Mathematik und Lyrik, „Zahlen und Zeilen“, zusammenbringen?
Hier geschieht gerade dies:
Einem kurzen mathematischen Text steht jeweils ein Gedicht gegenüber, das wesentliche Aspekte der mathematischen Aussage in der ihm eigenen Welt spiegelt, hinterfragt oder ergänzt.
Dem Reichtum mathematischer Themen entspricht auf der Lyrikseite eine gleichermaßen farbige Vielfalt von Formen und Inhalten.
Die Bezüge zwischen den mathematischen Texten und ihren Partnergedichten erschließen sich in vielen Fällen sofort.
Verborgene oder rätselhafte fordern die Fantasie heraus.
Um die Texte zu verstehen, bedarf es nicht besonderer mathematischer Kenntnisse, öfter jedoch einer gefestigten Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Zahlen und Zeilen
oder
das blaue Pferd

Mathematik und Lyrik im Gespräch

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Mathematik und Lyrik, Beweise und Gedichte zusammenbringen? Auf der einen Seite Begriffe und Argumente, die formalen und logischen Kriterien genügen müssen, auf der anderen Seite die freie Entfaltung sprachlichen Gestaltens; dort der Anspruch auf Objektivität, hier die individuelle Aussage. Doch diese Gegensätze verlieren an Gewicht, wenn man, vielleicht ein wenig überraschend, feststellt, dass manche Eigenheiten mathematischen Arbeitens auch für die lyrische Tätigkeit zutreffen: Kreativität und Fantasie als Helfer, Dichte und Einfachheit der Darstellung als methodische Ziele, ästhetische Urteile über das Erreichte, z. B. Urteile, die einem Beweis Eleganz und Schönheit zuschreiben.

Das vorliegende Bändchen stellt der Schilderung eines mathematischen Sachverhalts, Begriffs oder Beweises jeweils ein Gedicht zur Seite, das wesentliche Aspekte der mathematischen Aussage spiegelt, bisweilen auch hinterfragt oder ergänzt. Oft lässt sich die innere Verwandtschaft der Partner unmittelbar erkennen. Wenn nicht, sei die Übersetzung aus der einen Welt in die andere der Fantasie anvertraut. Es lag in meiner Absicht, die Bezüge zuweilen auch rätselhaft erscheinen zu lassen.

Die mathematischen Themen folgen keiner Systematik; zuweilen äußern sich inhaltliche Zusammenhänge im örtlichen Beieinander. Einige Themen handeln nicht von Ergebnissen der Mathematik, sondern von der Mathematik selbst, ihrer Methodik und deren Tragweite. Die Auswahl ist sicherlich sehr subjektiv. Insgesamt aber, so hoffe ich, ist ein Mosaik entstanden, das den Reichtum der Mathematik bezeugt und in der Vielgestaltigkeit von Form und Inhalt der Gedichte ein farbiges Gegenüber findet.

Die Gleichberechtigung von Mathematik und Lyrik wollte ich nach außen sichtbar machen, nämlich durch die Beschränkung der mathematischen Texte „auf Gedichtlänge“, auf jeweils eine einzige kleinformatige Seite. So können die einzelnen Paare mit einem Blick erfasst werden. Dennoch wollte ich den mathematischen Gehalt klar zutage treten lassen und auf geschichtliche Entwicklungen nicht verzichten.

Der Preis für diese Vorgaben liegt auf der Hand: Die Texte können nur knapp das Wesentliche sagen. Ich habe mich bemüht, sie so abzufassen, dass sie ohne eine weiter reichende Kenntnis der jeweiligen Gebiete verständlich sein sollten. Dennoch erfordern einige Texte eine größere Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise. Häufig betrifft diese Voraussetzung allerdings nicht die Texte im Ganzen; die Kernaussage bleibt dann von ihr unberührt.

Die Gedichte wollen keinen poetischen Anspruch erheben. Sie sind vor allem Partner, die charakteristische Züge ihrer mathematischen Begleiter eigensinnig übernommen haben. Zuweilen haben sie auf die Texte zurückgewirkt. Dem habe ich durch das Wort „Gespräch“ im Untertitel Rechnung getragen.

Detlef Spalt und Rüdiger Thiele haben mir wertvolle historische Hinweise gegeben.

Mein besonderer Dank gilt Heidi und Susanne. Sie haben die Entstehung des Bändchens anregend und kritisch begleitet.

