Mathematik und Lyrik, „Zahlen und Zeilen“, zusammenbringen?
Hier geschieht gerade dies:
Einem kurzen mathematischen Text steht jeweils ein Gedicht gegenüber, das wesentliche Aspekte der mathematischen Aussage in der ihm eigenen Welt spiegelt, hinterfragt oder ergänzt.
Dem Reichtum mathematischer Themen entspricht auf der Lyrikseite eine gleichermaßen farbige Vielfalt von Formen und Inhalten.
Die Bezüge zwischen den mathematischen Texten und ihren Partnergedichten erschließen sich in vielen Fällen sofort.
Verborgene oder rätselhafte fordern die Phantasie heraus.
Um die Texte zu verstehen, bedarf es nicht besonderer mathematischer Kenntnisse, öfter jedoch einer gefestigten Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Zahlen und Zeilen oder das blaue Pferd

Mathematik und Lyrik im Gespräch

Zweite Auflage

Vorbemerkungen

Mathematik und Lyrik, Beweise und Gedichte zusammenbringen? Auf der einen Seite Begriffe und Argumente, die formalen und logischen Kriterien genügen müssen, auf der anderen Seite die freie Entfaltung sprachlichen Gestaltens; dort der Anspruch auf Objektivität, hier die individuelle Aussage. Doch diese Gegensätze verlieren an Gewicht, wenn man, vielleicht ein wenig überraschend, feststellt, daß manche Eigenheiten mathematischen Arbeitens auch für die lyrische Tätigkeit zutreffen: Kreativität und Phantasie als Helfer, Dichte und Einfachheit der Darstellung als methodische Ziele, ästhetische Urteile über das Erreichte, z. B. Urteile, die einem Beweis Eleganz und Schönheit zuschreiben.

Das vorliegende Bändchen stellt der Schilderung eines mathematischen Sachverhalts, Begriffs oder Beweises jeweils ein Gedicht zur Seite, das wesentliche Aspekte der mathematischen Aussage spiegelt, bisweilen auch hinterfragt oder ergänzt. Oft läßt sich die innere Verwandtschaft der Partner unmittelbar erkennen. Wenn nicht, sei die Übersetzung aus der einen Welt in die andere der Phantasie anvertraut. Es lag in meiner Absicht, die Bezüge zuweilen auch rätselhaft erscheinen zu lassen.

Die mathematischen Themen folgen keiner Systematik; zuweilen äußern sich inhaltliche Zusammenhänge im örtlichen Beieinander. Einige Themen handeln nicht von Ergebnissen der Mathematik, sondern von der Mathematik selbst, ihrer Methodik und deren Tragweite. Die Auswahl ist sicherlich sehr subjektiv. Insgesamt aber, so hoffe ich, ist ein Mosaik entstanden, das den Reichtum der Mathematik bezeugt und in der Vielgestaltigkeit von Form und Inhalt der Gedichte ein farbiges Gegenüber findet.

Die Gleichberechtigung von Mathematik und Lyrik wollte ich nach außen sichtbar machen, nämlich durch die Beschränkung der mathematischen Texte „auf Gedichtlänge“, auf jeweils eine einzige kleinformatige Seite. So können die einzelnen Paare mit einem Blick erfaßt werden. Dennoch wollte ich den mathematischen Gehalt klar zutage treten lassen und auf geschichtliche Entwicklungen nicht verzichten.

Der Preis für diese Vorgaben liegt auf der Hand: Die Texte können nur knapp das Wesentliche sagen. Ich habe mich bemüht, sie so abzufassen, daß sie ohne eine weiterreichende Kenntnis der jeweiligen Gebiete verständlich sein sollten. Dennoch erfordern einige Texte eine größere Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise. Häufig betrifft diese Voraussetzung allerdings nicht die Texte im Ganzen; die Kernaussage bleibt dann von ihr unberührt.

Die Gedichte wollen keinen poetischen Anspruch erheben. Sie sind vor allem Partner, die charakteristische Züge ihrer mathematischen Begleiter eigensinnig übernommen haben. Zuweilen haben sie auf die Texte zurückgewirkt. Dem habe ich durch das Wort „Gespräch“ im Untertitel Rechnung getragen.

Detlef Spalt und Rüdiger Thiele haben mir wertvolle historische Hinweise gegeben.

Mein besonderer Dank gilt Heidi und Susanne. Sie haben die Entstehung des Bändchens anregend und kritisch begleitet.

