

Mathematik und Lyrik, „Zahlen und Zeilen“,  
zusammenbringen?

Hier geschieht gerade dies:

Einem kurzen mathematischen Text steht jeweils  
ein Gedicht gegenüber, das wesentliche Aspekte  
der mathematischen Aussage in der ihm eigenen  
Welt spiegelt, hinterfragt oder ergänzt.

Dem Reichtum mathematischer Themen  
entspricht auf der Lyrikseite eine gleichermaßen  
farbige Vielfalt von Formen und Inhalten.

Die Bezüge zwischen den mathematischen  
Texten und ihren Partnergedichten erschließen  
sich in vielen Fällen sofort.

Verborgene oder rätselhafte fordern  
die Phantasie heraus.

Um die Texte zu verstehen, bedarf es nicht  
besonderer mathematischer Kenntnisse,  
öfter jedoch einer gefestigten Vertrautheit  
mit der mathematischen Denkweise.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

# Zahlen und Zeilen oder das blaue Pferd



Mathematik und Lyrik im Gespräch

Zweite Auflage

## Vorbemerkungen

Mathematik und Lyrik, Beweise und Gedichte zusammenbringen? Auf der einen Seite Begriffe und Argumente, die formalen und logischen Kriterien genügen müssen, auf der anderen Seite die freie Entfaltung sprachlichen Gestaltens; dort der Anspruch auf Objektivität, hier die individuelle Aussage. Doch diese Gegensätze verlieren an Gewicht, wenn man, vielleicht ein wenig überraschend, feststellt, daß manche Eigenheiten mathematischen Arbeitens auch für die lyrische Tätigkeit zutreffen: Kreativität und Phantasie als Helfer, Dichte und Einfachheit der Darstellung als methodische Ziele, ästhetische Urteile über das Erreichte, z. B. Urteile, die einem Beweis Eleganz und Schönheit zuschreiben.

Das vorliegende Bändchen stellt der Schilderung eines mathematischen Sachverhalts, Begriffs oder Beweises jeweils ein Gedicht zur Seite, das wesentliche Aspekte der mathematischen Aussage spiegelt, bisweilen auch hinterfragt oder ergänzt. Oft läßt sich die innere Verwandtschaft der Partner unmittelbar erkennen. Wenn nicht, sei die Übersetzung aus der einen Welt in die andere der Phantasie anvertraut. Es lag in meiner Absicht, die Bezüge zuweilen auch rätselhaft erscheinen zu lassen.

Die mathematischen Themen folgen keiner Systematik; zuweilen äußern sich inhaltliche Zusammenhänge im örtlichen Beieinander. Einige Themen handeln nicht von Ergebnissen der Mathematik, sondern von der Mathematik selbst, ihrer Methodik und de-

ren Tragweite. Die Auswahl ist sicherlich sehr subjektiv. Insgesamt aber, so hoffe ich, ist ein Mosaik entstanden, das den Reichtum der Mathematik bezeugt und in der Vielgestaltigkeit von Form und Inhalt der Gedichte ein farbiges Gegenüber findet.

Die Gleichberechtigung von Mathematik und Lyrik wollte ich nach außen sichtbar machen, nämlich durch die Beschränkung der mathematischen Texte „auf Gedichtlänge“, auf jeweils eine einzige kleinformatige Seite. So können die einzelnen Paare mit einem Blick erfaßt werden. Dennoch wollte ich den mathematischen Gehalt klar zutage treten lassen und auf geschichtliche Entwicklungen nicht verzichten.

Der Preis für diese Vorgaben liegt auf der Hand: Die Texte können nur knapp das Wesentliche sagen. Ich habe mich bemüht, sie so abzufassen, daß sie ohne eine weiterreichende Kenntnis der jeweiligen Gebiete verständlich sein sollten. Dennoch erfordern einige Texte eine größere Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise. Häufig betrifft diese Voraussetzung allerdings nicht die Texte im Ganzen; die Kernaussage bleibt dann von ihr unberührt.

Die Gedichte wollen keinen poetischen Anspruch erheben. Sie sind vor allem Partner, die charakteristische Züge ihrer mathematischen Begleiter eigenständig übernommen haben. Zuweilen haben sie auf die Texte zurückgewirkt. Dem habe ich durch das Wort „Gespräch“ im Untertitel Rechnung getragen.

Detlef Spalt und Rüdiger Thiele haben mir wertvolle historische Hinweise gegeben.

Mein besonderer Dank gilt Heidi und Susanne. Sie haben die Entstehung des Bändchens anregend und kritisch begleitet.