Zum Schluß: An einem Nachmittag im März 2007 kam mir in den Sinn, die einige Jahre zuvor entstandene erste Fassung des Apfelbaum-Gedichts von Seite 7 zu überarbeiten. Als ich mir dazu noch einmal die Aussage klar machte, die ich dem Gedicht mitgeben wollte, stand plötzlich das Kugelparadoxon vor meinen Augen. Die Idee zu diesem Bändchen war geboren und gleichzeitig sein erstes Paar.

* * * * *

Die vorliegende dritte Auflage beruht auf einer korrigierten und erweiterten Version der ersten Auflage.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Einige Hinweise

Mathematische Symbole werden eher zurückhaltend benutzt. Die Elementbeziehung wird durch das Symbol ε wiedergegeben. Die Schreibweise „$x \,\varepsilon\, M$“ deutet an, dass das Objekt x ein Element der Menge M ist. Die Menge der natürlichen Zahlen schließt die Null ein; sie wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Wenn nichts anderes vereinbart ist, dienen die Buchstaben i, j, k, l, m, n als Variablen für natürliche Zahlen.
Mengen definiert man in der Regel dadurch, dass man ihre Elemente angibt. Man schreibt dann z. B. $\{1, 3, 5, \ldots\}$ oder $\{n \,|\, n$ ist ungerade natürliche Zahl$\}$ für die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.
Mit log ist stets der natürliche Logarithmus gemeint, also der Logarithmus mit der sog. Eulerschen Zahl $e = 2,71828...$ als Basis.
Sachverhalte und definierte Begriffe, die mehrfach auftreten, sind auf den Seiten 129–131 in einem kleinen Sachverzeichnis zusammengetragen. Die sie dort begleitende Zahl verweist auf die Seite, auf der sie geschildert oder definiert werden. Zusammengesetzte Begriffe der Form „Adjektiv Substantiv“ findet man unter „Substantiv, Adjektiv“, also „Goldener Schnitt“ unter „Schnitt, Goldener“. Dem Sachverzeichnis gehen bibliografische Anmerkungen und ein Namenverzeichnis voran.

Inhalt

Das Kugelparadoxon 2
Unter einem Apfelbaum 3
Der Goldene Schnitt 4
Der Barockgarten 5
Primzahlen 6
Regenspiel 7
Die Fibonacci-Zahlen 8
Sprießen / Sonnenblume 9
Vollkommene Zahlen 10
Der Schlußton 11
Der große Satz von Fermat 12
Der alte Nil 13
Vollständige Induktion 14
Rondo vivace 15
Das Prinzip vom kleinsten Element 16
Standort 17
Kommensurabilität 18
Wege 19
Grenzwerte 20
Spätherbst 21
Der Körper der komplexen Zahlen 22
Du Erde 23
Eine Eulersche „Weltformel" 24
Traum eines Physikers 25
Ebene Spiralen 26
Schneckenhaus 27
Riemannsche Flächen 28
Eine rote Rose 29

Das Cantorsche Diagonalverfahren 30
Schlüsselwünsche 31
Die Kontinuumshypothese 32
Im Frühling 33
Gleichungen höheren Grades 34
Zu dir 35
Algebraische und transzendente Zahlen 36
Die Chinesische Mauer 37
Die Kreiszahl 38
Atmen / Bewegung 39
Von der Quadratur des Kreises 40
Verwandlung 41
Konstruktion gleichseitiger n-Ecke 42
Eigene Zeit 43
Mehrdimensionale Räume 44
Von neuen Dimensionen 45
Landkarten 46
Das Portrait 47
Quaternionen und Oktaven 48
An die Obertöne 49
Magische Quadrate 50
Denken und Fühlen 51
Das Vierfarbenproblem 52
Sieben und Eins 53
Das 290-Theorem 54
Paragrafen 55
Über die Länge von Beweisen 56
Zugvögel 57
Die Eulersche Polyederformel 58
Das Collier 59
Orientierung 60
Sehnsucht 61
Raumfüllende Kurven 62
Das Seidenjahr 63

Der Satz vom Diktator . . . 64
An die Natur . . . 65
Das isoperimetrische Problem . . . 66
Sterne . . . 67
Der Äquivalenzsatz . . . 68
Wir spielen Eisenbahn . . . 69
Das Auswahlaxiom . . . 70
Warum . . . 71
Die Zermelo-Russellsche Antinomie . . . 72
Der Mammutbaum . . . 73
Selbstähnlichkeit . . . 74
Baumfarn . . . 75
Entropie . . . 76
Umkehr . . . 77
Das Geburtstagsproblem . . . 78
Zufall . . . 79
Dominanz und Rezessivität . . . 80
Leberblümchen . . . 81
Auswertung von Turnieren . . . 82
David . . . 83
Berechenbarkeit und Wahrheit . . . 84
Wolkenleben . . . 85
Polynomiale Zeit . . . 86
Der Turmspringer . . . 87
Kodieren mit Primzahlen . . . 88
Zurückgelassene Blicke . . . 89
Trivialitäten . . . 90
Abzählreime . . . 91
Äquivalenzrelationen . . . 92
Die Arche Noah . . . 93
Gleichheit und Extensionalität . . . 94
Verweht . . . 95
Vom Rationalen zum Reellen . . . 96
Höher hinaus . . . 97

