Tomasz Szemberg
Patrick Graf

19. Januar 2011
Blatt 12

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 25. Januar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Anmeldung zur Hauptklausur: Bis Sonntag, 23. Januar, über das Studierendenportal. Dies gilt nur für Bachelor/Master-Studierende. Alle anderen Studierenden müssen sich nicht anmelden.

Hinweis: Zur Zulassung sind (abgesehen von den übrigen Bedingungen) mindestens 125 Punkte bis einschließlich Blatt 13 erforderlich.

Aufgabe 49 *(5 Punkte)* Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. Sei H die Gruppe der Charaktere $\chi : G \to K^*$. Zeigen Sie, daß es zu jedem $\chi \in H$ ein Element $\alpha \in L$ gibt, so daß

$$\beta := \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \cdot \sigma(\alpha) \neq 0.$$

Zeigen Sie ferner, daß dann auch

$$\chi(\sigma) = \frac{\beta}{\sigma(\beta)}$$

für alle $\sigma \in G$ gilt, und daß β durch diese Eigenschaft bis auf Multiplikation mit einem Element aus K^* eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 50 *(5 Punkte)* Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 49, zeigen Sie, daß wenn es ein $\beta \in L^*$ gibt, so daß

$$\frac{\beta}{\sigma(\beta)} \in K$$

für alle $\sigma \in G$ gilt, dann definiert die Zuordnung

$$G \ni \sigma \mapsto \frac{\beta}{\sigma(\beta)} \in K^*$$

einen K-wertigen Charakter der Gruppe G.

Aufgabe 51 *(5 Punkte)* Immer noch mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 49, zeigen Sie, daß es einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$H \to L^*/K^*$$

gibt.

Aufgabe 52 *(5 Punkte)* Sei $f(X) = X^4 - 5X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, daß f über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, daß die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ keine echten Zwischenkörper besitzt.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Grad 2 Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ aussehen.