Die vorliegende zweite Auflage ist eine korrigierte und erweiterte Fassung der ersten Auflage von 2010.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

## Einige Hinweise

Mathematische Symbole werden eher zurückhaltend benutzt. Die Elementbeziehung wird durch das Symbol  $\varepsilon$  wiedergegeben. Die Schreibweise „ $x \in M$ “ deutet an, daß das Objekt  $x$  ein Element der Menge  $M$  ist. Die Menge der natürlichen Zahlen schließt die Null ein; sie wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet. Wenn nichts anderes vereinbart ist, dienen die Buchstaben  $i, j, k, l, m, n$  als Variablen für natürliche Zahlen.

Mengen definiert man in der Regel dadurch, daß man ihre Elemente angibt. Man schreibt dann z. B.  $\{1, 3, 5, \dots\}$  oder  $\{n \mid n \text{ ist ungerade natürliche Zahl}\}$  für die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Mit  $\log$  ist stets der natürliche Logarithmus gemeint, also der Logarithmus mit der sog. Eulerschen Zahl  $e = 2,71828\dots$  als Basis.

Sachverhalte und definierte Begriffe, die mehrfach auftreten, sind auf den Seiten 129–131 in einem kleinen Sachverzeichnis zusammengetragen. Die sie dort begleitende Zahl verweist auf die Seite, auf der sie geschildert oder definiert werden. Zusammengesetzte Begriffe der Form „Adjektiv Substantiv“ findet man unter „Substantiv, Adjektiv“, also „Goldener Schnitt“ unter „Schnitt, Goldener“. Dem Sachverzeichnis gehen bibliographische Anmerkungen und ein Namenverzeichnis voran.

# Inhalt

Das Kugelparadoxon .....	2	Das Cantorsche Diagonalverfahren .....	30
Unter einem Apfelbaum .....	3	Schlüsselwünsche .....	31
Der Goldene Schnitt .....	4	Die Kontinuumshypothese .....	32
Der Barockgarten .....	5	Im Frühling .....	33
Primzahlen .....	6	Gleichungen höheren Grades .....	34
Regenspiel .....	7	Zu dir .....	35
Die Fibonacci-Zahlen .....	8	Algebraische und transzendente Zahlen .....	36
Sprießen / Sonnenblume .....	9	Die Chinesische Mauer .....	37
Vollkommene Zahlen .....	10	Die Kreiszahl .....	38
Der Schlußton .....	11	Atmen / Bewegung .....	39
Der große Satz von Fermat .....	12	Von der Quadratur des Kreises .....	40
Der alte Nil .....	13	Verwandlung .....	41
Vollständige Induktion .....	14	Konstruktion gleichseitiger $n$ -Ecke .....	42
Rondo vivace .....	15	Eigene Zeit .....	43
Das Prinzip vom kleinsten Element .....	16	Mehrdimensionale Räume .....	44
Standort .....	17	Von neuen Dimensionen .....	45
Kommensurabilität .....	18	Landkarten .....	46
Wege .....	19	Das Portrait .....	47
Grenzwerte .....	20	Quaternionen und Oktaven .....	48
Spätherbst .....	21	An die Obertöne .....	49
Der Körper der komplexen Zahlen .....	22	Magische Quadrate .....	50
Du Erde .....	23	Denken und Fühlen .....	51
Eine Eulersche „Weltformel“ .....	24	Das Vierfarbenproblem .....	52
Traum eines Physikers .....	25	Sieben und Eins .....	53
Ebene Spiralen .....	26	Das 290-Theorem .....	54
Schneckenhaus .....	27	Paragraphen .....	55
Riemannsche Flächen .....	28	Über die Länge von Beweisen .....	56
Eine rote Rose .....	29	Zugvögel .....	57
		Die Eulersche Polyederformel .....	58
		Das Collier .....	59
		Orientierung .....	60
		Sehnsucht .....	61
		Raumfüllende Kurven .....	62
		Das Seidenjahr .....	63

Der Satz vom Diktator .....	64
An die Natur .....	65
Das isoperimetrische Problem .....	66
Sterne .....	67
Der Äquivalenzsatz .....	68
Wir spielen Eisenbahn .....	69
Das Auswahlaxiom .....	70
Warum .....	71
Die Zermelo-Russellsche Antinomie .....	72
Der Mammutbaum .....	73
Selbstähnlichkeit .....	74
Baumfarn .....	75
Entropie .....	76
Umkehr .....	77
Das Geburtstagsproblem .....	78
Zufall .....	79
Dominanz und Rezessivität .....	80
Leberblümchen .....	81
Auswertung von Turnieren .....	82
David .....	83
Berechenbarkeit und Wahrheit .....	84
Wolkenleben .....	85
Polynomiale Zeit .....	86
Der Turmspringer .....	87
Kodieren mit Primzahlen .....	88
Zurückgelassene Blicke .....	89
Trivialitäten .....	90
Abzählreime .....	91
Äquivalenzrelationen .....	92
Die Arche Noah .....	93
Gleichheit und Extensionalität .....	94
Verweht .....	95
Vom Rationalen zum Reellen .....	96
Höher hinaus .....	97

