Tomasz Szemberg 26. Januar 2011
Patrick Graf Blatt 14

Übungen zur „Algebra und Zahlentheorie“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 8. Februar, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 149) abzugeben.

Aufgabe 57 *(5 Punkte)* Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Produkt von Zyklen und berechnen Sie jeweils das Signum:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8.$$

Aufgabe 58 *(5 Punkte)* Es sei $\pi = (x_1, \ldots, x_r) \in S_n$ ein r-Zyklus und $\sigma \in S_n$ eine beliebige Permutation. Zeigen Sie, daß

$$\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1), \ldots, \sigma(x_r)).$$

Folgern Sie daraus, daß die Kleinsche Vierergruppe ein Normalteiler in S_4 ist.

Aufgabe 59 *(5 Punkte)* Es sei K ein Körper und T die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}(n, K)$. Zeigen Sie, daß T auflösbar ist.

Aufgabe 60 *(5 Punkte)* Sei G eine Gruppe. Wir definieren induktiv Untergruppen $C^i(G)$ folgendermaßen:

$$C^1(G) := G \quad \text{und} \quad C^{i+1}(G) := [G, C^i(G)].$$

Die Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn $C^n(G) = \{1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß jede nilpotente Gruppe auflösbar ist.