

Vorwort

Was ist ein mathematischer Beweis? Wie lassen sich Beweise rechtfertigen? Gibt es Grenzen der Beweisbarkeit? Kann man das Auffinden mathematischer Beweise Computern übertragen?

Erst im letzten Jahrhundert ist es der mathematischen Logik gelungen, diese Fragen zu klären und weitreichende Antworten zu geben. Im vorliegenden Buch werden die entsprechenden Ergebnisse systematisch dargestellt. Im Zentrum steht dabei die Logik erster Stufe. Zunächst wird der Gödelsche Vollständigkeitsatz bewiesen. Er zeigt, dass im Rahmen der Sprache erster Stufe die Folgerungsbeziehung mit der formalen Beweisbarkeit zusammenfällt: Mit einem Kalkül einfacher formaler Schlussregeln lassen sich alle Folgerungen aus einem gegebenen Axiomensystem gewinnen (und insbesondere alle mathematischen Beweise simulieren).

Ein Exkurs in die Modelltheorie stellt Hilfsmittel bereit, um die Ausdrucksfähigkeit der Sprache der ersten Stufe genauer abzuschätzen. Dabei zeigt sich, dass manche Wünsche offen bleiben müssen. So gestattet die Sprache der ersten Stufe nicht die Formulierung der für die Zahlentheorie oder die Analysis üblichen Axiomensysteme. Andererseits lässt sich diese Schwäche durch einen mengentheoretischen Aufbau der Mathematik kompensieren. Wir stellen die dazu benötigten Hilfsmittel bereit und diskutieren eingehend die subtile Beziehung zwischen Mengenlehre und Logik.

Die Gödelschen Unvollständigkeitsätze werden in Verbindung mit Ergebnissen ähnlicher Art (wie dem Satz von Trachtenbrot) behandelt, welche allesamt Grenzen maschinenorientierter Beweismethoden belegen. Begriffe und Ergebnisse der Berechenbarkeitstheorie, die für diese Diskussion erforderlich sind, werden anhand des Computermodells der Registermaschine erarbeitet.

Anschließend nutzen wir die beim Beweis des Gödelschen Vollständigkeitsatzes bereitgestellten Methoden zur Behandlung des Satzes von Herbrand. Dieser Satz bildet den Ausgangspunkt für eine ausführliche Darlegung der theoretischen Grundlagen der Logik-Programmierung. Die dabei verwendeten Resolutionsmethoden werden zuvor auf aussagenlogischer Ebene eingeführt.

Die erwähnten Ausdrucksschwächen der ersten Stufe motivieren die Suche nach stärkeren logischen Systemen. Wir stellen in diesem Zusammenhang u.a. die Sprache der zweiten Stufe und infinitäre Sprachen vor. In jedem Fall weisen wir nach, dass zentrale Sachverhalte der ersten Stufe ungültig werden. Die daraus erwachsende empirische Feststellung, dass kein logisches System, welches die Logik der ersten Stufe erweitert, auch deren Vorzüge besitzen kann, wird abschließend mit den Lindströmschen Sätzen präzisiert und bewiesen.

Die Lektüre des Buches setzt keine spezifischen mathematischen Kenntnisse voraus. Sie fordert jedoch eine Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise, wie man sie etwa im ersten Jahr eines Mathematikstudiums erwirbt.

Als wesentliche Neuerung enthält die vorliegende sechste Auflage Beweise der Entscheidbarkeit zweier Theorien, nämlich der Presburger-Arithmetik und der schwachen monadischen Nachfolger-Arithmetik. Für die Letztere benötigen wir Sachverhalte aus der Automatentheorie, die Bestandteil des Informatik-Studiums sind. Diese Grundlagen stellen wir im notwendigen Umfang bereit.