Der Intuitionismus .....	98
Der Englische Garten .....	99
Mathematik, Technik, Sicherheit .....	100
Türme .....	101
Die Natur mathematischer Objekte .....	102
Es .....	103
Gottesbeweise .....	104
Ciaccona .....	105
Die Ordinalzahl Omega .....	106
Die Hasenleiter .....	107
Ordinalzahlen und Kardinalzahlen .....	108
Chinesisches Rollbild .....	109
Hase und Schildkröte .....	110
Das sanfte Gesetz .....	111
Ein Fixpunktsatz .....	112
Der steinige Weg .....	113
Universalität .....	114
Blüte im Gegenlicht .....	115
Wahrheitskriterien .....	116
Der Wetterprophet .....	117
Unvollständigkeit .....	118
Das blaue Pferd .....	119
Bibliographische Anmerkungen .....	121
Namenverzeichnis .....	125
Kleines Sachverzeichnis .....	129

... wenn der Mathematiker  
wirklich etwas richtiges thut,  
so thut ers,  
als *poetischer philosoph.*

Novalis (1772–1801)

Dorthin gehen,  
wo die Parallelen sich schneiden.  
Die Forderungen der Logik  
durch Träume erfüllen.

Günter Eich (1907–1972)

## Das Kugelparadoxon

Das Kugelparadoxon von Stefan Banach und Alfred Tarski (1924) gehört zu den erstaunlichsten Resultaten der Mathematik: Eine Kugel vom Radius  $r$  läßt sich so in endlich viele Teile zerlegen, daß man aus diesen Teilen zwei volle Kugeln vom gleichen Radius  $r$  zusammensetzen kann. Nach Raphael Robinson (1947) gibt es paradoxe Zerlegungen dieser Art, die aus nur fünf Teilen bestehen.

Der Beweis des Kugelparadoxons gibt keinen Hinweis darauf, wie die Teile aussehen könnten. Er ist, wie man sagt, ein reiner Existenzbeweis. Seine Eigenart hat ihren Grund darin, daß er wesentlich das Auswahlaxiom benutzt, ein Axiom, das wegen seiner Abstraktheit in der Mathematik lange umstritten war.

Da sich Volumina von Teilen beim Zusammensetzen addieren, müssen einige Teile einer paradoxen Zerlegung der Kugel so "zerfasert" sein, daß sie kein Volumen haben. Selbst wenn sie aus Gold bestünden, hätten sie kein Gewicht. Träume, durch paradoxe Zerlegungen einer Goldkugel reich zu werden, lassen sich nicht erfüllen.

Das Kugelparadoxon besitzt eine gleichermaßen erstaunliche Verallgemeinerung: Es seien  $K$  und  $K'$  Punktmengen des dreidimensionalen Raumes, die eine endliche Ausdehnung haben und eine — wenn auch noch so kleine — Kugel umfassen; z. B. sei  $K$  ein Körper von der Gestalt einer Rosenknospe oder eines Spinnennetzes und  $K'$  ein Körper von der Gestalt des Freiburger Münsters oder gar der gesamten Milchstraße. Dann läßt sich  $K$  in endlich viele Teile zerlegen, aus denen man  $K'$  zusammensetzen kann.

## Unter einem Apfelbaum

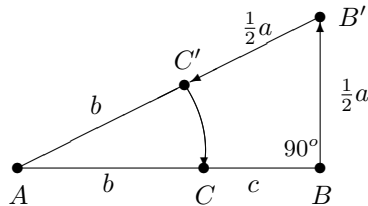
Ein rosenfarbner Frühlingssschaum  
gelegt in knorrig schwarze Äste.  
Sieh jene Blüte dort  
an jenem Zweig:  
sie birgt in sich  
den ganzen Blütenhimmel,  
und dieser, ohne sie,  
bleibt ganz sich gleich.

## Der Goldene Schnitt

Der Punkt  $C$  der Strecke  $AB$  teilt  $AB$  im Goldenen Schnitt, wenn sich die Länge  $a$  der Strecke  $AB$  zur Länge  $b$  des größeren Abschnitts  $AC$  wie  $b$  zur Länge  $c$  des kleineren Abschnitts  $CB$  verhält, wenn also  $b$  das geometrische Mittel von  $a$  und  $c$  ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \quad \text{d. h.} \quad b = \sqrt{ac}.$$

Die Zeichnung deutet an, wie man  $C$  (über die Punkte  $B'$  und  $C'$ ) mit Zirkel und Lineal gewinnen kann.