Der Intuitionismus . . . 98
Der Englische Garten . . . 99
Mathematik, Technik, Sicherheit . . . 100
Hinauf . . . 101
Die Natur mathematischer Objekte . . . 102
Es . . . ,103
Gottesbeweise . . . 104
Ciaccona . . . 105
Die Ordinalzahl Omega . . . 106
Die Hasenleiter . . . 107
Ordinalzahlen und Kardinalzahlen . . . 108
Chinesisches Rollbild . . . 109
Hase und Schildkröte . . . 110
Das sanfte Gesetz . . . 111
Ein Fixpunktsatz . . . 112
Der steinige Weg . . . 113
Universalität . . . 114
Blüte im Gegenlicht . . . 115
Wahrheitskriterien . . . 116
Der Wetterprophet . . . 117
Unvollständigkeit . . . 118
Das blaue Pferd . . . 119
Bibliografische Anmerkungen . . . 121
Namenverzeichnis . . . 125
Kleines Sachverzeichnis . . . 129

. . . wenn der Mathematiker
wircklich etwas richtiges thut,
so thut ers,
als *poetischer philosoph.*

Novalis (1772–1801)

Dorthin gehen,
wo die Parallelen sich schneiden.
Die Forderungen der Logik
durch Träume erfüllen.

Günter Eich (1907–1972)

Das Kugelparadoxon

Das Kugelparadoxon von Stefan Banach und Alfred Tarski (1924) gehört zu den erstaunlichsten Resultaten der Mathematik: Eine Kugel vom Radius r lässt sich so in endlich viele Teile zerlegen, dass man aus diesen Teilen zwei volle Kugeln vom gleichen Radius r zusammensetzen kann. Nach Raphael Robinson (1947) gibt es paradoxe Zerlegungen dieser Art, die aus nur fünf Teilen bestehen.

Der Beweis des Kugelparadoxons liefert keinen Hinweis darauf, wie die Teile aussehen könnten. Er ist, wie man sagt, ein reiner Existenzbeweis. Seine Eigenart hat ihren Grund darin, dass er wesentlich das Auswahlaxiom benutzt, ein Axiom, das wegen seiner Abstraktheit in der Mathematik lange umstritten war.

Da sich Volumina von Teilen beim Zusammensetzen addieren, müssen einige Teile einer paradoxen Zerlegung der Kugel so "zerfasert" sein, dass sie kein Volumen haben. Selbst wenn sie aus Gold bestünden, hätten sie kein Gewicht. Träume, durch paradoxe Zerlegungen einer Goldkugel reich zu werden, lassen sich nicht erfüllen.

Das Kugelparadoxon besitzt eine noch erstaunlichere Verallgemeinerung: Es seien K und K' Punktmengen des dreidimensionalen Raumes, die eine endliche Ausdehnung haben und eine — wenn auch noch so kleine — Kugel umfassen; z. B. sei K ein Körper von der Gestalt einer Rosenknospe oder eines Spinnennetzes und K' ein Körper von der Gestalt des Freiburger Münsters oder gar der gesamten Milchstraße. Dann lässt sich K in endlich viele Teile zerlegen, aus denen man K' zusammensetzen kann.

Unter einem Apfelbaum

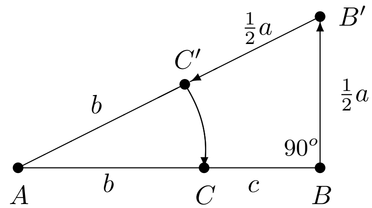
Ein rosenfarbner Frühlingsschaum
Gelegt in knorrig schwarze Äste
Sieh jene Blüte dort
An jenem Zweig
Sie birgt in sich
Den ganzen Blütenhimmel
Und dieser ohne sie
Bleibt ganz sich gleich

Der Goldene Schnitt

Der Punkt C der Strecke AB teilt AB im Goldenen Schnitt, wenn sich die Länge a der Strecke AB zur Länge b des größeren Abschnitts AC wie b zur Länge c des kleineren Abschnitts CB verhält, wenn also b das geometrische Mittel von a und c ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \quad \text{d. h.} \quad b = \sqrt{ac}\,.$$

Die Zeichnung deutet an, wie man C (über die Punkte B' und C') mit Zirkel und Lineal gewinnen kann.



