Tomasz Szemberg
Patrick Graf

22. November 2010
Blatt 6

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 30. November, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Achtung! Übungsgruppe 5 findet ab dem 26.11. in Raum 414 statt!

Aufgabe 25 *(5 Punkte)* Zeigen Sie, daß die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind:

i) $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$,

ii) $(X-1)^2 \cdot (X-2)^2 \cdots (X-n)^2 + 1$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 26 *(5 Punkte)* Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $r \geq 1$ eine ganze Zahl und $q = p^r$. Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit genau q Elementen. Zeigen Sie, daß

$$X^q - X = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (X - a).$$

Aufgabe 27 *(15 Punkte)* Bestimmen Sie die Minimalpolynome von

i) $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$,

ii) $\sqrt[105]{9}$ über $\mathbb{Q}$,

iii) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$,

iv) $1 + \sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,

v) $2 - 3i$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 28 *(5 Punkte)* Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, daß für $a, b \in L$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) a, b sind algebraisch über K,

ii) $a + b, a \cdot b$ sind algebraisch über K.