Der von der Strecke  $AB$  unabhängige Quotient  $\frac{b}{c}$ , die Zahl  $\Phi$  des Goldenen Schnitts, genügt der Gleichung  $\Phi^2 - \Phi = 1$  und hat den Wert  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618$ .

In der Architektur hat der Goldene Schnitt zuweilen bei Fragen der Ästhetik eine Rolle gespielt; Maßverhältnisse der Größe  $\Phi$  galten als besonders ansprechend. So teilt die Grundfläche des Helms den Turm des Freiburger Münsters (ohne die aufgesetzte Kreuzblume) der Höhe nach im Goldenen Schnitt, und die Abstände der (Mitten der) Langhauspfeiler zu den gegenüber liegenden bzw. zu den benachbarten Pfeilern verhalten sich wie 21 Ellen zu 13 Ellen, also wie  $\frac{21}{13} \approx 1,615$ . Noch in den 1940er Jahren hat Le Corbusier eine sich am Goldenen Schnitt orientierende Theorie der Proportionen aufgestellt.

## Der Barockgarten

Scheren die Natur verwalten,  
schneiden Werden und Vergehen,  
Wind möcht zögerlich nur wehen,  
Zufall darf sich nicht entfalten.

Bannstrahl metrischer Gestalten  
hat kein Quentchen übersehen,  
fest auf allen Beeten stehen  
Form und Maß, im Plan gehalten.

Quell der Regelhaftigkeiten,  
absoluter Herrscherwille  
fesselt gar die Jahreszeiten.

Jenseits von Struktur und Stille  
ein jauchzend Kind, und Schmetterlinge gleiten  
von hier nach dort in bunter Fülle.



## Über die Länge von Beweisen

Die Beweise des 290-Theorems und des Vierfarbensatzes, die erst mit Hilfe von Computern erbracht werden konnten, werfen eine interessante Frage auf: Gibt es in der Mathematik beweisbare Aussagen, denen im Rahmen der Theorie, der sie angehören, Bedeutung zukommt, die aber nicht bewiesen werden können, weil jeder Beweis zu lang ist, und das selbst dann, wenn Computer erlaubt sind? Könnten wichtige offene Vermutungen zu diesem Kreis gehören?

Es gibt zahlreiche Ergebnisse, die eine positive Antwort möglich erscheinen lassen. Sie setzen eine präzise Form der mathematischen Sprache und mathematischer Beweise voraus. Für eine beweisbare Aussage  $\varphi$  sei dann  $|\varphi|$  deren Länge und  $\beta(\varphi)$  die Länge eines kürzesten Beweises.

1974 bewiesen Michael J. Fischer und Michael O. Rabin: Es gibt eine positive Konstante  $c$  und eine unendliche Menge  $M$  von beweisbaren zahlentheoretischen Aussagen  $\varphi$ , die nur über die Addition sprechen, mit  $\beta(\varphi) \geq 2^{(2^{c|\varphi|})}$  für alle  $\varphi \in M$ . Auf  $M$  wachsen also die Beweislängen mindestens doppelt exponentiell in den Längen der  $\varphi$ . Läßt man auch die Multiplikation zu, lassen sich die Beweislängen durch keine noch so stark in der Länge der beweisbaren Aussagen  $\varphi$  wachsende berechenbare Funktion (wie die Funktion  $f$  mit  $f(n) = n^{(n^n)}$ ) beschränken.

Die Ergebnisse erlauben keine Rückschlüsse auf konkrete Aussagen. Sie zeigen aber, daß die Suche nach Beweisen nicht nur auf Schwierigkeiten technischer oder methodischer Natur treffen kann, sondern auch auf Schwierigkeiten, die ihre Ursache allein in der Länge der möglichen Beweise haben.

## Zugvögel

Der See zinngraue Glätte  
spiegelt Morgendämmerung  
zwei Flügel alle  
schwer ins Wasser schlagen  
sich in die Höhe tragen  
zurück verebben Wellen  
erstes Licht.

Der Himmel leibgestirnt  
im Kreisen um die eigne Mitte  
zwei Flügel alle  
jäh die Schwünge straffen  
das Blickgewebe raffen  
die Körper ausgerichtet  
gerade Bahn.

Zwei Perlenschnüre lichtergrau  
und federleicht ein Keil  
teilt sanft den Himmel  
gleitet in die Ferne  
die irgendwann vielleicht  
verharrt im Angekommensein.