Der von der Strecke AB unabhängige Quotient $\frac{b}{c}$, die Zahl Φ des Goldenen Schnitts, genügt der Gleichung $\Phi^2 - \Phi = 1$ und hat den Wert $\frac{1}{2}\bigl(1+\sqrt{5}\bigr) \approx 1{,}618$.

In der Architektur hat der Goldene Schnitt zuweilen bei Fragen der Ästhetik eine Rolle gespielt; Maßverhältnisse der Größe Φ galten als besonders ansprechend. So teilt die Grundfläche des Helms den Turm des Freiburger Münsters (ohne die aufgesetzte Kreuzblume) der Höhe nach im Goldenen Schnitt, und die Abstände der (Mitten der) Langhauspfeiler zu den gegenüber liegenden bzw. zu den benachbarten Pfeilern verhalten sich wie 21 Ellen zu 13 Ellen, also wie $\frac{21}{13} \approx 1{,}615$. Noch in den 1940er Jahren hat Le Corbusier eine sich am Goldenen Schnitt orientierende Theorie der Proportionen aufgestellt.

Der Barockgarten

Scheren die Natur verwalten
Schneiden Werden und Vergehen
Wind möcht zögerlich nur wehen
Zufall darf sich nicht entfalten

Bannstrahl metrischer Gestalten
Hat kein Quentchen übersehen
Fest auf allen Beeten stehen
Form und Maß im Plan gehalten

Quell der Regelhaftigkeiten
Absoluter Herrscherwille
Fesselt gar die Jahreszeiten

Jenseits von Struktur und Stille
Ein jauchzend Kind und Schmetterlinge gleiten
Von hier nach dort in bunter Fülle

Über die Länge von Beweisen

Die Beweise des 290-Theorems und des Vierfarbensatzes, die erst mit Hilfe von Computern erbracht werden konnten, werfen eine interessante Frage auf: Gibt es in der Mathematik beweisbare Aussagen, denen im Rahmen der Theorie, der sie angehören, Bedeutung zukommt, die aber nicht bewiesen werden können, weil jeder Beweis zu lang ist, und das selbst dann, wenn Computer erlaubt sind? Könnten wichtige offene Vermutungen zu diesem Kreis gehören?
Es gibt zahlreiche Ergebnisse, die eine positive Antwort möglich erscheinen lassen. Sie setzen eine präzise Form der mathematischen Sprache und mathematischer Beweise voraus. Für eine beweisbare Aussage φ sei dann $\lambda(\varphi)$ deren Länge und $\beta(\varphi)$ die Länge eines kürzesten Beweises.
1974 bewiesen Michael J. Fischer und Michael O. Rabin: Es gibt eine positive Konstante c und eine unendliche Menge M von beweisbaren zahlentheoretischen Aussagen φ, die nur über die Addition sprechen, mit $\beta(\varphi) \geq 2^{(2^{c\lambda(\varphi)})}$ für alle $\varphi \varepsilon M$. Auf M wachsen also die Beweislängen mindestens doppelt exponentiell in den Längen der φ. Lässt man auch die Multiplikation zu, lassen sich die Beweislängen durch keine noch so stark in der Länge der beweisbaren Aussagen φ wachsende berechenbare Funktion (wie die Funktion f mit $f(n) = n^{(n^n)}$) beschränken.
Die Ergebnisse erlauben keine Rückschlüsse auf konkrete Aussagen. Sie zeigen aber, dass die Suche nach Beweisen nicht nur auf Schwierigkeiten technischer oder methodischer Natur treffen kann, sondern auch auf Schwierigkeiten, die ihre Ursache allein in der Länge der möglichen Beweise haben.

Zugvögel

Der See zinngraue Glätte
Spiegelt Morgendämmerung
Zwei Flügel alle
Schwer ins Wasser schlagen
Sich in die Höhe tragen
Zurück verebben Wellen
Erstes Licht

Der Himmel leibgestirnt
Im Kreisen um die eigne Mitte
Zwei Flügel alle
Jäh die Schwünge straffen
Das Blickgewebe raffen
Die Körper ausgerichtet
Gerade Bahn

Zwei Perlenschnüre lichtergrau
Und federleicht ein Keil
Teilt sanft den Himmel
Gleitet in die Ferne
Die irgendwann vielleicht
Verharrt im Angekommensein

Hase und Schildkröte

Das hier beschriebene Spiel zwischen einem Hasen und einer Schildkröte geht auf Reuben Louis Goodstein (1944) zurück. Es ist eine Variante der Äsopschen Fabel vom Sieg des vermeintlich Schwächeren gegen den scheinbar Stärkeren.