Die vorliegende zweite Auflage ist eine korrigierte und erweiterte Fassung der ersten Auflage von 2010.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Einige Hinweise

Mathematische Symbole werden eher zurückhaltend benutzt. Die Elementbeziehung wird durch das Symbol ε wiedergegeben. Die Schreibweise „$x \,\varepsilon\, M$“ deutet an, daß das Objekt x ein Element der Menge M ist. Die Menge der natürlichen Zahlen schließt die Null ein; sie wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Wenn nichts anderes vereinbart ist, dienen die Buchstaben i, j, k, l, m, n als Variablen für natürliche Zahlen.

Mengen definiert man in der Regel dadurch, daß man ihre Elemente angibt. Man schreibt dann z. B. $\{1, 3, 5, \ldots\}$ oder $\{n \,|\, n$ ist ungerade natürliche Zahl$\}$ für die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Mit log ist stets der natürliche Logarithmus gemeint, also der Logarithmus mit der sog. Eulerschen Zahl $e = 2,71828...$ als Basis.

Sachverhalte und definierte Begriffe, die mehrfach auftreten, sind auf den Seiten 129–131 in einem kleinen Sachverzeichnis zusammengetragen. Die sie dort begleitende Zahl verweist auf die Seite, auf der sie geschildert oder definiert werden. Zusammengesetzte Begriffe der Form „Adjektiv Substantiv“ findet man unter „Substantiv, Adjektiv“, also „Goldener Schnitt“ unter „Schnitt, Goldener“. Dem Sachverzeichnis gehen bibliographische Anmerkungen und ein Namenverzeichnis voran.

Inhalt

. . . wenn der Mathematiker
wircklich etwas richtiges thut,
so thut ers,
als *poetischer philosoph.*

Novalis (1772–1801)

Dorthin gehen,
wo die Parallelen sich schneiden.
Die Forderungen der Logik
durch Träume erfüllen.

Günter Eich (1907–1972)

Das Kugelparadoxon

Das Kugelparadoxon von Stefan Banach und Alfred Tarski (1924) gehört zu den erstaunlichsten Resultaten der Mathematik: Eine Kugel vom Radius r läßt sich so in endlich viele Teile zerlegen, daß man aus diesen Teilen zwei volle Kugeln vom gleichen Radius r zusammensetzen kann. Nach Raphael Robinson (1947) gibt es paradoxe Zerlegungen dieser Art, die aus nur fünf Teilen bestehen.

Der Beweis des Kugelparadoxons gibt keinen Hinweis darauf, wie die Teile aussehen könnten. Er ist, wie man sagt, ein reiner Existenzbeweis. Seine Eigenart hat ihren Grund darin, daß er wesentlich das Auswahlaxiom benutzt, ein Axiom, das wegen seiner Abstraktheit in der Mathematik lange umstritten war.

Da sich Volumina von Teilen beim Zusammensetzen addieren, müssen einige Teile einer paradoxen Zerlegung der Kugel so "zerfasert" sein, daß sie kein Volumen haben. Selbst wenn sie aus Gold bestünden, hätten sie kein Gewicht. Träume, durch paradoxe Zerlegungen einer Goldkugel reich zu werden, lassen sich nicht erfüllen.

Das Kugelparadoxon besitzt eine gleichermaßen erstaunliche Verallgemeinerung: Es seien K und K' Punktmengen des dreidimensionalen Raumes, die eine endliche Ausdehnung haben und eine — wenn auch noch so kleine — Kugel umfassen; z. B. sei K ein Körper von der Gestalt einer Rosenknospe oder eines Spinnennetzes und K' ein Körper von der Gestalt des Freiburger Münsters oder gar der gesamten Milchstraße. Dann läßt sich K in endlich viele Teile zerlegen, aus denen man K' zusammensetzen kann.

Unter einem Apfelbaum

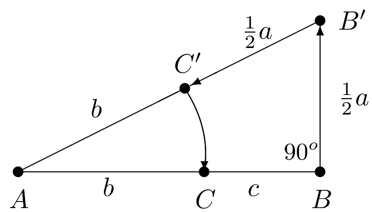
Ein rosenfarbner Frühlingsschaum
gelegt in knorrig schwarze Äste.
Sieh jene Blüte dort
an jenem Zweig:
sie birgt in sich
den ganzen Blütenhimmel,
und dieser, ohne sie,
bleibt ganz sich gleich.