## Hase und Schildkröte

Das hier beschriebene Spiel zwischen einem Hasen und einer Schildkröte geht auf Reuben Louis Goodstein (1944) zurück. Es ist eine Variante der Äsopischen Fabel vom Sieg des vermeintlich Schwächeren gegen den scheinbar Stärkeren.

Hase und Schildkröte wählen abwechselnd je eine natürliche Zahl und erzeugen so eine Folge  $h_2, s_2, h_3, s_3, h_4, s_4, \dots$ . Dabei gelten die folgenden Regeln:

- (1) Zu Beginn wählt der Hase eine Zahl  $h_2 > 0$ .
- (2) Hat der Hase  $h_k$  gewählt, wählt die Schildkröte als  $s_k$  die Zahl  $h_k - 1$ .
- (3) Hat die Schildkröte  $s_k$  gewählt und ist  $s_k = 0$ , endet das Spiel; die Schildkröte hat gewonnen. Ist  $s_k > 0$ , bestimmt der Hase die  $k$ -adische Darstellung

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$$

von  $s_k$  als ein Polynom  $p_k(k)$  in  $k$  mit Koeffizienten („Ziffern“)  $0 \leq a_0, \dots, a_n \leq k - 1$  und setzt

$$h_{k+1} = p_k(k + 1) = a_n(k + 1)^n + \dots + a_0.$$

Zum Beispiel ist 17, 16, 81, 80, 170, 169, 311, 310, 516, 515 der Beginn einer so gespielten Folge.

Obwohl der Hase mit großen Sprüngen zu höheren Zahlen zu eilen scheint, gewinnt die Schildkröte jedes Spiel. Ein eleganter Beweis nutzt aus, daß man mit der Ordinalzahl  $\omega$  weitgehend wie gewohnt rechnen kann. Man überzeugt sich, daß

$$\dots < p_4(\omega) < p_3(\omega) < p_2(\omega).$$

Da absteigende Folgen von Ordinalzahlen eine endliche Länge haben, muß die Folge  $h_2, s_2, h_3, s_3, \dots$  mit 0 abbrechen, also die Schildkröte gewinnen.

## Das sanfte Gesetz

Ein Beben tief in Berges Schoß,  
wo Pele, Herrin über Feuergründe,  
im Fieber ihrer Leidenschaft  
der Urgewalten Fesseln löst.

Hoch steigt die Glut,  
höher die Asche empor,  
vereint dann der Sturz hinab,  
sengend zieht die Flut ihre Spur,  
macht den Tag zur rauchenden Nacht.

Als sie das Werk gerichtet,  
wirft Pele feuertrunken  
und jubelvoll mit Donnerrollen  
sich in den Schlot,  
der Brodem fällt zusammen,  
erstarrt zu Kälte schwarz und tot.

Wo einst ein Baum gestanden,  
verglühend seinen Abdruck ließ,  
sprießt bald ein Blatt,  
dem aberviele Blätter folgen,  
sich zart mit Wachstum füllen  
und schwarze Öde tot und leer  
in grünes Leben hüllen.

Ein Duft von Myriaden Blüten  
wacht über Peles langem Schlaf.

## Bibliographische Anmerkungen

Wer die mathematischen Sachverhalte näher kennenlernen möchte, kann mehrere Wege gehen. Eine Reihe neuerer Bücher befaßt sich ähnlich, doch ausführlicher, mit verschiedenen Themen der Mathematik und gibt weiterführende Literatur an. Beispiele sind (02), (05) und, anspruchsvoller, aber anregend, (01) der folgenden Liste. (04) und (14) sind „klassische“, noch heute mit Gewinn lesbare Vorgänger. Ähnliches gilt für (15). Man kann die angesprochenen Themen auch an Hand von Lehrbüchern vertiefen, dann aber in der Regel nur über eine systematische Einarbeitung. Ich möchte aus diesem Grund auf eine größere Auswahl verzichten und beschränke mich auf (07) und (12). (12) behandelt Fragen der elementaren Zahlentheorie auf einem Niveau, das interessierten Laien zugänglich ist, und schließt Bezüge zu den reellen und den komplexen Zahlen ein; (07) stellt, beginnend mit den natürlichen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen, Gebiete der Mathematik vor, die in einem weiteren Sinn von Zahlen handeln. Auch das Internet kann hilfreich sein. Anregend ist die von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung betreute Seite [www.mathematik.de](http://www.mathematik.de). Für Fragen zur Geschichte kann man auf (08), (09), (17) und (18) zurückgreifen.

