der Vielfachen von m. Für die Restklassen $a(m\mathbb{Z})$ und $b(m\mathbb{Z})$ definieren wir deren *Produkt* als

$$a(m\mathbb{Z}) \cdot b(m\mathbb{Z}) := (ab)(m\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, daß diese Verknüpfung wohldefiniert ist und begründen Sie, daß eine Restklasse $a(m\mathbb{Z})$ bezüglich dieses Produkts invertierbar ist genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$.