Hase und Schildkröte wählen abwechselnd je eine natürliche Zahl und erzeugen so eine Folge $h_2, s_2, h_3, s_3, h_4, s_4, \ldots$. Dabei gelten die folgenden Regeln:

(1) Zu Beginn wählt der Hase eine Zahl $h_2 > 0$.

(2) Hat der Hase h_k gewählt, wählt die Schildkröte als s_k die Zahl $h_k - 1$.

(3) Hat die Schildkröte s_k gewählt und ist $s_k = 0$, endet das Spiel; die Schildkröte hat gewonnen. Ist $s_k > 0$, bestimmt der Hase die k-adische Darstellung

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0$$

von s_k als ein Polynom $p_k(k)$ in k mit Koeffizienten („Ziffern“) $0 \leq a_0, \ldots, a_n \leq k - 1$ und setzt

$$h_{k+1} = p_k(k+1) = a_n(k+1)^n + \cdots + a_0.$$

Zum Beispiel ist 17, 16, 81, 80, 170, 169, 311, 310, 516, 515 der Beginn einer so gespielten Folge.

Obwohl der Hase mit großen Sprüngen zu höheren Zahlen zu eilen scheint, gewinnt die Schildkröte jedes Spiel. Ein eleganter Beweis nutzt aus, dass man mit der Ordinalzahl ω weitgehend wie gewohnt rechnen kann. Man überzeugt sich, dass

$$\cdots < p_4(\omega) < p_3(\omega) < p_2(\omega).$$

Da absteigende Folgen von Ordinalzahlen eine endliche Länge haben, muss die Folge $h_2, s_2, h_3, s_3, \ldots$ mit 0 abbrechen, also die Schildkröte gewinnen.

Das sanfte Gesetz

Ein Beben tief in Berges Schoß
Wo Pele Herrin über Feuergründe
Im Fieber ihrer Leidenschaft
Der Urgewalten Fesseln löst

Hoch steigt die Glut
Höher die Asche empor
Vereint dann der Sturz hinab
Sengend zieht die Flut ihre Spur
Macht den Tag zur rauchenden Nacht

Als sie das Werk gerichtet
Wirft Pele feuertrunken
Und jubelvoll mit Donnergrollen
Sich in den Schlot
Der Brodem fällt zusammen
Erstarrt zu Kälte schwarz und tot

Wo einst ein Baum gestanden
Verglühend seinen Abdruck ließ
Sprießt bald ein Blatt
Dem aberviele Blätter folgen
Sich zart mit Wachstum füllen
Und schwarze Öde tot und leer
In grünes Leben hüllen

Ein Duft von Myriaden Blüten
Wacht über Peles langem Schlaf

Bibliografische Anmerkungen

Wer die mathematischen Sachverhalte näher kennenlernen möchte, kann mehrere Wege gehen. Eine Reihe von Büchern befasst sich ähnlich, doch ausführlicher, mit verschiedenen Themen der Mathematik und gibt weiterführende Literatur an. Beispiele sind (02), (05) und, anspruchsvoller, aber anregend, (01) der folgenden Liste. (04) und (16) sind „klassische“, noch heute mit Gewinn lesbare Vorgänger. Ähnliches gilt für (17). (09) schildert wichtige Konzepte und Ergebnisse der Mathematik und die Entwicklung der ihnen zugrunde liegenden Ideen.
Man kann die angesprochenen Themen auch anhand von Lehrbüchern vertiefen. Eine Anleitung dazu, eine Darstellung grundlegender Konzepte, Begriffe und Beweismethoden verschiedener Gebiete, findet sich in (06). Was die Literatur für einzelne Gebiete betrifft, so beschränke ich mich auf die Nennung von (08) und (14). (14) behandelt Fragen der elementaren Zahlentheorie auf einem Niveau, das interessierten Laien zugänglich ist, und schließt Bezüge zu den reellen und den komplexen Zahlen ein; (08) stellt, beginnend mit den natürlichen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen, Gebiete der Mathematik vor, die in einem weiteren Sinn von Zahlen handeln.
Auch das Internet kann hilfreich sein. Anregend ist die von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung betreute Seite www.mathematik.de. Für Fragen zur Geschichte kann man auf die ausführlichen Darstellungen (10), (11), (19) und (20) zurückgreifen.