Mein Interesse an Bezügen zwischen Mathematik und Literatur geht auf (11) und (13) zurück. (11) schildert am Beispiel der Romantik solche Bezüge unter Einschluß der Philosophie. (13) stellt eine Fülle von Aussagen in der deutschsprachigen Literatur zu-

sammen, die über Mathematik und über Mathematiker sprechen, und analysiert sie unter ideen-, sozial-, kultur- und geistesgeschichtlichen Aspekten. (3) vermittelt einen ersten Eindruck von der Vielgestaltigkeit dieser literarischen Äußerungen.

Gedichte sollten nicht kommentiert werden. Dennoch seien mir einige Hinweise erlaubt. Sie betreffen fünf Gedichte und könnten deren Verständnis fördern. Den Gedichten *Der Barockgarten* (Seite 5) und *Der Englische Garten* (Seite 99) liegen Gartentheorien zugrunde, wie sie etwa in (06) und (10) dargestellt werden. Die beiden Gedichte *Atmen* und *Bewegung* (Seite 39) gehören in die sog.  $\pi$ -Prosa, genauer: in die Reihe der  $\pi$ -Gedichte: Die Anzahl der Buchstaben aufeinander folgender Wörter kodiert mehr oder minder direkt den entsprechenden Beginn der Dezimaldarstellung von  $\pi$ . Anders als Reime oder Schemata von Hebungen und Senkungen wird diese mathematische Formgebung nicht vom Gehör wahrgenommen. Dem Gedicht *Ciaccona* (Seite 105) liegen Ergebnisse der Musikwissenschaft, hier der gematrigen Analyse (16) der *Ciaccona* aus Johann Sebastian Bachs Partita für Violine solo in d-moll, zugrunde, die in den Werken Bachs verschlüsselte Botschaften zu entdecken glauben, Botschaften, die ebenfalls dem Gehör verborgen sind, sich dem der Verschlüsselungsmethode Kundigen jedoch aus der Partitur erschließen können.

(01) Martin Aigner und Günter M. Ziegler: *Das Buch der Beweise*, Springer, 2002; 3. Auflage 2010.

(02) Ehrhard Behrends, Peter Gritzmann und Günter M. Ziegler (Hrsg.): *Pi und Co. Kaleidoskop der Mathematik*, Springer, 2008.

- (03) Christian Blohmann: *Der rechnende Dichter*, Vortrag, 2001, im Netz unter arXiv:math/0308287v1 [math.HO], 2003.
- (04) Richard Courant und Herbert Robbins: *Was ist Mathematik?*, Springer, 1961; 5. Auflage 2010.
- (05) Tony Crilly: *Fünfzig Schlüsselideen Mathematik*, Springer Spektrum, 2009.
- (06) Heidi Ebbinghaus: *Der Landschaftsgarten. Natur und Phantasie in der deutschen Literatur des 18. und frühen 19. Jahrhunderts*, Peter Lang, 1997.
- (07) Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch u.a.: *Zahlen*, Springer, 1983; 3. Auflage 1992.
- (08) Helmuth Gericke: *Mathematik in Antike und Orient*, Springer, 1984.
- (09) Helmuth Gericke: *Mathematik im Abendland*, Springer, 1990.
- (10) Christian Cay Lorenz Hirschfeld: *Theorie der Gartenkunst*, M. G. Weidmanns Erben und Reich, 5 Bände, 1779–1785; Nachdruck Georg Olms, 1985.
- (11) Hans Niels Jahnke: *Mathematik und Romantik*. In: Volker Peckhaus und Christian Thiel (Herausgeber), *Disziplinen im Kontext. Perspektiven der Disziplingeschichtsschreibung*, Wilhelm Fink Verlag, 1999, Seiten 163–198.
- (12) Nicola Oswald und Jörn Steuding: *Elementare Zahlentheorie. Eine sanfte Einführung in die höhere Mathematik*, Springer Spektrum, 2015.
- (13) Knut Radbruch: *Mathematische Spuren in der Literatur*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1997.
- (14) Hans Rademacher und Otto Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren*, Springer, 1930; 5. Auflage 2001.

- (15) Lynn Arthur Steen (Editor): *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Springer, 1978.
- (16) Helga Thoene: *Johann Sebastian Bach: Ciaccogna — Tanz oder Tombeau? Eine analytische Studie*, Dr. Harry Ziethen, 2003.
- (17) Hans Wußing: *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Band 1: *Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*, Springer, 2008.
- (18) Hans Wußing mit Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock: *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Band 2: *Von Euler bis zur Gegenwart*, Springer, 2009.

## Namenverzeichnis

Kursiv gesetzte Jahreszahlen gelten nur angenähert.

