

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am 4./5. November in den Übungsgruppen abzugeben und zu besprechen.

Aufgabe 9 (5 Punkte) Führen Sie die Division mit Rest im Ring $\mathbb{Z}[X]$ für folgende Polynome durch:

$$f = 3X^5 + 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 4X + 7, \quad g = X^2 - 2X + 1;$$

$$f = X^5 + X^4 - 5X^3 + 2X^2 + 2X - 1, \quad g = X^2 - 1;$$

$$f = (X - 1)^d, \quad g = X - 1.$$

Aufgabe 10 (5 Punkte) Es sei $f = X^4$ und $g = (1 - X)^4$. Finden Sie Polynome u und v , für die gilt

$$uf + vg = 1.$$

Aufgabe 11 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Ideale in \mathbb{Z} , indem Sie ein erzeugendes Element angeben:

$$(2) + (3), \quad (4) + (6), \quad (2) \cap (3), \quad (4) \cap (6).$$

Aufgabe 12 (5 Punkte) Sei R ein Ring. Zeigen Sie, daß die Teilmenge

$$\{a \in R : \text{es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n = 0\}$$

ein Ideal in R definiert (das *Nilradikal* von R).