Mein Interesse an Bezügen zwischen Mathematik und, allgemein gesprochen, Literatur geht auf (13) und (15) zurück. (13) schildert am Beispiel der Romantik solche Bezüge unter den beiden Aspekten „Mathematik *in der* Romantik“ und „Mathematik *und* Romantik“. (15) stellt eine Fülle von Aussagen in der deutschsprachigen Literatur zusammen, die über Mathematik sprechen, und analysiert sie unter ideen-, sozial-, kultur- und geistesgeschichtlichen Aspekten. (03) vermittelt einen ersten Eindruck von der Vielgestaltigkeit dieser literarischen Äußerungen. Gedichte sollten nicht kommentiert werden. Dennoch seien mir einige Hinweise erlaubt. Sie betreffen fünf Gedichte und könnten deren Verständnis fördern. Den Gedichten Der Barockgarten (Seite 5) und Der Englische Garten (Seite 99) liegen Gartentheorien zugrunde, wie sie etwa in (07) und (12) dargestellt werden. Die beiden Gedichte Atmen und Bewegung (Seite 39) gehören in die sog. π-Prosa, genauer: in die Reihe der π-Gedichte: Die Anzahl der Buchstaben aufeinander folgender Wörter kodiert mehr oder minder direkt den entsprechenden Beginn der Dezimaldarstellung von π. Anders als Reime oder Schemata von Hebungen und Senkungen wird diese mathematische Formgebung nicht vom Gehör wahrgenommen. Dem Gedicht Ciaccona (Seite 105) liegen Ergebnisse der Musikwissenschaft, hier der gematrischen Analyse (18) der Ciaccona aus Johann Sebastian Bachs Partita für Violine solo in d-moll, zugrunde, die in den Werken Bachs verschlüsselte Botschaften zu entdecken glauben, Botschaften, die ebenfalls dem Gehör verborgen sind, sich dem der Verschlüsselungsmethode Kundigen jedoch aus der Partitur erschließen können.

(01) Martin Aigner und Günter M. Ziegler: *Das Buch der Beweise*, Springer, 2002; 3. Auflage 2010.

(02) Ehrhard Behrends, Peter Gritzmann und Günter M. Ziegler (Hrsg.): *Pi und Co. Kaleidoskop der Mathematik*, Springer, 2008; 2. Auflage 2016.

(03) Christian Blohmann: *Der rechnende Dichter*, Vortrag, 2001, im Netz unter arXiv:math/0308287v1 [math.HO], 2003.

(04) Richard Courant und Herbert Robbins: *Was ist Mathematik?*, Springer, 1961; 5. Auflage 2010.

(05) Tony Crilly: *Fünfzig Schlüsselideen Mathematik*, Springer Spektrum, 2009.

(06) Oliver Deiser, Caroline Lasser, Elmar Vogt und Dirk Werner: *12 × 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik*, Springer Spektrum, 2011; 2. Auflage 2016.

(07) Heidi Ebbinghaus: *Der Landschaftsgarten. Natur und Phantasie in der deutschen Literatur des 18. und frühen 19. Jahrhunderts*, Peter Lang, 1997.

(08) Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch u.a.: *Zahlen*, Springer, 1983; 3. Auflage 1992.

(09) Jost-Hinrich Eschenburg: *Sternstunden der Mathematik*, Springer Spektrum, 2017.

(10) Helmuth Gericke: *Mathematik in Antike und Orient*, Springer, 1984.

(11) Helmuth Gericke: *Mathematik im Abendland*, Springer, 1990.

(12) Christian Cay Lorenz Hirschfeld: *Theorie der Gartenkunst*, M. G. Weidmanns Erben und Reich, 5 Bände, 1779–1785; Nachdruck Georg Olms, 1985.

(13) Hans Niels Jahnke: *Mathematik und Romantik.* In: Volker Peckhaus und Christian Thiel (Herausgeber), *Disziplinen im Kontext. Perspektiven der Disziplingeschichtsschreibung*, Wilhelm Fink Verlag, 1999, Seiten 163–198.

(14) Nicola Oswald und Jörn Steuding: *Elementare Zahlentheorie. Eine sanfte Einführung in die höhere Mathematik*, Springer Spektrum, 2015.

(15) Knut Radbruch: *Mathematische Spuren in der Literatur*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1997.

(16) Hans Rademacher und Otto Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren*, Springer, 1930; Nachdruck 2001 der 2. Auflage 1933.

(17) Lynn Arthur Steen (Editor): *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Springer, 1978.