Der Goldene Schnitt

Der Punkt C der Strecke AB teilt AB im Goldenen Schnitt, wenn sich die Länge a der Strecke AB zur Länge b des größeren Abschnitts AC wie b zur Länge c des kleineren Abschnitts CB verhält, wenn also b das geometrische Mittel von a und c ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \quad \text{d. h.} \quad b = \sqrt{ac}.$$

Die Zeichnung deutet an, wie man C (über die Punkte B' und C') mit Zirkel und Lineal gewinnen kann.



Der von der Strecke AB unabhängige Quotient $\frac{b}{c}$, die Zahl Φ des Goldenen Schnitts, genügt der Gleichung $\Phi^2 - \Phi = 1$ und hat den Wert $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1{,}618$.

In der Architektur hat der Goldene Schnitt zuweilen bei Fragen der Ästhetik eine Rolle gespielt; Maßverhältnisse der Größe Φ galten als besonders ansprechend. So teilt die Grundfläche des Helms den Turm des Freiburger Münsters (ohne die aufgesetzte Kreuzblume) der Höhe nach im Goldenen Schnitt, und die Abstände der (Mitten der) Langhauspfeiler zu den gegenüber liegenden bzw. zu den benachbarten Pfeilern verhalten sich wie 21 Ellen zu 13 Ellen, also wie $\frac{21}{13} \approx 1{,}615$. Noch in den 1940er Jahren hat Le Corbusier eine sich am Goldenen Schnitt orientierende Theorie der Proportionen aufgestellt.

Der Barockgarten

Scheren die Natur verwalten,
schneiden Werden und Vergehen,
Wind möcht zögerlich nur wehen,
Zufall darf sich nicht entfalten.

Bannstrahl metrischer Gestalten
hat kein Quentchen übersehen,
fest auf allen Beeten stehen
Form und Maß, im Plan gehalten.

Quell der Regelhaftigkeiten,
absoluter Herrscherwille
fesselt gar die Jahreszeiten.

Jenseits von Struktur und Stille
ein jauchzend Kind, und Schmetterlinge gleiten
von hier nach dort in bunter Fülle.

Über die Länge von Beweisen

Die Beweise des 290-Theorems und des Vierfarbensatzes, die erst mit Hilfe von Computern erbracht werden konnten, werfen eine interessante Frage auf: Gibt es in der Mathematik beweisbare Aussagen, denen im Rahmen der Theorie, der sie angehören, Bedeutung zukommt, die aber nicht bewiesen werden können, weil jeder Beweis zu lang ist, und das selbst dann, wenn Computer erlaubt sind? Könnten wichtige offene Vermutungen zu diesem Kreis gehören?

Es gibt zahlreiche Ergebnisse, die eine positive Antwort möglich erscheinen lassen. Sie setzen eine präzise Form der mathematischen Sprache und mathematischer Beweise voraus. Für eine beweisbare Aussage φ sei dann $|\,\varphi\,|$ deren Länge und $\beta(\varphi)$ die Länge eines kürzesten Beweises.

1974 bewiesen Michael J. Fischer und Michael O. Rabin: Es gibt eine positive Konstante c und eine unendliche Menge M von beweisbaren zahlentheoretischen Aussagen φ, die nur über die Addition sprechen, mit $\beta(\varphi) \geq 2^{(2^{c|\varphi|})}$ für alle $\varphi \,\varepsilon\, M$. Auf M wachsen also die Beweislängen mindestens doppelt exponentiell in den Längen der φ. Läßt man auch die Multiplikation zu, lassen sich die Beweislängen durch keine noch so stark in der Länge der beweisbaren Aussagen φ wachsende berechenbare Funktion (wie die Funktion f mit $f(n) = n^{(n^n)}$) beschränken.

Die Ergebnisse erlauben keine Rückschlüsse auf konkrete Aussagen. Sie zeigen aber, daß die Suche nach Beweisen nicht nur auf Schwierigkeiten technischer oder methodischer Natur treffen kann, sondern auch auf Schwierigkeiten, die ihre Ursache allein in der Länge der möglichen Beweise haben.

Zugvögel

Der See zinngraue Glätte
spiegelt Morgendämmerung
zwei Flügel alle
schwer ins Wasser schlagen
sich in die Höhe tragen
zurück verebben Wellen
erstes Licht.

Der Himmel leibgestirnt
im Kreisen um die eigne Mitte
zwei Flügel alle
jäh die Schwünge straffen
das Blickgewebe raffen
die Körper ausgerichtet
gerade Bahn.

Zwei Perlenschnüre lichtergrau
und federleicht ein Keil
teilt sanft den Himmel
gleitet in die Ferne
die irgendwann vielleicht
verharrt im Angekommensein.

