

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Bonusblatt

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 14. Dezember, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Aufgabe 33 (5 Punkte) Zeigen Sie, daß das Polynom

$$1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{Q}[X]$$

separabel ist.

Aufgabe 34 (5 Punkte) Zerlegen Sie die folgenden Polynome über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren:

$$a) X^4 + 4, \quad b) X^6 + 27.$$

Aufgabe 35 (5 Punkte) Sei $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $n \geq 1$. Zeigen Sie, daß die Teilbarkeit von $f(X^n)$ durch $(X-1)$ die Teilbarkeit von $f(X)$ durch $(X-1)$ impliziert.

Aufgabe 36 (5 Punkte) Zeigen Sie, daß das Polynom

$$f(X) = X^p + aX + b \in \mathbb{F}_p[X]$$

für $a \neq -1$ eine Nullstelle in \mathbb{F}_p hat.