(18) Helga Thoene: *Johann Sebastian Bach: Ciaccona — Tanz oder Tombeau? Eine analytische Studie*, Dr. Harry Ziethen, 2003.

(19) Hans Wußing: *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Band 1: *Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*, Springer, 2008.

(20) Hans Wußing mit Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock: *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Band 2: *Von Euler bis zur Gegenwart*, Springer, 2009.

Namenverzeichnis

Kursiv gesetzte Jahreszahlen gelten nur angenähert.

Abel, Niels Henrik (1802–1829), 34
Adleman, Leonard M. (*1945), 88
Agrawal, Manindra (*1966), 86
Anselm von Canterbury (*1033*–1109), 104
Appel, Kenneth (1932–2013), 52
Archimedes (*287*–212 v. Chr.), 26, 38
Argand, Jean-Robert (1768-1822), 22
Aristoteles (384–322 v. Chr.), 40
Arrow, Kenneth J. (1921–2017), 64
Äsop (um 600 v. Chr.), 110
Augustinus (354–430), 10
Bach, Johann Sebastian (1685–1750), 122
Banach, Stefan (1892–1945), 2
Barwise, Jon (1942–2000), 112
Bernoulli, Jakob (1655–1705), 26
Bernstein, Felix (1878–1956), 68
Bhargava, Manjul (*1974), 54
Blass, Andreas (*1947), 70
Boltzmann, Ludwig (1844–1906), 76
Bolzano, Bernard (1781–1848), 94, 96
Bombelli, Rafael (1526–1572), 22
Brouwer, Luitzen E. J. (1881–1966), 98
Buffon, Georges-Louis Leclerc de (1707–1788), 38
Cantor, Georg (1845–1918), 30, 32, 36, 62, 72, 74, 96, 102, 106, 108
Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857), 96
Cayley, Arthur (1821–1895), 48
Ceulen, Ludolph van (1540–1610), 38
Chakerian, Gulbank D. (*1933), 58
Church, Alonzo (1903–1995), 84
Clausius, Rudolf (1822–1888), 76
Cohen, Paul J. (1934–2007), 32
Conway, John Horton (*1937), 54
Cotes, Roger (1682–1716), 24
Descartes, René (1596–1650), 26, 50
Diophantos von Alexandria (um 250), 54
Dürer, Albrecht (1471–1528), 26, 50
Edler, F., 66
Eich, Günter (1907–1972), 1
Euklid (um 300 v. Chr.), 6, 10, 118
Euler, Leonhard (1707–1783), vii, 10, 24, 36, 50, 54, 58
Eutokios von Ascalon (*480–540*), 40
Fermat, Pierre de (1607–1665), 12, 42
Ferro, Scipione del (1465–1526), 34
Fibonacci (*1175–1245*), 8
Fischer, Michael J. (*1942), 56
Fraenkel, Abraham A. (1891–1965), 72
Frobenius, Georg (1849–1917), 48
Gauß, Carl Friedrich (1777–1855), 22, 42, 46
Gödel, Kurt (1906–1978), 32, 72, 96, 102, 104, 116, 118
Goldbach, Christian von (1690–1764), 98
Goodstein, Reuben Louis (1912–1985), 110
Graves, John T. (1806–1870), 48
Gregory, James (1638–1675), 20
Guthrie, Francis (1831–1899), 52
Hadamard, Jacques (1865–1963), 6
Haken, Wolfgang (*1928), 52
Hamilton, William Rowan (1805–1865), 22, 48
Hanke, Jonathan P., 54
Hardy, Godfrey Harold (1877–1947), 80

Hausdorff, Felix (1868–1942), 62, 70
Hermes, Johann Gustav (1846–1912), 42
Hermite, Charles (1822–1901), 36
Hilbert, David (1862–1943), 62, 102, 118
Hippasos von Metapont (um 500 v. Chr.), 18
Hopf, Heinz (1894–1971), 48
Johnson, Robert Sherlaw (1932–2000), 74
Kant, Immanuel (1724–1804), 104
Kervaire, Michael A. (1927–2007), 48
Kleene, Stephen Cole (1909–1994), 112
Koch, Niels Fabian Helge von (1870–1924), 74
Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813), 54
La Valleé Poussin, Charles Jean de (1866–1962), 6
Le Corbusier (1887–1965), 4
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), 20, 38
84, 94, 104
Leonardo von Pisa (*1175–1245*), 8
Lindemann, Ferdinand von (1852–1939), 36, 38, 40
Listing, Johann Benedikt (1808–1882), 60
Lullus, Raimundus (*1232–1316*), 84
Maddy, Penelope (*1950), 102
Mandelbrot, Benoît (1924–2010), 74
Mercator, Gerardus (1512–1594), 46
Mersenne, Marin (1588–1648), 10
Milnor, John W. (*1931), 48
Mises, Richard von (1883–1953), 78
Möbius, August Ferdinand (1790–1868), 60
Neumann, Johann von (1903–1957), 16, 106
Novalis (1772–1801), 1
Peano, Giuseppe (1858–1939), 62
Platon (*427–347* v. Chr.), 102
Poincaré, Henri (1854–1912), 76
Pythagoras (*575–500* v. Chr.), 12
Rabin, Michael O. (*1931), 56