Hase und Schildkröte

Das hier beschriebene Spiel zwischen einem Hasen und einer Schildkröte geht auf Reuben Louis Goodstein (1944) zurück. Es ist eine Variante der Äsopschen Fabel vom Sieg des vermeintlich Schwächeren gegen den scheinbar Stärkeren.

Hase und Schildkröte wählen abwechselnd je eine natürliche Zahl und erzeugen so eine Folge $h_2, s_2, h_3, s_3, h_4, s_4, \ldots$. Dabei gelten die folgenden Regeln:

(1) Zu Beginn wählt der Hase eine Zahl $h_2 > 0$.

(2) Hat der Hase h_k gewählt, wählt die Schildkröte als s_k die Zahl $h_k - 1$.

(3) Hat die Schildkröte s_k gewählt und ist $s_k = 0$, endet das Spiel; die Schildkröte hat gewonnen. Ist $s_k > 0$, bestimmt der Hase die k-adische Darstellung

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0$$

von s_k als ein Polynom $p_k(k)$ in k mit Koeffizienten („Ziffern") $0 \leq a_0, \ldots, a_n \leq k - 1$ und setzt

$$h_{k+1} = p_k(k+1) = a_n(k+1)^n + \cdots + a_0.$$

Zum Beispiel ist 17, 16, 81, 80, 170, 169, 311, 310, 516, 515 der Beginn einer so gespielten Folge.

Obwohl der Hase mit großen Sprüngen zu höheren Zahlen zu eilen scheint, gewinnt die Schildkröte jedes Spiel. Ein eleganter Beweis nutzt aus, daß man mit der Ordinalzahl ω weitgehend wie gewohnt rechnen kann. Man überzeugt sich, daß

$$\cdots < p_4(\omega) < p_3(\omega) < p_2(\omega).$$

Da absteigende Folgen von Ordinalzahlen eine endliche Länge haben, muß die Folge $h_2, s_2, h_3, s_3, \ldots$ mit 0 abbrechen, also die Schildkröte gewinnen.

Das sanfte Gesetz

Ein Beben tief in Berges Schoß,
wo Pele, Herrin über Feuergründe,
im Fieber ihrer Leidenschaft
der Urgewalten Fesseln löst.

Hoch steigt die Glut,
höher die Asche empor,
vereint dann der Sturz hinab,
sengend zieht die Flut ihre Spur,
macht den Tag zur rauchenden Nacht.

Als sie das Werk gerichtet,
wirft Pele feuertrunken
und jubelvoll mit Donnergrollen
sich in den Schlot,
der Brodem fällt zusammen,
erstarrt zu Kälte schwarz und tot.

Wo einst ein Baum gestanden,
verglühend seinen Abdruck ließ,
sprießt bald ein Blatt,
dem aberviele Blätter folgen,
sich zart mit Wachstum füllen
und schwarze Öde tot und leer
in grünes Leben hüllen.

Ein Duft von Myriaden Blüten
wacht über Peles langem Schlaf.

Bibliographische Anmerkungen

Wer die mathematischen Sachverhalte näher kennenlernen möchte, kann mehrere Wege gehen. Eine Reihe neuerer Bücher befaßt sich ähnlich, doch ausführlicher, mit verschiedenen Themen der Mathematik und gibt weiterführende Literatur an. Beispiele sind (02), (05) und, anspruchsvoller, aber anregend, (01) der folgenden Liste. (04) und (14) sind „klassische", noch heute mit Gewinn lesbare Vorgänger. Ähnliches gilt für (15). Man kann die angesprochenen Themen auch an Hand von Lehrbüchern vertiefen, dann aber in der Regel nur über eine systematische Einarbeitung. Ich möchte aus diesem Grund auf eine größere Auswahl verzichten und beschränke mich auf (07) und (12). (12) behandelt Fragen der elementaren Zahlentheorie auf einem Niveau, das interessierten Laien zugänglich ist, und schließt Bezüge zu den reellen und den komplexen Zahlen ein; (07) stellt, beginnend mit den natürlichen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen, Gebiete der Mathematik vor, die in einem weiteren Sinn von Zahlen handeln. Auch das Internet kann hilfreich sein. Anregend ist die von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung betreute Seite www.mathematik.de. Für Fragen zur Geschichte kann man auf (08), (09), (17) und (18) zurückgreifen.

