Tomasz Szemberg
Patrick Graf

10. November 2010
Blatt 4

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 16. November, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Bitte beachten Sie, daß Aufgabe 17 geändert wurde!

Aufgabe 17 *(5 Punkte)* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei R folgender Unterring von $\mathbb{K}[T]$:

$$R = \mathbb{K}[T^2, T^3] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \;\middle|\; a_1 = 0 \right\} \subset \mathbb{K}[T].$$

Zeigen Sie, daß R ein noetherscher Integritätsring ist, der nicht faktoriell ist.

Aufgabe 18 *(5 Punkte)* Zeigen Sie, daß der reelle Polynomring in abzählbar vielen Variablen $\mathbb{R}[X_1, X_2, \dots]$ faktoriell, aber nicht noethersch ist.

Aufgabe 19 *(5 Punkte)* Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 3 im Polynomring $\mathbb{F}_2[X]$ (dabei ist $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Aufgabe 20 *(5 Punkte)* Sei $\varphi(n)$ die Euler-Funktion (die Anzahl der Zahlen k in der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $ggT(k, n) = 1$). Zeigen Sie den folgenden Satz von Euler: Ist $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$, so gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Chinesischen Restsatz.