1. Auflage 2010

Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt
Layout und Satz durch den Autor
Umschlaggestaltung durch den Autor

ISBN: 978-3-8391-9633-5

Printed in Germany

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Zahlen und Zeilen
oder
das blaue Pferd

Mathematik und Lyrik im Gespräch

Vorwort

Mathematik und Lyrik, Beweise und Gedichte zusammenbringen? Auf der einen Seite Begriffe und Argumente, die formalen und logischen Kriterien genügen müssen, auf der anderen Seite die freie Entfaltung sprachlichen Gestaltens; dort der Anspruch auf Objektivität, hier die individuelle Aussage. Doch diese Gegensätze verlieren an Gewicht, wenn man, vielleicht ein wenig überraschend, feststellt, daß manche Eigenheiten mathematischer Arbeit auch für die lyrische Tätigkeit zutreffen: Kreativität und Phantasie als Helfer, Dichte und Einfachheit der Darstellung als methodische Ziele, ästhetische Urteile über das Erreichte, z. B. Urteile, die einem Beweis Eleganz und Schönheit zuschreiben. Vieles hiervon verkörpert der auf Seite 16 stehende Beweis Euklids dafür, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Das vorliegende Bändchen stellt der Schilderung eines mathematischen Sachverhalts, Begriffs oder Beweises jeweils ein Gedicht zur Seite, das wesentliche Aspekte der mathematischen Aussage spiegelt, bisweilen auch hinterfragt oder ergänzt. Bei vielen Paaren läßt sich die innere Verwandtschaft der Partner leicht und schnell erschließen. Bei den übrigen sei die Übersetzung aus der einen Welt in die andere der Phantasie anvertraut. Es lag durchaus in meiner Absicht, die Bezüge zuweilen auch rätselhaft erscheinen zu lassen.

Die mathematischen Themen folgen keiner Systematik, nur hier oder dort äußern sich inhaltliche Zusammenhänge im örtlichen Beieinander. Einige Themen handeln nicht von Ergebnissen der Mathematik, sondern von der Mathematik selbst, ihrer Methodik und deren Tragweite. Die Auswahl ist sicherlich sehr subjektiv. Insgesamt, so hoffe ich, ist ein Mosaik entstanden, das den Reichtum der Mathematik bezeugt und in der Vielgestaltigkeit von Form und Inhalt der Gedichte ein gleichermaßen reges Gegenüber findet.

Der Gleichberechtigung von Mathematik und Lyrik glaubte ich auch äußerlich Rechnung tragen zu müssen, nämlich durch die Beschränkung der mathematischen Texte „auf Gedichtlänge“, auf jeweils eine einzige kleinformatige Seite. So können die einzelnen Paare mit einem Blick erfaßt werden. Außerdem lag es in meiner Absicht, den mathematischen Gehalt möglichst klar zutage treten zu lassen und auf geschichtliche Entwicklungen einzugehen.

Der Preis für all diese Vorgaben liegt auf der Hand: Die Texte können nur knapp das Wesentliche sagen. Ich habe mich bemüht, sie dennoch so abzufassen, daß sie auch ohne weiterreichende Kenntnis der jeweiligen Gebiete verständlich sein sollten. Dennoch erfordert eine Reihe von Texten eine Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise. Häufig betrifft diese Voraussetzung allerdings nicht die Texte im Ganzen; die Kernaussage bleibt dann von ihr unberührt.

Eine Bemerkung zu den Gedichten: Sie wollen keinen poetischen Anspruch erheben. Vor allem sind sie Partner, die charakteristische Züge ihrer mathematischen Begleiter eigensinnig übernommen haben. In einigen Fällen haben die Gedichte wieder auf die Texte zurückgewirkt. Diesem Aspekt habe ich durch Aufnahme des Wortes „Gespräch“ in den Untertitel Rechnung getragen.

Detlev Spalt und Rüdiger Thiele haben mir wertvolle historische Hinweise gegeben.

Mein besonderer Dank gilt Heidi und Susanne. Sie haben die Entstehung des Bändchens anregend und kritisch begleitet.