Wir danken Frau Barbara Lühker und Herrn Dr. Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Freiburg und Aachen, im Juli 2018

H.-D. Ebbinghaus
J. Flum
W. Thomas

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ein Beispiel aus der Gruppentheorie	2
1.2	Ein Beispiel aus der Theorie der Äquivalenzrelationen	4
1.3	Eine erste Analyse	5
1.4	Ausblick	7
2	Syntax der Sprachen erster Stufe	9
2.1	Alphabete	9
2.2	Das Alphabet einer Sprache erster Stufe	12
2.3	Terme und Ausdrücke in Sprachen erster Stufe	13
2.4	Induktion im Term- und im Ausdruckskalkül	17
2.5	Freie Variablen und Sätze	24
3	Semantik der Sprachen erster Stufe	27
3.1	Strukturen und Interpretationen	28
3.2	Eine Normierung der umgangssprachlichen Junktoren	31
3.3	Die Modellbeziehung	33
3.4	Die Folgerungsbeziehung	34
3.5	Zwei Lemmata über die Modellbeziehung	41
3.6	Einige einfache Symbolisierungen	46
3.7	Fragen zur Symbolisierbarkeit	50
3.8	Substitution	54
4	Ein Sequenzkalkül	61
4.1	Sequenzregeln	62
4.2	Grund- und Junktorenregeln	64
4.3	Ableitbare Junktorenregeln	66
4.4	Quantoren- und Gleichheitsregeln	68
4.5	Weitere ableitbare Regeln	70
4.6	Eine Zusammenfassung. Ein Beispiel	72
4.7	Widerspruchsfreiheit	74

5	Der Vollständigkeitsatz	79
5.1	Der Satz von Henkin	79
5.2	Erfüllbarkeit widerspruchsfreier Ausdrucksmengen (abzählbarer Fall)	84
5.3	Erfüllbarkeit widerspruchsfreier Ausdrucksmengen (allgemeiner Fall)	87
5.4	Der Vollständigkeitsatz	90
6	Der Satz von Löwenheim und Skolem und der Endlichkeitssatz	91
6.1	Der Satz von Löwenheim und Skolem	91
6.2	Der Endlichkeitssatz	93
6.3	Elementare Klassen	95
6.4	Elementar äquivalente Strukturen	99
7	Zur Tragweite der ersten Stufe	105
7.1	Der formale Beweisbegriff	106
7.2	Mathematik im Rahmen der ersten Stufe	109
7.3	Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre . . .	114
7.4	Bemerkungen zum mengentheoretischen Aufbau der Mathematik	119
8	Syntaktische Interpretationen und Normalformen	123
8.1	Termreduzierte Ausdrücke und relationale Symbolmengen	123
8.2	Syntaktische Interpretationen	126
8.3	Definitionserweiterungen	134
8.4	Normalformen	137
9	Erweiterungen der Logik erster Stufe	145
9.1	Die Logik zweiter Stufe	146
9.2	Das System $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$	151
9.3	Das System \mathcal{L}_Q	157
10	Berechenbarkeit und ihre Grenzen	159
10.1	Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Berechenbarkeit	160
10.2	Registermaschinen	166
10.3	Das Halteproblem für Registermaschinen	172
10.4	Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe	177
10.5	Der Satz von Trachtenbrot und die Unvollständigkeit der Logik zweiter Stufe	181
10.6	Theorien und die Unentscheidbarkeit der Arithmetik	184
10.7	Selbstbezügliche Aussagen und die Gödelschen Unvollständigkeitssätze	192

10.8 Die Entscheidbarkeit der Presburger-Arithmetik	199
10.9 Die Entscheidbarkeit der schwachen monadischen Nachfolger-Arithmetik	206
11 Freie Modelle und Logik-Programmierung	225
11.1 Der Satz von Herbrand	226
11.2 Freie Modelle und universelle Horn-Ausdrücke	229
11.3 Herbrand-Strukturen	235
11.4 Aussagenlogik	238
11.5 Aussagenlogische Resolution	244
11.6 Resolution in der ersten Stufe (ohne Unifikation)	256
11.7 Logik-Programmierung	265
12 Eine algebraische Charakterisierung der elementaren Äquivalenz	281
12.1 Endliche und partielle Isomorphie	282
12.2 Der Satz von Fraïssé	288
12.3 Der Beweis des Satzes von Fraïssé	290
12.4 Ehrenfeucht-Spiele	297
13 Die Sätze von Lindström	299
13.1 Logische Systeme	299
13.2 Reguläre logische Systeme mit Endlichkeitssatz	303
13.3 Der erste Satz von Lindström	304
13.4 Der zweite Satz von Lindström	311
Lösungshinweise zu den Aufgaben	317
Literaturverzeichnis	359
Symbolverzeichnis	359
Sach- und Personenverzeichnis	359

