Tomasz Szemberg
Patrick Graf

24. Januar 2011
Blatt 13

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 1. Februar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Aufgabe 53 *(5 Punkte)* Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung mit K-Basis $x_1, \ldots, x_n$. Zeigen Sie für eine Untergruppe $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ und den zugehörigen Zwischenkörper L^H:

$$L^H = K(\mathrm{Sp}_{L/L^H}(x_1), \ldots, \mathrm{Sp}_{L/L^H}(x_n)).$$

Aufgabe 54 *(5 Punkte)* Sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha^p) = (\mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha))^p$$

für alle $\alpha \in L$.

Aufgabe 55 *(5 Punkte)* Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Dies sind die sog. *pythagoreischen Tripel.*
Hinweis: Vergleichen Sie dazu Aufgabe 6 in Kapitel 4.8 im Bosch.

Der große Satz von Fermat. *Die Gleichungen der Form*

$$x^d + y^d = z^d$$

mit $d \geq 3$ *haben dagegen nur Lösungen, die der Bedingung* $xyz = 0$ *genügen. Allerdings ist eine Übungsstunde zu kurz, um den Beweis zu fassen.*

Aufgabe 56 *(5 Punkte)* Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen, in der es für jeden Teiler d von n höchstens eine Untergruppe der Ordnung d gibt. Zeigen Sie, daß die Gruppe G dann zyklisch ist.