

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 11. Januar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Aufgabe 41 (5 Punkte) Entscheiden Sie, ob man die Zahlen

$$a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{bzw.} \quad b = \sqrt{2} + i$$

als primitive Elemente für die Erweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ nehmen kann.

Aufgabe 42 (5 Punkte) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und L/K eine Galois-Erweiterung vom Grad p . Zeigen Sie, daß $L = K(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $X^p - X - a$ mit geeignetem Element $a \in K$ ist.

Zeigen Sie, daß umgekehrt jede Erweiterung $K(\alpha)$ um eine Nullstelle eines solchen Polynoms eine Galois-Erweiterung vom Grad 1 oder p ist.

Aufgabe 43 (5 Punkte) Bestimmen Sie die Galois-Gruppe der Erweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

Aufgabe 44 (5 Punkte) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