Abel, Niels Henrik (1802–1829), 34  
Adleman, Leonard M. (\*1945), 88  
Agrawal, Manindra (\*1966), 86  
Anselm von Canterbury (*1033*–1109), 104  
Appel, Kenneth (1932–2013), 52  
Archimedes (*287*–212 v. Chr.), 26, 38  
Aristoteles (384–322 v. Chr.), 40  
Arrow, Kenneth J. (\*1921), 64  
Äsop (um 600 v. Chr.), 110  
Augustinus (354–430), 10  
Bach, Johann Sebastian (1685–1750), 122  
Banach, Stefan (1892–1945), 2  
Barwise, Jon (1942–2000), 112  
Bernoulli, Jakob (1655–1705), 26  
Bernstein, Felix (1878–1956), 68  
Bhargava, Manjul (\*1974), 54  
Blass, Andreas (\*1947), 70  
Boltzmann, Ludwig (1844–1906), 76  
Bolzano, Bernard (1781–1848), 94, 96  
Brouwer, Luitzen E. J. (1881–1966), 98  
Buffon, Georges-Louis Leclerc de (1707–1788), 38  
Cantor, Georg (1845–1918), 30, 32, 36, 62, 72, 74,  
96, 102, 106, 108  
Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857), 96  
Cayley, Arthur (1821–1895), 48  
Ceulen, Ludolph van (1540–1610), 38  
Chakerian, Gulbank D. (\*1933), 58  
Church, Alonzo (1903–1995), 84

Clausius, Rudolf (1822–1888), 76  
Cohen, Paul J. (1934–2007), 32  
Conway, John Horton (\*1937), 54  
Cotes, Roger (1682–1716), 24  
Descartes, René (1596–1650), 26, 50  
Diophantos von Alexandria (um 250), 54  
Dürer, Albrecht (1471–1528), 26, 50  
Eich, Günter (1907–1972), 1  
Euklid (um 300 v. Chr.), 6, 10, 118  
Euler, Leonhard (1707–1783), vii, 10, 24, 36,  
50, 54, 58  
Eutokios von Ascalon (*480*–*540*), 40  
Fermat, Pierre de (*1601*–1665), 12, 42  
Ferro, Scipione del (1465–1526), 34  
Fibonacci (*1175*–*1245*), 8  
Fischer, Michael J. (\*1942), 56  
Fraenkel, Abraham A. (1891–1965), 72  
Frobenius, Georg (1849–1917), 48  
Gauß, Carl Friedrich (1777–1855), 22, 42, 46  
Gödel, Kurt (1906–1978), 32, 72, 96, 102,  
104, 116, 118  
Goldbach, Christian von (1690–1764), 98  
Goodstein, Reuben Louis (1912–1985), 110  
Graves, John T. (1806–1870), 48  
Gregory, James (1638–1675), 20  
Guthrie, Francis (1831–1899), 52  
Hadamard, Jacques (1865–1963), 6  
Haken, Wolfgang (\*1928), 52  
Hamilton, William Rowan (1805–1865), 22, 48  
Hanke, Jonathan P., 54  
Hardy, Godfrey Harold (1877–1947), 80  
Hausdorff, Felix (1868–1942), 62, 70  
Hermes, Johann Gustav (1846–1912), 42  
Hermite, Charles (1822–1901), 36

Hilbert, David (1862–1943), 62, 102, 118  
 Hippasos von Metapont (um 500 v. Chr.), 18  
 Hopf, Heinz (1894–1971), 48  
 Johnson, Robert Sherlaw (1932–2000), 74  
 Kervaire, Michael A. (1927–2007), 48  
 Kant, Immanuel (1724–1804), 104  
 Kleene, Stephen Cole (1909–1994), 112  
 Koch, Niels Fabian Helge von (1870–1924), 74  
 Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813), 54  
 La Vallée Poussin, Charles Jean de (1866–1962), 6  
 Le Corbusier (1887–1965), 4  
 Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), 20, 38  
     84, 94, 104  
 Leonardo von Pisa (*1175–1245*), 8  
 Lindemann, Ferdinand von (1852–1939), 36, 38, 40  
 Listing, Johann Benedikt (1808–1882), 60  
 Lullus, Raimundus (*1232–1316*), 84  
 Maddy, Penelope (\*1950), 102  
 Mandelbrot, Benoît (1924–2010), 74  
 Mercator, Gerardus (1512–1594), 46  
 Mersenne, Marin (1588–1648), 10  
 Milnor, John W. (\*1931), 48  
 Mises, Richard von (1883–1953), 78  
 Möbius, August Ferdinand (1790–1868), 60  
 Neumann, Johann von (1903–1957), 16, 106  
 Novalis (1772–1801), 1  
 Peano, Giuseppe (1858–1939), 62  
 Platon (*427–347* v. Chr.), 102  
 Poincaré, Henri (1854–1912), 76  
 Pythagoras (*575–500* v. Chr.), 12  
 Rabin, Michael O. (\*1931), 56  
 Riemann, Bernhard (1826–1866), 28  
 Rivest, Ronald L. (\*1947), 88  
 Robinson, Raphael (1911–1995), 2

