# Vorwort

Was ist ein mathematischer Beweis? Wie lassen sich Beweise rechtfertigen? Gibt es Grenzen der Beweisbarkeit? Kann man das Auffinden mathematischer Beweise Computern übertragen?

Erst im letzten Jahrhundert ist es der mathematischen Logik gelungen, diese Fragen zu klären und weitreichende Antworten zu geben. Im vorliegenden Buch werden die entsprechenden Ergebnisse systematisch dargestellt. Im Zentrum steht dabei die Logik erster Stufe. Zunächst wird der Gödelsche Vollständigkeitssatz bewiesen. Er zeigt, dass im Rahmen der Sprache erster Stufe die Folgerungsbeziehung mit der formalen Beweisbarkeit zusammenfällt: Mit einem Kalkül einfacher formaler Schlussregeln lassen sich alle Folgerungen aus einem gegebenen Axiomensystem gewinnen (und insbesondere alle mathematischen Beweise simulieren).

Ein Exkurs in die Modelltheorie stellt Hilfsmittel bereit, um die Ausdrucksfähigkeit der Sprache der ersten Stufe genauer abzuschätzen. Dabei zeigt sich, dass manche Wünsche offen bleiben müssen. So gestattet die Sprache der ersten Stufe nicht die Formulierung der für die Zahlentheorie oder die Analysis üblichen Axiomensysteme. Andererseits lässt sich diese Schwäche durch einen mengentheoretischen Aufbau der Mathematik kompensieren. Wir stellen die dazu benötigten Hilfsmittel bereit und diskutieren eingehend die subtile Beziehung zwischen Mengenlehre und Logik.

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze werden in Verbindung mit Ergebnissen ähnlicher Art (wie dem Satz von Trachtenbrot) behandelt, welche allesamt Grenzen maschinenorientierter Beweismethoden belegen. Begriffe und Ergebnisse der Berechenbarkeitstheorie, die für diese Diskussion erforderlich sind, werden anhand des Computermodells der Registermaschine erarbeitet.

Anschließend nutzen wir die beim Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes bereitgestellten Methoden zur Behandlung des Satzes von Herbrand. Dieser Satz bildet den Ausgangspunkt für eine ausführliche Darlegung der theoretischen Grundlagen der Logik-Programmierung. Die dabei verwendeten Resolutionsmethoden werden zuvor auf aussagenlogischer Ebene eingeführt.

Die erwähnten Ausdrucksschwächen der ersten Stufe motivieren die Suche nach stärkeren logischen Systemen. Wir stellen in diesem Zusammenhang u.a. die Sprache der zweiten Stufe und infinitäre Sprachen vor. In jedem Fall weisen wir nach, dass zentrale Sachverhalte der ersten Stufe ungültig werden. Die daraus erwachsende empirische Feststellung, dass kein logisches System, welches die Logik der ersten Stufe erweitert, auch deren Vorzüge besitzen kann, wird abschließend mit den Lindströmschen Sätzen präzisiert und bewiesen.

Die Lektüre des Buches setzt keine spezifischen mathematischen Kenntnisse voraus. Sie fordert jedoch eine Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise, wie man sie etwa im ersten Jahr eines Mathematikstudiums erwirbt.

Als wesentliche Neuerung enthält die vorliegende sechste Auflage Beweise der Entscheidbarkeit zweier Theorien, nämlich der Presburger-Arithmetik und der schwachen monadischen Nachfolger-Arithmetik. Für die Letztere benötigen wir Sachverhalte aus der Automatentheorie, die Bestandteil des Informatik-Studiums sind. Diese Grundlagen stellen wir im notwendigen Umfang bereit.

Wir danken Frau Barbara Lühker und Herrn Dr. Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Freiburg und Aachen, im Juli 2018

H.-D. Ebbinghaus
J. Flum
W. Thomas

# Inhaltsverzeichnis