Tomasz Szemberg
Patrick Graf

11. November 2010
Blatt 5

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 23. November, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Aufgabe 21 *(5 Punkte)* Zeigen Sie, daß die Primfaktorzerlegung eines *homogenen* Polynoms in $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ auch aus *homogenen* Faktoren besteht.

Aufgabe 22 *(5 Punkte)* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f(X) = X^3 + aX + b$ ein Polynom in $\mathbb{K}[X]$, welches sich als Produkt von drei linearen Polynomen aus $\mathbb{K}[X]$ schreiben läßt. Zeigen Sie: $f(X)$ hat genau dann keine mehrfachen Nullstellen, wenn die *Diskriminante* $\Delta = -4a^3 - 27b^2$ nicht verschwindet (d.h. $\Delta \neq 0$).

Aufgabe 23 *(5 Punkte)* Sei R ein faktorieller Ring. Für ein Primelement $p \in R$ schreiben wir $S_p := R \setminus (p)$ und $R_p := S_p^{-1}R$.

Zeigen Sie, daß ein Polynom $f \in R[X]$ genau dann primitiv ist, wenn für jedes Primelement $p \in R$ das induzierte Polynom $f_p \in R_p[X]$ primitiv ist.

Aufgabe 24 *(5 Punkte)* Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f(Y), g(Y) \in \mathbb{K}[Y]$ teilerfremde Polynome mit $\mathrm{grad}(f(Y) \cdot g(Y)) \geq 1$. Zeigen Sie, daß das Polynom

$$f(Y) - g(Y) \cdot X$$

irreduzibel im Ring $(\mathbb{K}(X))[Y]$ ist.