Russell, Bertrand (1872–1970), 72, 98  
 Schneeberger, William A., 54  
 Scholz, Heinrich (1884–1956), 102  
 Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921), 66  
 Shamir, Adi (\*1952), 88  
 Skolem, Thoralf (1887–1963), 72  
 Takeuti, Gaisi (\*1926), 96, 100  
 Tarski, Alfred (1901–1983), 2, 116  
 Thomas von Aquin (*1225–1274*), 104  
 Turing, Alan (1912–1954), 84, 112, 114  
 Wantzel, Pierre-Laurent (1814–1848), 42  
 Weierstraß, Karl (1815–1897), 66  
 Weinberg, Wilhelm (1862–1937), 80  
 Wessel, Caspar (1745–1818), 22  
 Weyl, Hermann (1885–1955), 98  
 Wiles, Andrew (\*1953), 12  
 Zenodorus (*200–140* v. Chr.), 66  
 Zermelo, Ernst (1871–1953), 16, 70, 72, 76,  
     82, 98, 106  
 Zorn, Max (1906–1993), 70

## Kleines Sachverzeichnis

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2$  (Aleph Null, Eins, Zwei), 32  
Aleph, 108  
Antinomie, Zermelo-Russellsche, 72  
Äquivalenz von Mengen, 68  
Äquivalenzklasse, 92  
Äquivalenzrelation, 92  
Argument einer komplexen Zahl, 24  
Auswahlaxiom, 70  
Axiom, 118  
Betrag einer komplexen Zahl, 24  
Beweis durch vollständige Induktion, 14  
Diagonalverfahren, 30  
Dimension, 44  
Diskontinuum, Cantorsches, 74  
 $e$  (Eulersche Zahl), vii  
 $\varepsilon$ -Kette, absteigende, 16  
Fibonacci-Zahlen, 8  
Folge, konvergierende, 20  
Formel, Eulersche, 24  
Fraktal, 74  
Fundamentalsatz der Algebra, 22  
Funktion, berechenbare, 112  
gleichmächtig, 68  
Graph, 52  
Grenzwert einer Folge, 20  
Induktion, vollständige, 14  
Induktionsaxiom, 14  
Irrationalzahl, 36  
Kardinalzahl, 108

Kette, absteigende, 16  
Konstruktion mit Zirkel und Lineal, 40  
Kontinuum, 32  
Körper der komplexen Zahlen, 22  
Kreiszahl, 38  
Kugelparadoxon, 2  
Kurve, stetige, 62  
Logarithmus, natürlicher, vii  
Mächtigkeit, unendliche, 108  
Menge, abzählbare, 30  
Menge, überabzählbare, 30  
Menge, überabzählbare der reellen Zahlen, 30  
Mengen, äquivalente, 68  
 $\omega$  (Omega), 106  
Ordinalzahl, 106  
Ordinalzahl, endliche, 106  
Ordinalzahl, unendliche, 106  
 $\pi$  (Pi), 38  
 $\pi$ , Leibnizsche Reihendarstellung von, 20  
 $\pi$ , Transzendenz von, 38  
Primzahl, 6  
Prinzip vom kleinsten Element, 16  
Programm zur Berechnung einer Funktion, 112  
Quadratur des Kreises, 40  
reflexiv, 92  
Reihe, 20  
Reihendarstellung von  $\pi$ , Leibnizsche, 20  
Repräsentantensystem, 92  
Schnitt, Goldener, 4  
selbstähnlich, 74  
symmetrisch, 92  
Theorem einer Theorie, 118  
transitiv, 92  
Transzendenz von  $\pi$ , 38

trivial, 90  
Turingmaschine, 84  
Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen,  
30  
Unvollständigkeitssatz, Erster, 118  
Unvollständigkeitssatz, Zweiter, 118  
Vierfarbensatz, 52  
Wohlordnung, 16  
Wohlordnung, der Ordinalzahlen, 108  
Zahl, algebraische, 36  
Zahl des Goldenen Schnitts, 4  
Zahl des Goldenen Schnitts, Irrationalität der, 18  
Zahl, Eulersche, vii  
Zahl, irrationale, 36  
Zahl, komplexe, 22  
Zahl, transzendente, 36  
Zahl, vollkommene, 10  
290-Theorem, 54