Tomasz Szemberg
Patrick Graf

27. November 2010
Blatt 7

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 7. Dezember, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Aufgabe 29 *(5 Punkte)* Begründen Sie, daß jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich viele Elemente besitzt.

Aufgabe 30 *(5 Punkte)* Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung mit $[L : K] = n < \infty$. Sei $\alpha \in L$ ein Element, für das es n Körperautomorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : L \to L$ gibt, die Fortsetzungen der Identität auf K sind und für die gilt

$$\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha) \text{ für } i \neq j.$$

Zeigen Sie: $L = K[\alpha]$.

Aufgabe 31 *(10 Punkte)* Sei die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) =: L$ gegeben.

i) Bestimmen Sie den Erweiterungsgrad $[L : \mathbb{Q}]$.

ii) Zeigen Sie, daß L ein Zerfällungskörper von $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist.

iii) Zeigen Sie $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil iii) die Aufgabe 30 (auch wenn Sie keine Lösung der Aufgabe 30 selbst gefunden haben).

Aufgabe 32 *(5 Punkte)* Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L des Polynoms

$$X^4 + 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$$

sowie den Erweiterungsgrad $[L : \mathbb{Q}]$.