Tomasz Szemberg
Patrick Graf

10. Dezember 2010
Blatt 9

**Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“**

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 21. Dezember, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

**Aufgabe 37** *(5 Punkte)* Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung in Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie, daß ein über $K$ algebraisches Element $\alpha \in L$ genau dann separabel über $K$ ist, wenn $K(\alpha) = K(\alpha^p)$ gilt.

**Aufgabe 38** *(5 Punkte)* Sei $K$ ein endlicher Körper. Zeigen Sie, daß das Produkt aller Elemente aus $K^*$ den Wert $-1$ ergibt. Folgern Sie daraus die folgende Teilbarkeitseigenschaft:

$$p \,|\, ((p-1)! + 1)$$

mit $p$ eine Primzahl.

**Aufgabe 39** *(5 Punkte)* Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Sei $\alpha \in L$ separabel über $K$ und $\beta \in L$ rein inseparabel über $K$. Zeigen Sie:

i) $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \beta)$;

ii) $K(\alpha, \beta) = K(\alpha \cdot \beta)$ vorausgesetzt $\alpha \neq 0 \neq \beta$.

**Aufgabe 40** *(5 Punkte)* Sei $p$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ eine positive Zahl. Zeigen Sie:

i) Ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ ist genau dann ein Teiler von $X^{p^n} - X$, wenn $\mathrm{grad}(f)$ ein Teiler von $n$ ist.

ii) Das Polynom $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$ ist das Produkt über alle irreduziblen normierten Polynome $f \in \mathbb{F}_p[X]$ mit der Eigenschaft, daß $\mathrm{grad}(f)$ ein Teiler von $n$ ist.