Mein Interesse an Bezügen zwischen Mathematik und Literatur geht auf (11) und (13) zurück. (11) schildert am Beispiel der Romantik solche Bezüge unter Einschluß der Philosophie. (13) stellt eine Fülle von Aussagen in der deutschsprachigen Literatur zu-

sammen, die über Mathematik und über Mathematiker sprechen, und analysiert sie unter ideen-, sozial-, kultur- und geistesgeschichtlichen Aspekten. (3) vermittelt einen ersten Eindruck von der Vielgestaltigkeit dieser literarischen Äußerungen.

Gedichte sollten nicht kommentiert werden. Dennoch seien mir einige Hinweise erlaubt. Sie betreffen fünf Gedichte und könnten deren Verständnis fördern. Den Gedichten Der Barockgarten (Seite 5) und Der Englische Garten (Seite 99) liegen Gartentheorien zugrunde, wie sie etwa in (06) und (10) dargestellt werden. Die beiden Gedichte Atmen und Bewegung (Seite 39) gehören in die sog. π-Prosa, genauer: in die Reihe der π-Gedichte: Die Anzahl der Buchstaben aufeinander folgender Wörter kodiert mehr oder minder direkt den entsprechenden Beginn der Dezimaldarstellung von π. Anders als Reime oder Schemata von Hebungen und Senkungen wird diese mathematische Formgebung nicht vom Gehör wahrgenommen. Dem Gedicht Ciaccona (Seite 105) liegen Ergebnisse der Musikwissenschaft, hier der gematrischen Analyse (16) der Ciaccona aus Johann Sebastian Bachs Partita für Violine solo in d-moll, zugrunde, die in den Werken Bachs verschlüsselte Botschaften zu entdecken glauben, Botschaften, die ebenfalls dem Gehör verborgen sind, sich dem der Verschlüsselungsmethode Kundigen jedoch aus der Partitur erschließen können.

(01) Martin Aigner und Günter M. Ziegler: *Das Buch der Beweise*, Springer, 2002; 3. Auflage 2010.

(02) Ehrhard Behrends, Peter Gritzmann und Günter M. Ziegler (Hrsg.): *Pi und Co. Kaleidoskop der Mathematik*, Springer, 2008.

(03) Christian Blohmann: *Der rechnende Dichter*, Vortrag, 2001, im Netz unter arXiv:math/0308287v1 [math.HO], 2003.

(04) Richard Courant und Herbert Robbins: *Was ist Mathematik?*, Springer, 1961; 5. Auflage 2010.

(05) Tony Crilly: *Fünfzig Schlüsselideen Mathematik*, Springer Spektrum, 2009.

(06) Heidi Ebbinghaus: *Der Landschaftsgarten. Natur und Phantasie in der deutschen Literatur des 18. und frühen 19. Jahrhunderts*, Peter Lang, 1997.

(07) Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch u.a.: *Zahlen*, Springer, 1983; 3. Auflage 1992.

(08) Helmuth Gericke: *Mathematik in Antike und Orient*, Springer, 1984.

(09) Helmuth Gericke: *Mathematik im Abendland*, Springer, 1990.

(10) Christian Cay Lorenz Hirschfeld: *Theorie der Gartenkunst*, M. G. Weidmanns Erben und Reich, 5 Bände, 1779–1785; Nachdruck Georg Olms, 1985.

(11) Hans Niels Jahnke: *Mathematik und Romantik.* In: Volker Peckhaus und Christian Thiel (Herausgeber), *Disziplinen im Kontext. Perspektiven der Disziplingeschichtsschreibung*, Wilhelm Fink Verlag, 1999, Seiten 163–198.

(12) Nicola Oswald und Jörn Steuding: *Elementare Zahlentheorie. Eine sanfte Einführung in die höhere Mathematik*, Springer Spektrum, 2015.

(13) Knut Radbruch: *Mathematische Spuren in der Literatur*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1997.

(14) Hans Rademacher und Otto Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren*, Springer, 1930; 5. Auflage 2001.

(15) Lynn Arthur Steen (Editor): *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Springer, 1978.

(16) Helga Thoene: *Johann Sebastian Bach: Ciaccona — Tanz oder Tombeau? Eine analytische Studie*, Dr. Harry Ziethen, 2003.

(17) Hans Wußing: *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Band 1: *Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*, Springer, 2008.

(18) Hans Wußing mit Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock: *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Band 2: *Von Euler bis zur Gegenwart*, Springer, 2009.

Namenverzeichnis

Kursiv gesetzte Jahreszahlen gelten nur angenähert.

Kleines Sachverzeichnis