Riemann, Bernhard (1826–1866), 28
Rivest, Ronald L. (*1947), 88
Robinson, Raphael (1911–1995), 2
Russell, Bertrand (1872–1970), 72, 98
Schneeberger, William A., 54
Scholz, Heinrich (1884–1956), 102
Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921), 66
Shamir, Adi (*1952), 88
Skolem, Thoralf (1887–1963)), 72
Takeuti, Gaisi (1926–2017), 96, 100
Tarski, Alfred (1901–1983), 2, 116
Thomas von Aquin (*1225*–1274), 104
Turing, Alan (1912–1954), 84, 112, 114
Wantzel, Pierre-Laurent (1814–1848), 42
Weinberg, Wilhelm (1862–1937), 80
Wessel, Caspar (1745–1818), 22
Weyl, Hermann (1885–1955), 98
Wiles, Andrew (*1953), 12
Zenodorus (*200–140* v. Chr.), 66
Zermelo, Ernst (1871–1953), 16, 70, 72, 76,
82, 98, 106
Zorn, Max (1906–1993), 70

Kleines Sachverzeichnis

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2$ (Aleph Null, Eins, Zwei), 32
Aleph, 108
Antinomie, Zermelo-Russellsche, 72
Äquivalenz von Mengen, 68
Äquivalenzklasse, 92
Äquivalenzrelation, 92
Argument einer komplexen Zahl, 24
Auswahlaxiom, 70
Axiom, 118
Betrag einer komplexen Zahl, 24
Beweis durch vollständige Induktion, 14
Diagonalverfahren, 30
Dimension, 44
Diskontinuum, Cantorsches, 74
e (Eulersche Zahl), vii
ε-Kette, absteigende, 16
Fibonacci-Zahlen, 8
Folge, konvergierende, 20
Formel, Eulersche, 24
Fraktal, 74
Fundamentalsatz der Algebra, 22
Funktion, berechenbare, 112
gleichmächtig, 68
Graph, 52
Grenzwert einer Folge, 20
Induktion, vollständige, 14
Induktionsaxiom, 14
Irrationalzahl, 36
Kardinalzahl, 108

Kette, absteigende, 16
Konstruktion mit Zirkel und Lineal, 40
Kontinuum, 32
Körper der komplexen Zahlen, 22
Kreiszahl, 38
Kugelparadoxon, 2
Kurve, stetige, 62
Logarithmus, natürlicher, vii
Mächtigkeit, unendliche, 108
Menge, abzählbare, 30
Menge, überabzählbare, 30
Menge, überabzählbare der reellen Zahlen, 30
Mengen, äquivalente, 68
ω (Omega), 106
Ordinalzahl, 106
Ordinalzahl, endliche, 106
Ordinalzahl, unendliche, 106
π (Pi), 38
π, Leibnizsche Reihendarstellung von, 20
π, Transzendenz von, 38
Primzahl, 6
Prinzip vom kleinsten Element, 16
Programm zur Berechnung einer Funktion, 112
Quadratur des Kreises, 40
reflexiv, 92
Reihe, 20
Reihendarstellung von π, Leibnizsche, 20
Repräsentantensystem, 92
Schnitt, Goldener, 4
selbstähnlich, 74
symmetrisch, 92
Theorem einer Theorie, 118
transitiv, 92
Transzendenz von π, 38

trivial, 90
Turingmaschine, 84
Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen, 30
Unvollständigkeitssatz, Erster, 118
Unvollständigkeitssatz, Zweiter, 118
Vierfarbensatz, 52
Wohlordnung, 16
Wohlordnung, der Ordinalzahlen, 108
Zahl, algebraische, 36
Zahl des Goldenen Schnitts, 4
Zahl des Goldenen Schnitts, Irrationalität der, 18
Zahl, Eulersche, vii
Zahl, irrationale, 36
Zahl, komplexe, 22
Zahl, transzendente, 36
Zahl, vollkommene, 10
290-Theorem, 54