Zum Schluß: An einem Nachmittag im März 2007 kam mir in den Sinn, die einige Jahre zuvor entstandene erste Fassung des Apfelbaum-Gedichts von Seite 13 zu überarbeiten. Als ich mir dazu noch einmal die Aussage klar machte, die ich dem Gedicht mitgeben wollte, stand plötzlich das Kugelparadoxon vor meinen Augen. Die Idee zu diesem Bändchen war geboren und gleichzeitig sein erstes Paar.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Einige Hinweise

Mathematische Symbole werden eher zurückhaltend benutzt. Die Elementbeziehung wird durch das Symbol ε wiedergegeben. Die Schreibweise „$x \,\varepsilon\, M$“ deutet an, daß das Objekt x ein Element der Menge M ist. Die Menge der natürlichen Zahlen schließt die Null ein; sie wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Wenn nichts anderes vereinbart ist, dienen die Buchstaben i, j, k, l, m, n als Variablen für natürliche Zahlen.

Mengen definiert man in der Regel dadurch, daß man ihre Elemente angibt. Man schreibt dann z. B. $\{1, 3, 5, \ldots\}$ oder $\{n \,|\, n$ ist ungerade natürliche Zahl$\}$ für die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Mit log ist stets der natürliche Logarithmus gemeint, also der Logarithmus mit der sog. Eulerschen Zahl $e = 2,71828...$ als Basis.

Sachverhalte und definierte Begriffe, die mehrfach auftreten, sind auf den Seiten 127–129 in einem kleinen Sachverzeichnis zusammengetragen. Die sie dort begleitende Zahl verweist auf die Seite, auf der sie geschildert oder definiert werden. Zusammengesetzte Begriffe der Form „Adjektiv Substantiv“ findet man unter „Substantiv, Adjektiv“, also „Goldener Schnitt“ unter „Schnitt, Goldener“.

Dem Sachverzeichnis gehen bibliographische Anmerkungen und ein Namensverzeichnis voran. Am Ende steht ein Verzeichnis der mathematischen Texte und Gedichte.

Das Kugelparadoxon

Das Kugelparadoxon von Stefan Banach und Alfred Tarski (1924) gehört zu den erstaunlichsten Resultaten der Mathematik: Eine Kugel vom Radius r läßt sich so in endlich viele Teile zerlegen, daß man aus diesen Teilen zwei volle Kugeln vom gleichen Radius r zusammensetzen kann. Nach Raphael Robinson (1947) gibt es paradoxe Zerlegungen dieser Art, die aus nur fünf Teilen bestehen.

Der Beweis des Kugelparadoxons gibt keinen Hinweis darauf, wie die Teile aussehen könnten. Er ist, wie man sagt, ein reiner Existenzbeweis. Seine Eigenart hat ihren Grund darin, daß er wesentlich das Auswahlaxiom benutzt, ein Axiom, das wegen seiner Abstraktheit in der Mathematik lange umstritten war.

Da sich Volumina von Teilen beim Zusammensetzen addieren, müssen einige Teile einer paradoxen Zerlegung der Kugel so "zerfasert" sein, daß sie kein Volumen haben. Selbst wenn sie aus Gold bestünden, hätten sie kein Gewicht. Träume, durch paradoxe Zerlegungen einer Goldkugel reich zu werden, lassen sich nicht erfüllen.

Das Kugelparadoxon besitzt eine gleichermaßen erstaunliche Verallgemeinerung: Es seien K und K' Punktmengen des dreidimensionalen Raumes, die eine endliche Ausdehnung haben und eine — wenn auch noch so kleine — Kugel umfassen; z. B. sei K ein Körper von der Gestalt einer Rosenknospe oder eines Spinnennetzes und K' ein Körper von der Gestalt des Freiburger Münsters oder gar der gesamten Milchstraße. Dann läßt sich K in endlich viele Teile zerlegen, aus denen man K' zusammensetzen kann.

Unter einem Apfelbaum

Ein rosenfarbner Frühlingsschaum
gelegt in knorrig schwarze Äste.
Sieh jene Blüte dort
an jenem Zweig:
sie birgt in sich
den ganzen Blütenhimmel,
und dieser, ohne sie,
bleibt ganz sich gleich.

Verzeichnis der Texte und Gedichte